

Б. М. ЯВОРСКИЙ, А. А. ДЕТЛАФ

СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.3
Я 22
УДК 53

ЯВОРСКИЙ Б. М. и ДЕТЛАФ А. А. Справочник по физике: 2-е изд., перераб.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 512 с.

Второе издание «Справочника по физике» существенно переработано по сравнению с первым изданием и соответствует новой программе курса физики в высших технических учебных заведениях. Практически заново написан раздел III Электродинамика. Полностью переделана глава VIII.2 Элементарные частицы, в которую внесены сведения о новейших достижениях физики элементарных частиц.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей: студентов вузов всех специальностей, аспирантов и инженерно-технических работников нефизического профиля, преподавателей физики высших и средних специальных учебных заведений, учителей физики средних общеобразовательных школ и средних профессионально-технических училищ.

Борис Михайлович Яворский, Андрей Антонович Детлаф
СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ

Редактор *В. Я. Дубнова*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *О. А. Сигал, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 12535

Сдано в набор 29.08.84. Подписано к печати 04.04.85. Т-07449. Формат 60×90^{1/16}.
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 32. Усл. кр.-отг.
32,25. Уч.-изд. л. 39,07. Тираж 250 000 экз. (2-й завод 100 001—250 000 экз.)
Заказ № 3596. Цена 2 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. 113054, Москва, Валуевая, 28

1704010000—070
Я 053 (02)—85 129—85

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1981.
© С изменениями, 1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	10
 Отдел I. МЕХАНИКА	
Глава I.1. Кинематика	11
§ I.1.1. Механическое движение. Предмет механики	11
§ I.1.2. Система отсчета. Траектория, длина пути и вектор перемещения	12
§ I.1.3. Скорость	14
§ I.1.4. Ускорение	16
§ I.1.5. Поступательное и вращательное движения твердого тела	18
 Глава I.2. Законы Ньютона	 21
§ I.2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета	21
§ I.2.2. Сила	22
§ I.2.3. Масса. Импульс	24
§ I.2.4. Второй закон Ньютона	25
§ I.2.5. Третий закон Ньютона. Движение центра инерции	27
§ I.2.6. Движение тела переменной массы	28
§ I.2.7. Закон сохранения импульса	29
§ I.2.8. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности	31
 Глава I.3. Работа и механическая энергия	 33
§ I.3.1. Энергия, работа и мощность	33
§ I.3.2. Кинетическая энергия	37
§ I.3.3. Потенциальная энергия	38
§ I.3.4. Закон сохранения механической энергии	41
§ I.3.5. Абсолютно упругий и неупругий удары	43
 Глава I.4. Динамика вращательного движения	 46
§ I.4.1. Момент силы и момент импульса	46
§ I.4.2. Момент инерции	49
§ I.4.3. Основной закон динамики вращательного движения	49
§ I.4.4. Закон сохранения момента импульса	49
 Глава I.5. Основы специальной теории относительности	 53
§ I.5.1. Постулаты специальной теории относительности	53
§ I.5.2. Одновременность событий. Синхронизация часов	54
§ I.5.3. Преобразования Лоренца	54
§ I.5.4. Относительность длин и промежутков времени. Интервал между двумя событиями	54
§ I.5.5. Преобразование скоростей и ускорений в релятивистском движении	54
§ I.5.6. Основной закон релятивистской динамики	66
§ I.5.7. Закон взаимосвязи массы и энергии	67



Глава I.6. Тяготение	69
§ I.6.1. Закон всемирного тяготения	69
§ I.6.2. Гравитационное поле	71
§ I.6.3. Законы Кеплера. Космические скорости	74
Глава I.7. Движение в неинерциальных системах отсчета	76
§ I.7.1. Кинематика относительного движения	76
§ I.7.2. Силы инерции	78
§ I.7.3. Относительное движение в системе отсчета, связанной с Землей. Сила тяжести и вес тела	79
§ I.7.4. Принцип эквивалентности	82
Отдел II. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ	
Глава II.1. Идеальные газы	84
§ II.1.1. Предмет молекулярной физики. Тепловое движение	84
§ II.1.2. Статистический и термодинамический методы исследования	85
§ II.1.3. Термодинамические параметры. Уравнение состояния. Термодинамический процесс	86
§ II.1.4. Уравнение состояния идеального газа	88
Глава II.2. Первый закон (первое начало) термодинамики	90
§ II.2.1. Полная и внутренняя энергии системы	90
§ II.2.2. Теплота и работа	91
§ II.2.3. Первый закон (первое начало) термодинамики	94
§ II.2.4. Графическое изображение термодинамических процессов и работы	95
§ II.2.5. Теплоемкость вещества. Применения первого начала термодинамики к изопроцессам в идеальном газе	96
Глава II.3. Кинетическая теория газов	101
§ II.3.1. Некоторые сведения о классической статистической физике	101
§ II.3.2. Основное уравнение кинетической теории газов	102
§ II.3.3. Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям и энергиям (Максвелловский закон распределения молекул по скоростям и энергиям)	103
§ II.3.4. Распределение частиц в потенциальном силовом поле (распределение Больцмана)	106
§ II.3.5. Средняя длина свободного пробега молекул	107
§ II.3.6. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Внутренняя энергия идеального газа	107
§ II.3.7. Теплоемкости одноатомных, двухатомных и многоатомных газов	109
§ II.3.8. Явления переноса в газах	113
§ II.3.9. Понятие о свойствах разреженных газов	116
Глава II.4. Второй закон (второе начало) термодинамики	117
§ II.4.1. Круговые процессы (циклы). Цикл Карно	117
§ II.4.2. Обратимые и необратимые процессы	120
§ II.4.3. Второй закон (второе начало) термодинамики	121
§ II.4.4. Энтропия и свободная энергия	123
§ II.4.5. Статистическое истолкование второго закона термодинамики	125
§ II.4.6. Флуктуации	126
§ II.4.7. Броуновское движение	128
§ II.4.8. Понятие о третьем законе термодинамики	129
Глава II.5. Реальные газы и пары	130
§ II.5.1. Силы межмолекулярного взаимодействия	130
§ II.5.2. Уравнение Ван дер Ваальса	133

§ II.5.3. Изотермы реальных газов. Понятие о фазовых переходах . . .	135
§ II.5.4. Понятие о сверхтекучести гелия	137
Глава II.6. Жидкости	138
§ II.6.1. Некоторые свойства жидкостей	138
§ II.6.2. Дырочная теория жидкого состояния	139
§ II.6.3. Явления диффузии и внутреннего трения в жидкостях	140
§ II.6.4. Поверхностное натяжение жидкостей	141
§ II.6.5. Смачивание и капиллярные явления	143
§ II.6.6. Испарение и кипение жидкостей	145
 Отдел III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	
Глава III.1. Электрические заряды. Закон Кулона	147
§ III.1.1. Введение	147
§ III.1.2. Закон Кулона	148
Глава III.2. Напряженность электрического поля	149
§ III.2.1. Электрическое поле. Напряженность поля	149
§ III.2.2. Принцип суперпозиции электрических полей	150
§ III.2.3. Поток напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля в вакууме	153
Глава III.3. Потенциал электростатического поля	154
§ III.3.1. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении в нем электрического заряда	154
§ III.3.2. Потенциал электростатического поля	156
§ III.3.3. Примеры применения теоремы Остроградского — Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме	159
Глава III.4. Электрическое поле в диэлектрических средах	163
§ III.4.1. Дипольные моменты молекул диэлектрика	163
§ III.4.2. Поляризация диэлектриков	165
§ III.4.3. Теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля в среде	168
§ III.4.4. Условия для электростатического поля на границе раздела изотропных диэлектрических сред	169
§ III.4.5. Сегнетоэлектрики	172
Глава III.5. Электрическая емкость	173
§ III.5.1. Проводники в электростатическом поле	173
§ III.5.2. Емкость уединенного проводника	174
§ III.5.3. Взаимная емкость, Конденсаторы	176
Глава III.6. Энергия электрического поля	178
§ III.6.1. Энергия заряженного проводника и электрического поля	178
§ III.6.2. Закон сохранения энергии для электрического поля в несегнетоэлектрической среде	181
Глава III.7. Постоянный электрический ток	183
§ III.7.1. Понятие об электрическом токе	183
§ III.7.2. Сила и плотность тока	184
§ III.7.3. Основы классической электронной теории электропроводности металлов	186
Глава III.8. Законы постоянного тока	188
§ III.8.1. Сторонние силы	188
§ III.8.2. Законы Ома и Джоуля — Ленца	189
§ III.8.3. Правила Кирхгофа	191

Глава III.9. Электрический ток в жидкостях и газах	193
§ III.9.1. Законы электролиза Фарадея. Электролитическая диссоциация	193
§ III.9.2. Атомность электрических зарядов	194
§ III.9.3. Электролитическая проводимость жидкостей	195
§ III.9.4. Электропроводность газов	196
§ III.9.5. Понятие о различных типах газового разряда	197
§ III.9.6. Некоторые сведения о плазме	198
Глава III.10. Магнитное поле постоянного тока	201
§ III.10.1. Магнитная индукция. Сила Лоренца	201
§ III.10.2. Закон Ампера	203
§ III.10.3. Закон Био — Савара — Лапласа	205
§ III.10.4. Некоторые простейшие примеры магнитных полей в вакууме	207
§ III.10.5. Магнитное взаимодействие проводников с токами. Контур с током в магнитном поле	210
§ III.10.6. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме	212
§ III.10.7. Магнитный поток. Теорема Остроградского — Гаусса для магнитного поля	213
§ III.10.8. Работа перемещения проводника с током в постоянном магнитном поле	214
Глава III.11. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	216
§ III.11.1. Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле	216
§ III.11.2. Явление Холла	217
§ III.11.3. Удельный заряд частиц. Масс-спектрометрия	218
§ III.11.4. Ускорители заряженных частиц	219
Глава III.12. Магнитное поле в веществе	223
§ III.12.1. Магнитные моменты электронов и атомов	223
§ III.12.2. Атом в магнитном поле	225
§ III.12.3. Диамагнетики и парамагнетики в магнитном поле	226
§ III.12.4. Магнитное поле в веществе	229
§ III.12.5. Ферромагнетики	231
§ III.12.6. Условия для магнитного поля на границе раздела изотропных сред. Магнитные цепи	233
Глава III.13. Электромагнитная индукция	237
§ III.13.1. Основной закон электромагнитной индукции	237
§ III.13.2. Явление самоиндукции	239
§ III.13.3. Взаимная индукция	241
§ III.13.4. Энергия магнитного поля в неферромагнитной изотропной среде	243
§ III.13.5. Закон сохранения энергии для магнитного поля в неферромагнитной среде	244
Глава III.14. Основы теории Максвелла	246
§ III.14.1. Общая характеристика теории Максвелла	246
§ III.14.2. Первое уравнение Максвелла	247
§ III.14.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла	249
§ III.14.4. Третье и четвертое уравнения Максвелла	251
§ III.14.5. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля	252

Отдел IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Глава IV.1. Свободные гармонические колебания	256
§ IV.1.1. Гармонические колебания	256
§ IV.1.2. Механические гармонические колебания	258
§ IV.1.3. Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре	262
§ IV.1.4. Сложение гармонических колебаний	264
Глава IV.2. Затухающие и вынужденные колебания	270
§ IV.2.1. Затухающие колебания	270
§ IV.2.2. Вынужденные механические колебания	273
§ IV.2.3. Вынужденные электрические колебания	276
Глава IV.3. Упругие волны	279
§ IV.3.1. Продольные и поперечные волны в упругой среде	279
§ IV.3.2. Уравнение бегущей волны	282
§ IV.3.3. Фазовая скорость и энергия упругих волн	285
§ IV.3.4. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость	288
§ IV.3.5. Интерференция волн. Стоячие волны	290
§ IV.3.6. Эффект Доплера в акустике	294
Глава IV.4. Электромагнитные волны	295
§ IV.4.1. Свойства электромагнитных волн	295
§ IV.4.2. Энергия электромагнитных волн	299
§ IV.4.3. Излучение электромагнитных волн	301
§ IV.4.4. Шкала электромагнитных волн	302
§ IV.4.5. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектрических сред	304
§ IV.4.6. Эффект Доплера	307

Отдел V. ОПТИКА

Глава V.1. Интерференция света	310
§ V.1.1. Монохроматичность и временная когерентность света	310
§ V.1.2. Интерференция света. Пространственная когерентность	311
§ V.1.3. Интерференция света в тонких пленках	316
§ V.1.4. Интерференция многих волн	319
Глава V.2. Дифракция света	321
§ V.2.1. Принцип Гюйгенса — Френеля	321
§ V.2.2. Дифракция Френеля	324
§ V.2.3. Дифракция Фраунгофера	325
§ V.2.4. Дифракция на пространственной решетке	330
§ V.2.5. Разрешающая способность оптических приборов	332
§ V.2.6. Голография	333
Глава V.3. Поглощение, рассеяние и дисперсия света. Излучение Вавилова — Черенкова	335
§ V.3.1. Взаимодействие света с веществом	335
§ V.3.2. Поглощение света	336
§ V.3.3. Рассеяние света	338
§ V.3.4. Нормальная и аномальная дисперсия света	339
§ V.3.5. Классическая электронная теория дисперсии света	340
§ V.3.6. Излучение Вавилова — Черенкова	342

Глава V.4. Поляризация света	344
§ V.4.1. Поляризация света при отражении и преломлении на границе раздела двух диэлектрических сред	344
§ V.4.2. Двойное лучепреломление	346
§ V.4.3. Интерференция поляризованного света	350
§ V.4.4. Искусственная оптическая анизотропия	353
§ V.4.5. Вращение плоскости поляризации	354
Глава V.5. Тепловое излучение	355
§ V.5.1. Тепловое излучение. Закон Кирхгофа	355
§ V.5.2. Законы Стефана — Больцмана и Вина	359
§ V.5.3. Формула Планка	360
§ V.5.4. Оптическая пирометрия	362
Глава V.6. Основы квантовой оптики	364
§ V.6.1. Внешний фотоэффект	364
§ V.6.2. Масса и импульс фотона, Давление света	367
§ V.6.3. Эффект Комптона	368
§ V.6.4. Корпускулярно-волновая двойственность свойств света	369

Отдел VI. ФИЗИКА АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

Глава VI.1. Элементы квантовой механики	371
§ VI.1.1. Корпускулярно-волновая двойственность свойств частиц вещества	371
§ VI.1.2. Уравнение Шредингера	373
§ VI.1.3. Движение свободной частицы	375
§ VI.1.4. Частица в одномерной потенциальной яме бесконечной глубины	375
§ VI.1.5. Линейный гармонический осциллятор	377
§ VI.1.6. Соотношения неопределенностей Гейзенберга	380
§ VI.1.7. Туннельный эффект	381
Глава VI.2. Строение атомов, молекул и их оптические свойства	383
§ VI.2.1. Атом водорода и водородоподобные ионы	383
§ VI.2.2. Пространственное квантование	387
§ VI.2.3. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева	388
§ VI.2.4. Химические связи и строение молекул	392
§ VI.2.5. Некоторые оптические свойства молекул	394
§ VI.2.6. Вынужденное излучение. Оптические квантовые генераторы	398

Отдел VII. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава VII.1. Строение и некоторые свойства твердых тел	402
§ VII.1.1. Строение твердых тел	402
§ VII.1.2. Тепловое расширение твердых тел	403
§ VII.1.3. Краткие сведения об упругих свойствах твердых тел	404
§ VII.1.4. Понятие о фазовых превращениях твердых тел	407
Глава VII.2. Некоторые сведения о квантовой физике твердых тел	409
§ VII.2.1. Понятие о квантовых статистиках	409
§ VII.2.2. Функции распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака	409
§ VII.2.3. Понятие о вырождении систем частиц, описываемых квантовыми статистиками	411
§ VII.2.4. Вырожденный электронный ферми-газ в металлах	412
§ VII.2.5. Понятие о квантовой теории электропроводности металлов	415
§ VII.2.6. Явление сверхпроводимости	417
§ VII.2.7. Теплоемкость твердых тел	420

§ VII.2.8. Понятие о зонной теории твердых тел	424
§ VII.2.9. Металлы и диэлектрики в зонной теории	426
§ VII.2.10. Электропроводность полупроводников	427
§ VII.2.11. Понятие о контактных электрических явлениях в металлах и полупроводниках	430

Отдел VIII. ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Глава VIII.1. Строение и важнейшие свойства атомных ядер	434
§ VIII.1.1. Основные свойства и строение ядра	434
§ VIII.1.2. Энергия связи ядер. Дефект массы	435
§ VIII.1.3. Ядерные силы	438
§ VIII.1.4. Радиоактивность	439
§ VIII.1.5. Альфа-радиоактивный распад	441
§ VIII.1.6. Бета-распад	442
§ VIII.1.7. Гамма-излучение	444
§ VIII.1.8. Эффект Мёссбауэра	446
§ VIII.1.9. Ядерные реакции	449
Глава VIII.2. Элементарные частицы	455
§ VIII.2.1. Общие сведения об элементарных частицах	455
§ VIII.2.2. Взаимопревращения элементарных частиц. Фундаментальные взаимодействия	459
§ VIII.2.3. Лептоны и адроны	463
§ VIII.2.4. Фундаментальные частицы	467

Отдел IX. ДОПОЛНЕНИЯ

§ IX.1. Системы единиц физических величин	472
§ IX.2. Фундаментальные физические константы	484
§ IX.3. Погрешности при измерениях физических величин	487
§ IX.4. Приближенные вычисления без точного учета погрешностей	495
Предметный указатель	497

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время при подготовке инженеров для различных отраслей народного хозяйства большую роль играют фундаментальные науки и, в частности, физика. Поэтому курс физики во вузах за последние годы претерпел серьезные изменения. В нем нашли отражение основные направления развития современной физики, объем и научный уровень курса заметно возросли. Это неизбежно привело к тому, что все учебные пособия по физике для вузов представляют трехтомные издания объемом 75—80 издательских листов. Наряду с такими пособиями ощущается потребность в кратком справочнике по курсу физики для вузов.

Объем данного справочника находится в соответствии с действующей программой курса физики во вузах. В нем приведены сведения, охватывающие все разделы этой программы: даны определения физических понятий, кратко сформулированы физические законы и закономерности, приведены необходимые разъяснения, а в ряде случаев и выводы. В справочнике опущен экспериментальный материал, хотя он и играет важную роль в курсе физики. Это связано с ограниченным объемом справочника. Единицы физических величин и системы единиц приведены в кратком дополнении (отдел IX).

Во втором издании справочника существенно переработан отдел III «Электродинамика» и заново написаны глава VIII.2 «Элементарные частицы», § IX.3 и § IX.4. Небольшие изменения внесены также в другие отделы справочника.

Справочник рассчитан в первую очередь на студентов высших технических учебных заведений. Однако он может быть полезен инженерно-техническим работникам и аспирантам, не специализирующимся в какой-либо области физики, а также преподавателям высшей и средней школы. Математические знания, необходимые для пользования справочником, соответствуют уровню обычного курса высшей математики во вузах. Подробный предметный указатель и система ссылок должны облегчить отыскание нужных сведений. В ссылках указываются номера отдела, главы, параграфа и пункта, где имеются сведения, относящиеся к данному вопросу. В ссылках на материал того же параграфа указывается только пункт. В ссылках на дополнение указывается только номер отдела (IX).

Отделы I, IV, V и IX написаны А. А. Детлафом, отделы II, VI, VII и гл. VIII.1 — Б. М. Яворским, отдел III написан А. А. Детлафом и Б. М. Яворским, а гл. VIII.2 — А. И. Наумовым.

Г л а в а I.1. КИНЕМАТИКА

§ I.1.1. Механическое движение. Предмет механики

1°. Простейшим видом движения в природе является *механическое движение*, состоящее в изменении взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени. Раздел физики, занимающийся изучением закономерностей механического движения, называется *механикой*. В более узком смысле слова под механикой часто понимают *классическую механику*, в которой рассматриваются движения макроскопических тел, совершающиеся со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме. В основе классической механики лежат законы Ньютона. Поэтому ее часто называют *ньютоновской механикой*. Закономерности движения тел со скоростями, близкими к скорости света в вакууме, являются предметом *релятивистской механики* (I.5.1.1°), а закономерности движения микрочастиц (например, электронов в атомах, молекулах, кристаллах и т. п.) — *квантовой механики* (VI.1.1.1°).

2°. Классическая механика состоит из трех основных разделов — статики, кинематики и динамики. В *статике* рассматриваются законы сложения сил и условия равновесия тел. В *кинематике* дается математическое описание всевозможных видов механического движения безотносительно к тем причинам, которые обеспечивают осуществление каждого конкретного вида движения. В *динамике* исследуется влияние взаимодействия между телами на их механическое движение.

3°. Механические свойства тел определяются их химической природой, внутренним строением и состоянием, рассмотрение которых является предметом не механики, а других разделов физики. Поэтому для описания реальных движущихся тел в механике пользуются, в зависимости от условий каждой конкретной задачи, различными упрощенными моделями: материальная точка, абсолютно твердое тело, абсолютно упругое тело, абсолютно неупругое тело и т. д.

Материальной точкой называется тело, форма и размеры которого несущественны в условиях данной задачи. Например, движение корабля из одного пункта в другой в первом приближении можно рассматривать как движение материальной точки. Однако в случае необходимости учета такой «детали» этого движения, как качка корабля при волнении моря, корабль следует рассматривать как протяженное тело, имеющее определенную форму. В литературе часто для сокращения вместо «материальная точка» говорят просто «точка».

Любое протяженное тело или систему таких тел, образующих исследуемую *механическую систему*, можно рассматривать как *систему материальных точек*. Для этого все тела системы нужно мысленно разбить на столь большое число частей, чтобы размеры каждой части были пренебрежимо малы по сравнению с размерами самих тел.

4°. *Абсолютно твердым телом* называется тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Расстояние между любыми двумя

точками абсолютно твердого тела не изменяется при любых воздействиях. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Абсолютно упругим телом называется тело, деформация которого подчиняется закону Гука (VII.1.3.4°). После прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Абсолютно неупругим телом называется тело, которое после прекращения внешнего силового воздействия полностью сохраняет деформированное состояние, вызванное этим воздействием.

§ 1.1.2. Система отсчета. Траектория, длина пути и вектор перемещения точки

1°. Положение тела в пространстве можно определить только по отношению к другим телам. Например, имеет смысл говорить о положении планеты по отношению к Солнцу, самолета или теплохода — по отношению к Земле; но нельзя

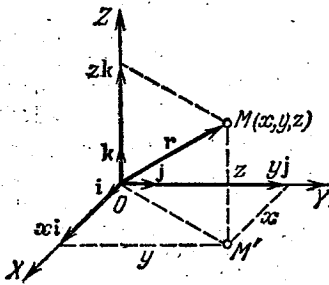


Рис. 1.1.1

указать их положение в пространстве «вообще», безотносительно к какому-либо конкретному телу. Абсолютно твердое тело, с которым жестко связана система координат, снабженная часами и используемая для определения положения в пространстве исследуемых тел и частиц в различные моменты времени, называется *системой отсчета*. Иногда системой отсчета называют саму хронометризованную, т. е. снабженную часами, систему координат, а твердое тело, с которым она жестко связана, называют *телом отсчета*. В каждой конкретной задаче выбор системы отсчета производится так, чтобы максимально упро-

стить решение этой задачи. Обычно в физике пользуются инерциальными системами отсчета (1.2.1.2°).

2°. Наиболее употребительна прямоугольная декартова система координат (рис. 1.1.1), *ортонормированный базис* которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными векторами i, j и k , проведенными из начала координат O . Положение произвольной точки M характеризуется радиусом-вектором r , соединяющим начало координат O с точкой M . Вектор r можно разложить по базису i, j, k :

$$r = xi + yj + zk,$$

где xi, yj и zk — компоненты (составляющие) вектора r по осям координат. Коэффициенты разложения x, y, z представляют собой декартовы координаты точки M , а также, в силу ортогональности векторов базиса, — проекции радиуса-вектора r на соответствующие оси координат.

Движение материальной точки полностью определено, если заданы три непрерывные и однозначные функции от времени t

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{и} \quad z = z(t),$$

описывающие изменение координат точки со временем.

Эти уравнения называются *кинематическими уравнениями движения точки*. Они эквивалентны одному векторному уравнению движения точки: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

3°. Линия, описываемая в пространстве движущейся точкой, называется *траекторией* этой точки. Кинематические уравнения движения точки задают уравнение ее траектории в параметрической форме (параметр — время t). В зависимости от формы траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движение точки. Движение точки называется *плоским*, если ее траектория целиком лежит в одной плоскости.

Механическое движение тела относительно, т. е. его характер и, в частности, вид траекторий точек тела зависят от выбора системы отсчета.

4°. В общем случае траектория материальной точки представляет собой не плоскую, а пространственную кривую. Для такой кривой вводится понятие *соприкасающейся плоскости*. *Соприкасающейся плоскостью* в произвольной точке M кривой называется предельное положение плоскости, проходящей через любые

три точки кривой, когда эти точки неограниченно приближаются к точке M .

Соприкасающейся окружностью в точке M кривой называется предел окружности, проходящей через три точки рассматриваемой кривой, когда эти точки неограниченно приближаются к точке M . Соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости. Центр соприкасающейся окружности и ее радиус называются соответственно *центром кривизны* и *радиусом кривизны* рассматриваемой кривой в точке M . Прямая, соединяющая точку M с центром кривизны, называется *главной нормалью* к кривой в точке M . Касательная к кривой в точке M перпендикулярна к главной нормали в этой точке и также лежит в соприкасающейся плоскости.

5°. *Длиной пути* точки называется сумма длин всех участков траектории, пройденных этой точкой за рассматриваемый промежуток времени. Момент времени $t = t_0$, ранее которого движение точки не рассматривается, называется *начальным моментом времени*, а положение точки в этот момент (точка A на рис. 1.1.2) — *начальным положением*. В силу произвольности выбора начала отсчета времени обычно полагают $t_0 = 0$. Длина пути s , пройденного точкой из ее начального положения, является скалярной функцией времени: $s = s(t)$, причем, как видно из самого определения, длина пути точки не может быть отрицательной величиной. Если точка движется по дуге траектории AB (рис. 1.1.2) все время в одном направлении и в момент времени t находится в точке M , то $s(t) = \overset{\frown}{AM}$. Если же точка движется по траектории более сложным образом, например к моменту времени $t_1 < t$ перемещается из A в B , а затем, двигаясь в обратном направлении, к моменту времени t возвращается в точку M , то $s(t) = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BM}$.

6°. *Вектором перемещения* точки за промежутки времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется вектор, проведенный из положения точки в момент t_1 в ее положение в момент t_2 . Он равен приращению радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1).$$

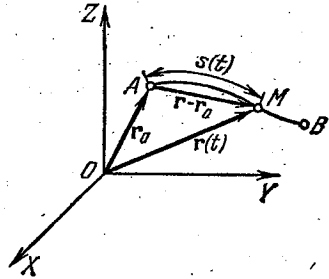


Рис. 1.1.2

Вектор перемещения всегда направлен вдоль хорды, стягивающей соответствующий участок траектории.

На рис. I.1.2 показан вектор перемещения точки за промежуток времени от t_0 до t , равный $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$.

Вектор перемещения точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ равен

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x \cdot \mathbf{i} + \Delta y \cdot \mathbf{j} + \Delta z \cdot \mathbf{k},$$

где Δx , Δy и Δz — приращения (изменения) координат точки за рассматриваемый промежуток времени.

7°. Материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, может совершать только три *независимых движения*, т. е. таких, каждое из которых нельзя представить в виде комбинации остальных. Действительно, движение точки вдоль каждой из осей прямоугольной декартовой системы координат нельзя осуществить за счет ее движения вдоль остальных двух осей. Число независимых движений, которые может совершать механическая система, называется *числом степеней свободы* этой системы. Итак, свободная материальная точка имеет три степени свободы.

§ I.1.3. Скорость

1°. Для характеристики быстроты движения тел в механике вводится понятие скорости. *Средней скоростью* движущейся точки в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$, равный отношению приращения $\Delta \mathbf{r}$ радиуса-вектора точки к этому промежутку времени к его продолжительности Δt :

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ направлен так же, как $\Delta \mathbf{r}$, т. е. вдоль хорды, стягивающей соответствующий участок траектории точки.

2°. *Скоростью* (или *мгновенной скоростью*) точки называется векторная величина \mathbf{v} , равная первой производной по времени от радиуса-вектора \mathbf{r} рассматриваемой точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Скорость точки в момент времени t равна пределу средней скорости $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ при неограниченном уменьшении продолжительности интервала Δt :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ср}}.$$

Вектор \mathbf{v} скорости точки направлен по касательной к траектории в сторону движения так же, как и вектор $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ малого перемещения точки за очень короткий промежуток времени dt .

Путь ds , проходимый точкой за время dt , равен модулю вектора перемещения: $ds = |d\mathbf{r}|$. Поэтому модуль вектора скорости точки равен первой производной от длины пути по времени:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

3°. Разложение вектора \mathbf{v} по базису прямоугольной декартовой системы координат имеет вид:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$

Проекция скорости точки на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

а модуль вектора скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

4°. При прямолинейном движении точки направление вектора ее скорости сохраняется неизменным. Движение точки называется *равномерным*, если модуль ее скорости не изменяется с течением времени: $v = \frac{ds}{dt} = \text{const}$. При равномерном движении точки длина пройденного ею пути s зависит от времени линейно: $s = vt$ (при условии, что $t_0 = 0$, см. 1.1.2.5°).

Если модуль скорости точки увеличивается с течением времени ($\frac{dv}{dt} > 0$), то движение называется *ускоренным*, если же он убывает с течением времени ($\frac{dv}{dt} < 0$), то движение называется *замедленным*.

5°. *Средней путевой скоростью неравномерного движения* точки на данном участке ее траектории называется скалярная величина $v_{\text{ср}}$; равная отношению длины Δs этого участка траектории к продолжительности Δt прохождения его точкой:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Она равна модулю вектора скорости такого равномерного движения, при котором на прохождение этого же самого пути Δs затрачивается столько же времени, сколько и в рассматриваемом неравномерном движении.

При криволинейном движении точки $|\Delta \mathbf{r}| < \Delta s$. Поэтому в общем случае средняя путевая скорость точки $v_{\text{ср}}$ не равна модулю средней скорости точки $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ на том же участке траектории (1.1.3.1°): $v_{\text{ср}} \geq |\mathbf{v}_{\text{ср}}|$, где знак равенства соответствует прямолинейному участку траектории.

6°. В случае плоского движения точки M (1.1.2.3°) часто удобно пользоваться полярными координатами r и φ , где r — расстояние от полюса O до точки M , а φ — полярный угол, отсчитываемый от полярной оси OA (рис. 1.1.3). Скорость \mathbf{v} точки M можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — *радиальную скорость* v_r и *тангенциальную скорость* v_φ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi,$$

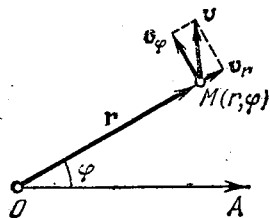


Рис. 1.1.3

причем

$$\mathbf{v}_r = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} [kr].$$

Здесь \mathbf{r} — полярный радиус-вектор точки M , а \mathbf{k} — единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости движения точки так, что из его конца вращение вектора \mathbf{r} при увеличении полярного угла φ видно происходящим против часовой стрелки.

Модуль вектора скорости \mathbf{v} точки M , совершающей плоское движение,

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

За малое время dt полярный радиус-вектор \mathbf{r} точки, совершающей плоское движение, прочерчивает круговой сектор площадью $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Поэтому величину

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r v_\varphi$$

называют *секториальной скоростью*.

§ 1.1.4. Ускорение

1°. Для характеристики быстроты изменения вектора скорости точки в механике вводится понятие ускорения. *Средним ускорением* точки в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$, равный отношению приращения $\Delta \mathbf{v}$ вектора скорости точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt :

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

2°. *Ускорением* (или *мгновенным ускорением*) точки называется векторная величина \mathbf{a} , равная первой производной по времени от скорости \mathbf{v} рассматриваемой точки или, что то же самое, второй производной по времени от радиуса-вектора \mathbf{r} этой точки:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Ускорение точки в момент времени t равно пределу среднего ускорения $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ при неограниченном уменьшении продолжительности интервала Δt :

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_{\text{ср}}.$$

3°. Разложение вектора \mathbf{a} по базису прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости или, что то же самое, вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль вектора ускорения

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

4°. Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости (I.1.2.4°), проведенной в рассматриваемой точке M траектории, и направлен в сторону вогнутости траектории BC (рис. I.1.4). В этой плоскости вектор ускорения \mathbf{a} можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие \mathbf{a}_τ и \mathbf{a}_n :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

5°. Составляющая \mathbf{a}_τ называется *касательным*, или *тангенциальным*, ускорением точки. Она направлена по касательной к траектории точки и равна

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} \quad \text{и} \quad a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

где $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор касательной, проведенный в точке M траектории в направлении скорости \mathbf{v} точки, \mathbf{a}_τ — проекция касательного ускорения на направление вектора \mathbf{v} . Касательное ускорение характеризует быстроту изменения модуля вектора скорости точки. Векторы \mathbf{a}_τ и \mathbf{v} совпадают по направлению, т. е. $a_\tau > 0$ при ускоренном движении точки (I.1.3.4°); векторы \mathbf{a}_τ и \mathbf{v} взаимно противоположны по направлению, т. е. $a_\tau < 0$ при замедленном движении точки и $a_\tau = 0$ при ее равномерном движении. Если $a_\tau = \text{const} \neq 0$, то движение называется *равнопеременным*. При равнопеременном движении модуль скорости точки зависит от времени линейно:

$$v = v_0 + a_\tau t,$$

где $v_0 = v(0)$ — модуль начальной скорости, т. е. скорости в начальный момент времени $t=0$. Если $a_\tau = \text{const} > 0$, то движение точки называется *равноускоренным*, а если $a_\tau = \text{const} < 0$, то движение точки называется *равнозамедленным*.

6°. Составляющая \mathbf{a}_n ускорения \mathbf{a} точки называется ее *нормальным ускорением*. Она направлена по главной нормали к траектории в рассматриваемой точке M в сторону к центру кривизны траектории (I.1.2.4°). Поэтому \mathbf{a}_n часто называют также *центростремительным ускорением* точки. Нормальное ускорение равно

$$a_n = \frac{v^2}{R} n,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны траектории. Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости точки.

Если точка движется прямолинейно, то нормальное ускорение $\mathbf{a}_n = 0$ и ускорение точки равно ее касательному ускорению: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau$.

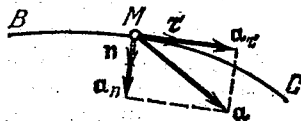


Рис. I.1.4

§ 1.1.5. Поступательное и вращательное движения твердого тела *)

1°. *Поступательным движением* твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом (например, прямая AB на рис. 1.1.5), перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному направлению (A_0B_0). Поступательно движутся относительно Земли, например, кабина лифта, резец токарного станка, стрелка компаса при перемещении его корпуса в горизонтальной плоскости и т. д.

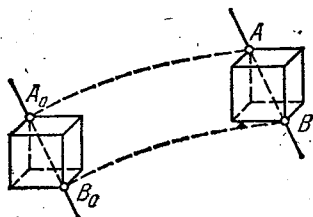


Рис. 1.1.5

При поступательном движении твердого тела все его точки перемещаются совершенно одинаково: за малое время dt радиусы-векторы этих точек изменяются на одну и ту же величину dr . Соответственно в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы и равны dr/dt , а следовательно, одинаковы и их уско-

рения. Поэтому кинематическое рассмотрение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения любой из его точек. В динамике обычно рассматривают движение центра инерции тела (1.2.3.3°). Твердое тело, свободно движущееся в пространстве, имеет три поступательные степени свободы (1.1.2.7°), соответствующие его поступательным перемещениям вдоль трех осей координат.

2°. Движение твердого тела, при котором две его точки A и B остаются неподвижными, называется *вращением* (или *вращательным движением*) *тела вокруг неподвижной оси*. Неподвижная прямая AB называется *осью вращения* тела. При вращении вокруг неподвижной оси все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости перпендикулярны к ней. Такого рода движение относительно Земли совершают, например, роторы турбин, электромоторов и генераторов, установленных неподвижно на Земле.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы (1.1.2.7°). Его положение в пространстве полностью определяется значением φ угла поворота тела из некоторого определенного (начального) положения.

3°. Для характеристики быстроты и направления вращения тела вокруг оси служит угловая скорость. *Угловой скоростью* называют вектор ω , который численно равен первой производной от угла поворота φ по времени t и направлен вдоль неподвижной оси вращения так, чтобы из его конца вращение тела было видно происходящим против часовой стрелки (рис. 1.1.6) **)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

*) В этом параграфе рассматриваются только абсолютно твердые тела, называемые для краткости просто твердыми телами.

**) Направление вектора ω можно также определить по *правилу винта*: оно совпадает с направлением поступательного движения правого винта, вращающегося вместе с телом. Векторы, подобные ω , направление которых связывается с направлением вращения и изменяется на противоположное при переходе от правой

Здесь $d\varphi$ — вектор элементарного (малого) поворота тела за время dt , направленный вдоль оси вращения также по правилу винта (рис. 1.1.6).

Аксиальные векторы $d\varphi$ и ω не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения. На рис. 1.1.6 они отложены из некоторой точки O неподвижной оси вращения, принимаемой одновременно за начало координат системы отсчета.

Вращение тела называется *равномерным*, если численное значение его угловой скорости не изменяется с течением времени: $\omega = \text{const}$. В этом случае угол поворота тела зависит линейно от времени: $\varphi = \omega t$.

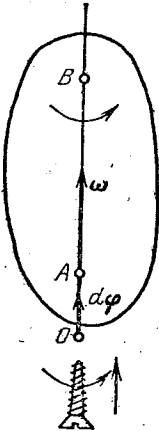


Рис. 1.1.6

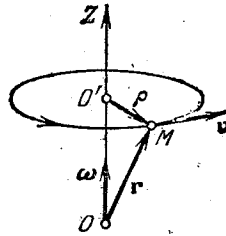


Рис. 1.1.7

4°. Произвольная точка M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ с угловой скоростью ω , описывает окружность радиуса ρ с центром в точке O' (рис. 1.1.7). Скорость v точки M , в отличие от угловой скорости тела, часто называют *линейной скоростью*. Она направлена перпендикулярно как к оси вращения (т. е. к вектору ω), так и к радиус-вектору ρ , проведенному в точку M из центра окружности O' , и равна их векторному произведению:

$$v = [\omega\rho] = [\omega r] \quad \text{и} \quad v = \omega\rho.$$

Здесь $r = \vec{OO'} + \rho$ — радиус-вектор точки M , проведенный из точки O оси вращения, принятой за начало координат.

5°. *Периодом вращения* называется промежуток времени T , в течение которого тело, равномерно вращаясь с угловой скоростью ω , совершает один оборот вокруг оси вращения (поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$): $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

системы координат к левой, называются *псевдовекторами* или *аксиальными векторами* (в отличие от обычных, *полярных векторов*, не изменяющих своего направления при указанном преобразовании координат). Например, векторное произведение двух полярных векторов является псевдовектором, а векторное произведение псевдовектора и полярного вектора — полярным вектором.

Частота вращения $n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ показывает число оборотов, совершаемых телом за единицу времени при равномерном вращении с угловой скоростью ω .

6°. Движение твердого тела, при котором одна из его точек остается неподвижной, называется *вращением тела вокруг неподвижной точки*. Обычно эту точку принимают за начало координат неподвижной системы отсчета. При вращении вокруг неподвижной точки все точки тела движутся по поверхностям концентрических сфер, центры которых находятся в неподвижной точке. В каждый момент времени это движение тела можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку и называемой *мгновенной осью вращения*. В общем случае положение мгновенной оси вращения изменяется по отношению как к неподвижной системе отсчета, так и к системе отсчета, жестко связанной с вращающимся телом.

Скорость v произвольной точки M тела равна

$$v = [\omega r] \quad \text{и} \quad v = \omega r.$$

Здесь $\omega = d\varphi/dt$ — угловая скорость тела, направленная вдоль мгновенной оси вращения, так же как и вектор $d\varphi$ элементарного поворота тела за малое время dt , r — радиус-вектор, проведенный в точку M из неподвижной точки O , вокруг которой вращается тело, а ρ — расстояние от точки M до мгновенной оси вращения. Тело может совершать три независимых движения — вращаться вокруг каждой из трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через неподвижную точку O . Следовательно, оно имеет три степени свободы (I.1.2.7°).

7°. Для характеристики быстроты изменения вектора угловой скорости тела при неравномерном вращении тела вокруг неподвижной оси или при его вращении вокруг неподвижной точки вводится вектор *углового ускорения* тела, равный первой производной от его угловой скорости ω по времени t ,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то вектор ε направлен вдоль этой оси: в ту же сторону, что ω , при ускоренном вращении ($\frac{d\omega}{dt} > 0$) и в противоположную — при замедленном вращении ($\frac{d\omega}{dt} < 0$). Проекция углового ускорения на неподвижную ось вращения OZ равна

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt},$$

где ω_z — проекция на ту же ось вектора ω .

8°. Ускорение a произвольной точки M тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O или неподвижной оси, проходящей через эту точку, часто называют, в отличие от углового ускорения тела, *линейным ускорением*. Оно равно

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega r] = a_{np} + a_{oc},$$

где $a_{np} = [\varepsilon r]$ — *вращательное ускорение* точки, а $a_{oc} = [\omega[\omega r]]$ — *осеостремительное ускорение* точки, направленное к мгновенной оси вращения.

Если тело вращается вокруг неподвижной оси OZ (рис. 1.1.7), то вращательное ускорение точки M совпадает с ее касательным ускорением a_τ (1.1.4.5°), а осестремительное — с нормальным ускорением a_n (1.1.4.6°):

$$a_\tau = [\varepsilon r] = [\varepsilon r], \quad a_n = -\omega^2 r.$$

9°. Всякое сложное движение твердого тела можно разложить на два простых движения: поступательное со скоростью v_A некоторой произвольно выбранной точки A тела и вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Угловая скорость вращения ω не зависит от выбора точки A . Скорость произвольной точки M тела

$$v = v_A + [\omega (r - r_A)],$$

где r и r_A — радиусы-векторы точек M и A .

В динамике твердого тела обычно удобно рассматривать сложное движение тела как совокупность двух одновременно совершающихся движений — поступательного со скоростью центра инерции (1.2.3.3°) и вращения вокруг центра инерции.

Простейший случай сложного движения тела — *плоское*, или *плоскопараллельное*, движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. Такое движение совершает, например, однородный круговой цилиндр, скатывающийся с наклонной плоскости. При плоском движении направление мгновенной оси вращения тела вокруг точки A не изменяется, а векторы ω и v_A взаимно перпендикулярны.

Глава 1.2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

§ 1.2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

1°. В качестве *первого закона динамики* Ньютон принял закон, установленный еще Галилеем: материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния.

Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое их *инертностью*. Соответственно первый закон Ньютона называют *законом инерции*, а движение тела в отсутствие воздействий со стороны других тел — *движением по инерции*.

2°. Механическое движение относительно: его характер для одного и того же тела может быть различным в разных системах отсчета (1.1.2.1°), движущихся друг относительно друга. Например, космонавт, находящийся на борту искусственного спутника Земли, неподвижен в системе отсчета, связанной со спутником. В то же время по отношению к Земле он движется вместе со спутником по эллиптической орбите, т. е. не равномерно и не прямолинейно. Естественно поэтому, что первый закон Ньютона должен выполняться не во всякой системе отсчета. Например, шар, лежащий на гладком полу каюты корабля, который идет равномерно и прямолинейно, может прийти в движение по полу без всякого воздействия на него со стороны каких-либо тел. Для этого достаточно, чтобы скорость корабля начала изменяться,

Система отсчета, по отношению к которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета*. Содержание первого закона Ньютона сводится по существу к двум утверждениям: во-первых, что все тела обладают свойством инертности и, во-вторых, что существуют инерциальные системы отсчета.

3°. Любые две инерциальные системы отсчета могут двигаться друг относительно друга только поступательно и притом равномерно и прямолинейно. Экспериментально установлено, что практически инерциальна *гелиоцентрическая система отсчета*, начало координат которой находится в центре инерции (1.2.3.3°) Солнечной системы (приблизительно — в центре Солнца), а оси проведены в направлении трех удаленных звезд, выбранных, например, так, чтобы оси координат были взаимно перпендикулярны.

Лабораторная система отсчета, оси координат которой жестко связаны с Землей, неинерциальна главным образом из-за суточного вращения Земли. Однако Земля вращается столь медленно, что максимальное нормальное ускорение (1.1.4.6°) точек ее поверхности в суточном вращении не превосходит $0,034 \text{ м/с}^2$. Поэтому в большинстве практических задач лабораторную систему отсчета можно приближенно считать инерциальной.

4°. Инерциальные системы отсчета играют особую роль не только в механике, но также и во всех других разделах физики. Это связано с тем, что, согласно принципу относительности Эйнштейна (1.5.1.2°), математическое выражение любого физического закона должно иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться, не оговаривая это каждый раз, только инерциальными системами отсчета. Закономерности движения материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета рассмотрены в главе 1.7.

§ 1.2.2. Сила

1°. *Силой* называется векторная величина, являющаяся мерой механического действия на рассматриваемое тело со стороны других тел. Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при трении, при давлении тел друг на друга), так и между удаленными телами. Особая форма материи, связывающая частицы вещества в единные системы и передающая с конечной скоростью действия одних частиц на другие, называется *физическим полем*, или просто *полем*. Взаимодействие между удаленными телами осуществляется посредством создаваемых ими гравитационных и электромагнитных полей (например, притяжение планет к Солнцу, взаимодействие заряженных тел, проводников с током и т. п.). Механическое действие на данное тело со стороны других тел проявляется двояко. Оно способно вызывать, во-первых, изменение состояния механического движения рассматриваемого тела, а во-вторых, — его деформацию. Оба эти проявления действия силы могут служить основой для измерения сил. Например, измерение сил с помощью пружинного динамометра основано на законе Гука (VII.1.3.4°) для продольного растяжения.

Пользуясь понятием силы, в механике обычно говорят о движении и деформации тела под действием приложенных к нему сил. При этом, конечно, каждой

силе всегда соответствует некоторое тело, действующее на рассматриваемое с этой силой,

Сила F полностью определена, если заданы ее модуль, направление в пространстве и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Поле, действующее на материальную точку с силой F , называется *стационарным полем*, если оно не изменяется с течением времени t , т. е. если в любой точке поля сила F не зависит явно от времени: $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Для стационарности поля необходимо, чтобы создающие его тела покоились относительно инерциальной системы отсчета, используемой при рассмотрении поля.

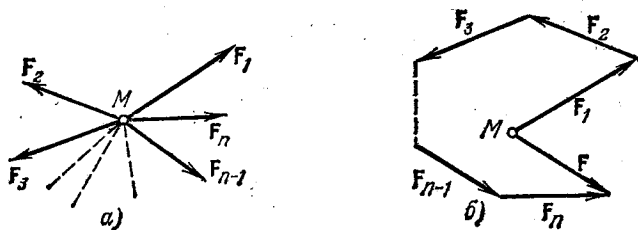


Рис. 1.2.1

2°. Одновременное действие на материальную точку M нескольких сил F_1, F_2, \dots, F_n (рис. 1.2.1, а) эквивалентно действию одной силы, называемой *равнодействующей*, или *результатирующей, силой* и равной их геометрической сумме

$$F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Она представляет собой замыкающую многоугольника сил F_1, F_2, \dots, F_n (рис. 1.2.1, б).

Если тело абсолютно твердое, то действие на него силы не изменяется при переносе точки приложения этой силы вдоль линии ее действия в пределах тела. Иначе говоря, силы, приложенные к абсолютно твердому телу, можно рассматривать как скользящие векторы.

3°. Тело называется *свободным*, если на его положение и движение в пространстве не наложено никаких ограничений. Например, летящий в воздухе самолет представляет собой свободное тело так же, как движущаяся в толще воды подводная лодка. В большинстве случаев приходится иметь дело с телами, которые несвободны: на их возможные положения и движения наложены те или иные ограничения, называемые в механике *связями*. Например, шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, не может удалиться от точки подвеса на расстояние, большее длины нити; трамвай может двигаться только вдоль рельс. Связи осуществляются благодаря действию на рассматриваемое тело со стороны других тел, скрепленных или соприкасающихся с ним (например, нити на привязанный к ней шарик, рельсов на трамвай и т. п.).

При изучении поведения несвободных тел или систем тел в механике пользуются *принципом освобожденности*: несвободное тело (или систему тел) можно

рассматривать как свободное, заменив действие на него тел, осуществляющих связи, соответствующими силами. Эти силы называются *реакциями связей*, а все остальные силы, действующие на тело, — *активными силами*. Так, движение шарика, подвешенного на нити, можно рассматривать как движение свободного шарика, на который, помимо всех приложенных к нему активных сил (например, силы тяжести), действует еще реакция нити.

В отличие от активных сил, которые в каждой конкретной задаче должны быть заданы, реакции связей заранее неизвестны. Они подлежат определению в ходе решения задачи. Их значения должны быть такими, чтобы под совместным действием активных сил и реакций связей «освобожденное» тело совершало такое движение, которое полностью согласуется с ограничениями, накладываемыми связями на рассматриваемое несвободное тело. Никаких иных различий между реакциями связей и активными силами нет.

4°. Тела, не входящие в состав исследуемой механической системы, называются *внешними телами*. Силы, действующие на систему со стороны внешних тел, называются *внешними силами*. Соответственно *внутренними силами* называются силы взаимодействия между частями рассматриваемой системы.

Механическая система называется *замкнутой*, или *изолированной*, *системой*, если она не взаимодействует с внешними телами. Ни на одно из тел замкнутой системы внешние силы не действуют.

§ 1.2.3. Масса. Импульс

1°. В классической (ньютоновской) механике *массой материальной точки* называется положительная скалярная величина, являющаяся мерой инертности этой точки. Под действием силы материальная точка изменяет свою скорость не мгновенно, а постепенно, т. е. приобретает конечное по величине ускорение, которое тем меньше, чем больше масса материальной точки. Для сравнения масс m_1 и m_2 двух материальных точек достаточно измерить модули a_1 и a_2 ускорений, приобретаемых этими точками под действием одной и той же силы: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$. Обычно массу тела определяют путем взвешивания на рычажных весах.

В классической (ньютоновской) механике считается, что:

- а) масса материальной точки не зависит от состояния движения точки, являясь ее неизменной характеристикой;
- б) масса — величина аддитивная, т. е. масса системы (например, тела) равна сумме масс всех материальных точек, входящих в состав этой системы;
- в) масса замкнутой системы (1.2.2.4°) остается неизменной при любых процессах, происходящих в этой системе (*закон сохранения массы*).

Эти положения ньютоновской механики подверглись пересмотру и уточнению в релятивистской механике (1.5.6.1°, 1.5.6.2°, 1.5.7.3°, 1.5.7.6°).

2°. Плотностью ρ тела в данной его точке M называется отношение массы dm малого элемента тела, включающего точку M , к величине dV объема этого элемента:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Размеры рассматриваемого элемента должны быть столь малы, чтобы изменением плотности в его пределах можно было пренебречь. С другой стороны, они должны быть во много раз больше межмолекулярных расстояний.

Тело называется *однородным*, если во всех его точках плотность одинакова. Масса однородного тела равна произведению его плотности на объем: $m = \rho V$.

Масса неоднородного тела

$$m = \int_{(V)} \rho dV,$$

где ρ — функция координат, а интегрирование проводится по всему объему тела. *Средней плотностью* (ρ) неоднородного тела называется отношение его массы к объему: $\langle \rho \rangle = m/V$.

3°. *Центром инерции*, или *центром масс*, *системы* материальных точек называется точка C , радиус-вектор r_C которой равен

$$r_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i r_i,$$

где m_i и r_i — масса и радиус-вектор i -й материальной точки, n — общее число материальных точек в системе, а $m = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса всей системы.

Скорость центра инерции

$$v_C = \frac{dr_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i v_i.$$

4°. Векторная величина p_i , равная произведению массы m_i материальной точки на ее скорость v_i , называется *импульсом*, или *количеством движения*, этой материальной точки. *Импульсом системы* материальных точек называется вектор p , равный геометрической сумме импульсов всех материальных точек системы:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Импульс системы равен произведению массы всей системы на скорость ее центра инерции: $p = mv_C$.

§ 1.2.4. Второй закон Ньютона

1°. Основным законом динамики материальной точки является второй закон Ньютона, который говорит о том, как изменяется механическое движение материальной точки под действием приложенных к ней сил. *Второй закон Ньютона* гласит: скорость изменения импульса p материальной точки равна действующей на нее силе F , т. е.

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(mv) = F,$$

где m и v — масса и скорость материальной точки.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то под силой F во втором законе Ньютона нужно понимать геометрическую сумму всех действующих сил — как активных, так и реакций связей (1.2.2.3°), т. е. равнодействующую силу (1.2.2.2°).

2°. Векторная величина $F dt$ называется элементарным импульсом силы F за малое время dt ее действия. Импульс силы F за конечный промежуток времени от $t=t_1$ до $t=t_2$ равен определенному интегралу $\int_{t_1}^{t_2} F dt$, где F , в общем случае, зависит от времени t .

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса материальной точки равно импульсу действующей на нее силы:

$$dp = F dt \quad \text{и} \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt,$$

где $p_2 = p(t_2)$ и $p_1 = p(t_1)$ — значения импульса материальной точки в конце ($t=t_2$) и в начале ($t=t_1$) рассматриваемого промежутка времени.

3°. Поскольку в ньютоновской механике масса m материальной точки не зависит от состояния движения точки, то $\frac{dm}{dt} = 0$. Поэтому математическое выражение второго закона Ньютона можно также представить в форме

$$a = \frac{F}{m},$$

где $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ — ускорение материальной точки, r — ее радиус-вектор. Соответствующая формулировка *второго закона Ньютона* гласит: ускорение материальной точки совпадает по направлению с действующей на нее силой и равно отношению этой силы к массе материальной точки.

Касательное и нормальное ускорения материальной точки (1.1.4.4°—1.1.4.6°) определяются соответствующими составляющими силы F

$$a_{\tau} = \frac{F_{\tau}}{m}, \quad a_n = \frac{dv}{dt} = \frac{F_{\tau}}{m}$$

и

$$a_n = \frac{F_n}{m}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{F_n}{m},$$

где v — модуль вектора скорости материальной точки, а R — радиус кривизны ее траектории. Сила F_n , сообщаемая материальной точке нормальное ускорение, направлена к центру кривизны траектории точки (1.1.2.4°) и потому называется *центростремительной силой*.

4°. Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил F_1, F_2, \dots, F_n , то ее ускорение

$$a = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n a_{i1}$$

где $a_i = F_i/m$. Следовательно, каждая из сил, одновременно действующих на материальную точку, сообщает ей такое же ускорение, как если бы других сил не было (*принцип независимости действия сил*).

Дифференциальным уравнением движения материальной точки называется уравнение

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат это уравнение имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z,$$

где x , y и z — координаты движущейся точки.

§ 1.2.5. Третий закон Ньютона. Движение центра инерции

1°. Механическое воздействие тел друг на друга носит характер их взаимодействия. Об этом говорит *третий закон Ньютона*: две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Если F_{ik} — сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны k -й, а F_{ki} — сила, действующая на k -ю материальную точку со стороны i -й, то, согласно третьему закону Ньютона,

$$F_{ki} = -F_{ik}.$$

Силы F_{ik} и F_{ki} приложены к разным материальным точкам и могут взаимно уравновешиваться только в тех случаях, когда эти точки принадлежат одному и тому же абсолютно твердому телу.

2°. Третий закон Ньютона является существенным дополнением к первому и второму законам. Он позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной механической системы (системы материальных точек). Из третьего закона Ньютона следует, что в любой механической системе геометрическая сумма всех внутренних сил (1.2.2.4°) равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik} = 0,$$

где n — число материальных точек, входящих в состав системы, а $F_{ii} = 0$.

Вектор $F_{\text{внешн}}$, равный геометрической сумме всех внешних сил (1.2.2.4°), действующих на систему, называется *главным вектором внешних сил*:

$$F_{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^n F_i^{\text{внешн}},$$

где $F_i^{\text{внешн}}$ — результирующая внешних сил, приложенных к i -й материальной точке.

3°. Из второго и третьего законов Ньютона следует, что первая производная по времени t от импульса p механической системы (1.2.3.4°) равна главному

вектору всех внешних сил, приложенных к системе,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}.$$

Это уравнение выражает *закон изменения импульса системы*.

Так как $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, где m — масса системы, а \mathbf{v}_C — скорость ее центра инерции, то *закон движения центра инерции механической системы* имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad \text{или} \quad m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

где $\mathbf{a}_C = d\mathbf{v}_C/dt$ — ускорение центра инерции. Таким образом, центр инерции механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

Если рассматриваемая система — твердое тело, которое движется поступательно (1.1.5.1°), то скорости \mathbf{v} всех точек тела и его центра инерции \mathbf{v}_C одинаковы и равны скорости \mathbf{v} тела. Соответственно ускорение тела $\mathbf{a} = \mathbf{a}_C$, и *основное уравнение динамики поступательного движения твердого тела* имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}.$$

§ 1.2.6. Движение тела переменной массы

1°. В ньютоновской механике масса тела может изменяться только в результате отделения от тела или присоединения к нему частиц вещества. Примером такого тела является ракета. В процессе полета масса ракеты постепенно уменьшается, так как газообразные продукты сгорания топлива в двигателе ракеты выбрасываются через сопло.

Уравнение поступательного движения тела переменной массы (уравнение Мещерского):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt},$$

где m и \mathbf{v} — масса и скорость тела в рассматриваемый момент времени, $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил (1.2.5.2°), действующих на тело, \mathbf{v}_i — скорость отделяющихся частиц после отделения (если $\frac{dm}{dt} < 0$), либо присоединяющихся частиц до присоединения (если $\frac{dm}{dt} > 0$).

2°. Второй член правой части уравнения Мещерского представляет собой дополнительную силу, действующую на тело переменной массы. Эта сила называется *реактивной силой*:

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt},$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$ — относительная скорость отделяющихся или присоединяющихся частиц, т. е. их скорость по отношению к системе отсчета, движущейся поступательно вместе с телом.

Реактивная сила характеризует механическое действие на тело отделяющихся от него или присоединяющихся к нему частиц (например, действие на ракету вытекающей из нее струи газов).

3°. Уравнение движения ракеты в отсутствие внешних сил:

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

Если начальная скорость ракеты равна нулю, то ракета движется прямолинейно в направлении, противоположном относительной скорости u и струи газа на выходе из сопла двигателя. В этом случае

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

и при $u = \text{const}$ связь между скоростью ракеты и ее массой выражается формулой Циолковского

$$v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

где m_0 — начальная (стартовая) масса ракеты.

4°. Максимальная скорость, которую может развить ракета в отсутствие внешних сил, называется *характеристической скоростью*. Эта скорость достигается в момент окончания работы двигателя из-за использования всего запаса топлива и окислителя, имевшегося на борту ракеты,

$$v_{\text{макс}} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_{\text{т}}},$$

где $m_{\text{т}}$ — начальная масса топлива и окислителя.

Влияние тяготения Земли и сопротивления воздуха вызывают заметное уменьшение максимальной скорости, фактически приобретаемой ракетой в процессе работы двигателя, по сравнению с ее характеристической скоростью.

5°. *Характеристическая скорость составной (многоступенчатой) ракеты*

$$v_{\text{макс}} = \sum_{i=1}^n u_i \ln \frac{m_{0i}}{m_{0i} - m_{\text{т}i}},$$

где n — общее число ступеней ракеты, $m_{\text{т}i}$ — масса топлива и окислителя, предназначенных для работы двигателя i -й ступени, u_i — относительная скорость истечения газов из сопла двигателя i -й ступени, m_{0i} — стартовая масса части составной ракеты, включающей все ступени ракеты с i -й по n -ю. Увеличение характеристической скорости составной ракеты по сравнению с одноступенчатой, имеющей ту же стартовую массу и тот же запас топлива и окислителя, связано с дополнительным уменьшением массы ракеты путем последовательного отделения от нее первой, второй и следующих ступеней после сгорания всего топлива, имевшегося в этой ступени.

§ 1.2.7. Закон сохранения импульса

1°. *Закон сохранения импульса*: импульс p замкнутой системы не изменяется с течением времени, т. е.

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad p = \text{const.}$$

В отличие от законов Ньютона, закон сохранения импульса справедлив не только в рамках классической механики. Он принадлежит к числу самых ос-

новых (фундаментальных) физических законов, так как связан с определенным свойством симметрии пространства — его однородностью. *Однородность пространства* проявляется в том, что физические свойства замкнутой системы и законы ее движения не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета, т. е. не изменяются при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы как целого. Согласно современным представлениям импульсом могут обладать не только частицы и тела, но также и поля. Например, свет оказывает давление на поверхность отражающего или поглощающего его тела именно потому, что электромагнитное поле световой волны обладает импульсом.

2°. Применительно к системам, описываемым классической (ньютоновской) механикой, закон сохранения импульса можно рассматривать как следствие законов Ньютона. Для замкнутой механической системы главный вектор внешних сил $F_{\text{внешн}} \equiv 0$, и из (1.2.5.3°) следует закон сохранения импульса

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const},$$

где m_i и \mathbf{v}_i — масса и скорость i -й материальной точки системы, состоящей из n точек.

Соответственно не изменяются и проекции импульса замкнутой системы на оси декартовых координат инерциальной системы отсчета:

$$p_x = \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} = \text{const},$$

$$p_y = \sum_{i=1}^n m_i v_{iy} = \text{const},$$

$$p_z = \sum_{i=1}^n m_i v_{iz} = \text{const}.$$

Импульс системы $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, где m — масса всей системы, а \mathbf{v}_C — скорость ее центра инерции (1.2.3.4°). Поэтому из закона сохранения импульса следует, что при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, скорость ее центра инерции не изменяется: $\mathbf{v}_C = \text{const}$.

3°. Если система не замкнутая, но действующие на нее внешние силы таковы, что их главный вектор тождественно равен нулю ($F_{\text{внешн}} \equiv 0$), то, согласно законам Ньютона (1.2.5.3°), импульс системы не изменяется с течением времени: $\mathbf{p} = \text{const}$.

Обычно $F_{\text{внешн}} \neq 0$ и $\mathbf{p} \neq \text{const}$. Однако если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось тождественно равна нулю, то проекция на ту же ось вектора импульса системы не изменяется со временем. Так, $p_x = \text{const}$ при условии, что $F_x^{\text{внешн}} \equiv 0$. Например, если на систему не действуют другие внешние силы, кроме силы тяжести, то перпендикулярная к направлению этой силы горизонтальная составляющая импульса системы не изменяется.

4°. В некоторых процессах (например, при ударе или выстреле) импульсы частей системы претерпевают большие изменения за сравнительно короткие промежутки времени. Это связано с возникновением в системе кратковременных,

но весьма значительных по величине внутренних сил взаимодействия частей системы, по сравнению с которыми все постоянно действующие на систему внешние силы (например, сила тяжести) оказываются малыми. В таком процессе обычно можно пренебречь действием на систему внешних сил, т. е. можно приближенно считать, что импульс всей системы в целом не изменяется в рассматриваемом процессе.

§ 1.2.8. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

1°. Преобразованиями Галилея называются преобразования координат и времени, применяемые в ньютоновской механике при переходе от одной инерциальной системы отсчета $K(x, y, z, t)$ к другой $K'(x', y', z', t')$, которая движется относительно K поступательно с постоянной скоростью V . Преобразования Галилея основываются на аксиомах об абсолютности промежутков времени и длин.

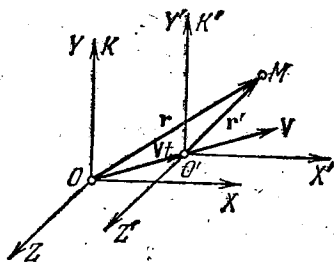


Рис. 1.2.2

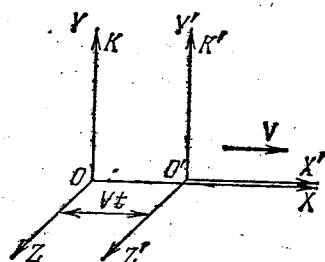


Рис. 1.2.3

Первая аксиома утверждает, что ход времени (соответственно промежутки времени между какими-либо двумя событиями) одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Согласно второй аксиоме размеры тела не зависят от скорости его движения относительно системы отсчета.

Если сходственные оси декартовых координат инерциальных систем отсчета K и K' проведены попарно параллельно друг другу и если в начальный момент времени ($t=t'=0$) начала координат O и O' совпадают друг с другом (рис. 1.2.2), то преобразования Галилея имеют вид

$$x' = x - V_x t, \quad y' = y - V_y t, \quad z' = z - V_z t \quad \text{и} \quad t' = t,$$

или

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad \text{и} \quad t' = t,$$

где x, y, z и x', y', z' — координаты точки M в системах отсчета K (в момент времени t) и K' (в момент времени $t'=t$), \mathbf{r} и \mathbf{r}' — радиусы-векторы точки M в тех же системах отсчета, а V_x, V_y и V_z — проекции скорости V системы K' на оси координат системы K .

Обычно оси координат проводят так, что система K' движется вдоль положительного направления оси OX (рис. 1.2.3). В этом случае преобразования Галилея имеют наиболее простой вид:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{и} \quad t' = t.$$

2°. Из преобразований Галилея вытекает следующий закон преобразования скорости произвольной точки M (рис. 1.2.2) при переходе от одной инерциальной системы отсчета K (скорость точки $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$) к другой K' (скорость той же точки $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$);

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Соответственно преобразуются и проекции скорости на сходственные оси координат:

$$v'_x = v_x - V_x, \quad v'_y = v_y - V_y, \quad v'_z = v_z - V_z.$$

В частности, при движении системы K' вдоль положительного направления оси OX (рис. 1.2.3)

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z.$$

Ускорения точки M в системах отсчета K ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$) и K' ($\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt'$) одинаковы: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$.

Итак, ускорение материальной точки не зависит от выбора инерциальной системы отсчета — инвариантно относительно преобразований Галилея.

3°. Силы взаимодействия материальных точек зависят только от их взаимного расположения и от скорости движения друг относительно друга. Взаимное расположение каких-либо двух точек 2 и 1 характеризуется вектором, равным разности радиусов-векторов этих точек, т. е. в системе K вектором $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, а в системе K' — вектором $\mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$. Из преобразований Галилея следует, что $\mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}_{21}$. Поэтому расстояния между точками 1 и 2 в системах K и K' одинаковы:

$$r'_{21} = r_{21}, \quad \text{или} \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Скорость движения точки 2 относительно точки 1 равна разности скоростей этих точек: $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ (в системе K) и $\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1$ (в системе K'). Из преобразований Галилея следует, что $\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

Итак, взаимное расположение и скорость относительного движения любых двух материальных точек не зависят от выбора инерциальной системы отсчета — они инвариантны относительно преобразований Галилея. Соответственно инвариантны относительно преобразований Галилея и силы, действующие на материальную точку: $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

4°. Уравнения, выражающие законы Ньютона (1.2.4.3°) и (1.2.5.1°), инвариантны относительно преобразований Галилея, т. е. не изменяют свой вид при преобразовании координат и времени от одной инерциальной системы отсчета (K) к другой (K'):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik} \quad (\text{в системе } K),$$

$$m'\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad \text{и} \quad \mathbf{F}'_{ki} = -\mathbf{F}'_{ik} \quad (\text{в системе } K'),$$

где $m' = m$ — масса рассматриваемой материальной точки, одинаковая во всех системах отсчета.

Таким образом, в классической механике справедлив *механический принцип относительности* (*принцип относительности Галилея*): законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

ковы во всех инерциальных системах отсчета. Это значит, что в разных инерциальных системах отсчета все механические процессы при одних и тех же условиях протекают одинаково. Следовательно, с помощью любых механических экспериментов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно (относительно какой-либо инерциальной системы отсчета).

Механический принцип относительности свидетельствует о том, что в механике все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Среди них нельзя указать какую-то особую, «главную» инерциальную систему отсчета, движение тел относительно которой можно было бы рассматривать как их «абсолютное движение».

5°. Обобщение принципа относительности на все физические явления было осуществлено А. Эйнштейном в специальной теории относительности (I.5.1.2°). При этом выяснилось, что координаты и время в различных инерциальных системах отсчета связаны преобразованиями Лоренца (I.5.3.2°), а не Галилея. Однако при малых скоростях относительного движения систем отсчета (по сравнению со скоростью света в вакууме) преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

Г л а в а 1.3. РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

§ 1.3.1. Энергия, работа и мощность

1°. *Энергией* называется скалярная физическая величина, являющаяся общей мерой различных форм движения материи, рассматриваемых в физике. Энергия системы количественно характеризует последнюю в отношении возможных в ней превращений движения. Эти превращения происходят благодаря взаимодействию частей системы как друг с другом, так и с внешними телами (внешней средой). Для анализа качественно различных форм движения и соответствующих им взаимодействий в физике вводят различные виды (формы) энергии: механическую (I.3.4.1°), внутреннюю (II.2.1.2°), электромагнитную (IV.4.2.1°), ядерную (VIII.1.2.2°) и т. д.

2°. Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественного описания такого процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике пользуются понятием работы силы, приложенной к рассматриваемому телу. *Элементарной работой силы* F на малом перемещении $d\mathbf{r}$ называется скалярная величина

$$\delta A = F dr = Fv dt,$$

где \mathbf{r} и $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — радиус-вектор и скорость точки приложения силы, а dt — малый промежуток времени, за который сила F совершает работу δA (о смысле обозначения δA см. I.3.1.8°).

В прямоугольных декартовых координатах

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt,$$

где x, y, z — координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z и v_x, v_y, v_z — проекции на оси координат векторов F и v .

3°. Выражение для элементарной работы можно также представить в виде

$$\delta A = F ds \cos \alpha = F_\tau ds,$$

где $ds = |dr|$ — элементарная длина пути точки приложения силы за рассматриваемый малый промежуток времени dt , α — угол между векторами F и dr , а $F_\tau = F \cos \alpha$ — проекция силы на направление перемещения dr . Сила, нормальная к траектории точки ее приложения, работы не совершает.

Силу F называют *движущей силой*, если $F_\tau > 0$, так что $\delta A > 0$. Если же $F_\tau < 0$ ($\delta A < 0$), то силу F называют *тормозящей силой* (*силой сопротивления*).

4°. Если на механическую систему одновременно действуют силы F_1, F_2, \dots, F_n , то работа δA , совершаемая ими за малое время dt , равна алгебраической сумме работ, совершаемых за то же время dt каждой из сил порознь;

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n F_i dr_i = \sum_{i=1}^n F_i v_i dt,$$

где r_i и v_i — радиус-вектор и скорость точки приложения силы F_i .

Например, для материальной точки $r_i = r$ — радиус-вектор этой точки, а $v_i = v$ — ее скорость. Соответственно $\delta A = F dr = Fv dt$, где $F = \sum_{i=1}^n F_i$ — равнодействующая сила (I.2.2,2°). Из второго закона Ньютона (I.2.4,1°) следует, что для материальной точки

$$\delta A = v dp,$$

где $p = mv$ — импульс точки, m — ее масса.

В случае поступательного движения абсолютно твердого тела $dr_i = dr_C$ и $v_i = v_C$, где r_C и v_C — радиус-вектор и скорость центра инерции тела (I.2.3,3°).

Работа внутренних сил при любом движении абсолютно твердого тела равна нулю. Поэтому при поступательном движении такого тела $\delta A = F_{\text{внешн}} dr_C = F_{\text{внешн}} v_C dt$, где $F_{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил (I.2,5,2°). Из закона движения центра инерции (I.2,5,3°) следует, что

$$\delta A = v_C dp,$$

где $p = mv_C$ — импульс твердого тела массы m , движущегося поступательно со скоростью $v = v_C$.

5°. Работа A , совершаемая силой F на конечном участке траектории L точки ее приложения, равна алгебраической сумме работ на всех малых частях этого участка, т. е. выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_{(L)} F dr = \int_0^s F_\tau ds,$$

где s — длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории от начала рассматриваемого участка, F_τ — проекция силы на направление перемещения dr точки ее приложения. Для вычисления этого интеграла необходимо знать зависимость F_τ от s вдоль данной траектории L . Если эта зависимость представлена графически (рис. I.3.1), то работа A измеряется площадью, заштрихованной на рис. I.3.1.

6°. *Потенциальными силами* называются такие силы, работа которых зависит только от начальных и конечных положений точек их приложения и не зависит ни от вида траекторий этих точек, ни от законов их движения по траекториям.

Например, силы взаимодействия частей системы (материальных точек) потенциальны, если они зависят только от конфигурации системы, т. е. от взаимного

расположения всех точек системы, причем работа этих сил при перемещении системы из одного произвольного положения в другое не зависит от способа перемещения, а полностью определяется начальной и конечной конфигурациями системы. Примерами такого рода сил могут служить силы электростатического и гравитационного взаимодействия.

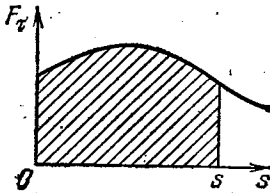


Рис. 1.3.1

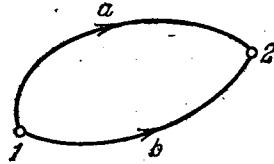


Рис. 1.3.2

Стационарное поле (1.2.2.1°) называется *потенциальным*, если сила F , с которой оно действует на материальную точку, помещенную в поле, потенциальна. Это значит, что сила F зависит только от положения материальной точки в поле, а работа силы F при перемещении точки из одного произвольного положения 1 в другое — 2 (рис. 1.3.2) вдоль любых двух траекторий, например, 1a2 (работа A_{1a2}) и 1b2 (работа A_{1b2}) одинакова:

$$A_{1a2} = A_{1b2} = \int_1^2 F dr.$$

Соответственно работа потенциальной силы при перемещении точки ее положения вдоль любой замкнутой траектории L (например, 1a2b1) равна нулю:

$$\oint_{(L)} F dr = 0.$$

В общем случае внешние тела, создающие рассматриваемое поле, могут двигаться относительно инерциальной системы отсчета, так что их поле не является стационарным, т. е. сила F зависит явно от времени: $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$. Нестационарное поле *потенциально*, если работа, совершаемая силой F при *мгнов. переносе* точки ее приложения вдоль любой замкнутой траектории L , равна нулю:

$$\oint_{(L)} F dr = 0.$$

Здесь F зависит не только от координат точки, но и от времени, однако при вычислении этого интеграла время нужно считать фиксированным параметром.

Т. К непотенциальным силам относятся диссипативные и гироскопические силы. *Диссипативными силами* называются силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна. Таковы, например, силы трения скольжения и силы сопротивления движению тел в жидкостях и газах. Диссипативные силы, в отличие от потенциальных, зависят не

только от взаимного расположения взаимодействующих тел, но также и от их относительных скоростей.

Гироскопическими силами называются силы, зависящие от скорости материальной точки, на которую они действуют, и направленные перпендикулярно к этой скорости. Примером гироскопической силы является сила Лоренца (III.10.1.5°), действующая со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу. Работа гироскопических сил всегда равна нулю независимо от того, как перемещается материальная точка.

Механическая система (система материальных точек) называется *консервативной*, если все действующие на нее непотенциальные силы работы не совершают, а все внешние потенциальные силы стационарны.

8°. Элементарную работу силы F , действующей на материальную точку со стороны стационарного потенциального поля, можно представить в виде полного дифференциала скалярной функции координат $\Phi(x, y, z)$, называемой *силовой функцией* этого поля:

$$F dr = d\Phi, \text{ или } F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz.$$

Следовательно,

$$F_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \text{и} \quad F = \text{grad } \Phi.$$

Последние соотношения справедливы и для нестационарного потенциального поля, силовая функция которого зависит не только от координат, но и от времени: $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$. Однако в этом случае

$$F dr = d\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt.$$

Элементарную работу непотенциальной силы нельзя представить в виде полного дифференциала какой-либо функции координат. Именно поэтому элементарная работа произвольной силы обозначена δA .

9°. Для характеристики работы, совершаемой за единицу времени, в механике пользуются понятием мощности. *Мощностью* (мгновенной мощностью) называется скалярная физическая величина N , равная отношению элементарной работы δA к малому промежутку времени dt , в течение которого эта работа совершается,

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Если F — сила, совершающая работу δA , то мощность равна скалярному произведению силы F на скорость v точки ее приложения:

$$N = Fv = F_v v.$$

В общем случае мощность может изменяться с течением времени.

Средней мощностью в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется физическая величина $\langle N \rangle$, равная отношению работы A , совершаемой за этот промежуток времени, к его продолжительности Δt :

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

§ 1.3.2. Кинетическая энергия

1°. Кинетической энергией тела называется энергия его механического движения. Изменение кинетической энергии W_k материальной точки под действием силы F равно работе, совершаемой этой силой,

$$dW_k = \delta A = v dp,$$

где $p = mv$ — импульс материальной точки, а m и v — ее масса и скорость. В ньютоновской механике $m = \text{const}$, и выражение для кинетической энергии материальной точки имеет вид

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

О кинетической энергии в релятивистской механике см. 1.5.7.1°.

2°. Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех частей этой системы. Например, для системы, состоящей из n материальных точек,

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где m_i и v_i — масса и скорость i -й точки системы.

Кинетическая энергия тела

$$W_k = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho v^2 dV,$$

где v — скорость точек малого элемента dV объема тела плотностью ρ и массой $dm = \rho dV$, а интегрирование проводится по всему объему тела V . Если абсолютно твердое тело массы m движется поступательно со скоростью v , то его кинетическая энергия $W_k = mv^2/2$. О кинетической энергии вращающегося тела см. 1.4.3.3° и 1.4.3.5°.

3°. Изменение кинетической энергии механической системы равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему (1.2.2.4°),

$$dW_k = \delta A_{\text{внешн}} + \delta A_{\text{внутр}}.$$

Например, для системы, состоящей из n материальных точек,

$$dW_k = \sum_{i=1}^n F_i^{\text{внешн}} dr_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik} dr_i,$$

где r_i — радиус-вектор i -й точки, $F_i^{\text{внешн}}$ — результирующая внешних сил, действующих на эту точку, а $F_{ii} = 0$.

Если система не деформируется, то работа внутренних сил

$$\delta A_{\text{внутр}} = 0 \text{ и } dW_k = \delta A_{\text{внешн}}.$$

Например, изменение кинетической энергии абсолютно твердого тела, движущегося поступательно,

$$dW_k = F_{\text{внешн}} dr,$$

где $F_{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил (1.2.5.2°), а dr — вектор элементарного перемещения тела.

4°. Кинетическая энергия механической системы зависит от выбора системы отсчета. Если в инерциальной системе отсчета K кинетическая энергия системы равна W_K , а в системе отсчета K' , движущейся относительно K поступательно со скоростью V , она равна W'_K , то

$$W_K = W'_K + \frac{mV^2}{2} + p'V,$$

где m — масса системы, $p' = mv'g$ — импульс системы в ее движении относительно системы отсчета K' , $v'g$ — скорость центра инерции системы относительно K' . Это соотношение справедливо как при $V = \text{const}$, т. е. когда K' — инерциальная система отсчета, так и при $\frac{dV}{dt} \neq 0$.

В частности, если система отсчета K' движется относительно K поступательно со скоростью v_C центра инерции системы, т. е. $V = v_C$, то $v'_C = 0$ и

$$W_K = \frac{mv_C^2}{2} + W'_K.$$

Это равенство выражает *теорему Кёнига*: кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, обладающая массой, равной массе всей системы, и движущаяся со скоростью ее центра инерции, а также кинетической энергии той же системы в ее движении относительно поступательно движущейся системы отсчета с началом в центре инерции.

Из теоремы Кёнига следует, что кинетическая энергия абсолютно твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения этого тела со скоростью его центра инерции и кинетической энергии вращения тела вокруг центра инерции.

§ 1.3.3. Потенциальная энергия

1°. *Потенциальной энергией* называется часть энергии механической системы, зависящая только от ее *конфигурации*, т. е. от взаимного расположения всех частиц (материальных точек) системы и от их положения во внешнем потенциальном поле (1.3.1.6°). Убыль потенциальной энергии при перемещении системы из произвольного положения 1 в другое произвольное положение 2 измеряется той работой A_{12} , которую совершают при этом все потенциальные силы (внутренние и внешние), действующие на систему,

$$W_{\Pi}(1) - W_{\Pi}(2) = A_{12},$$

где $W_{\Pi}(1)$ и $W_{\Pi}(2)$ — значения потенциальной энергии системы в начальном и конечном положениях. Соответственно работа потенциальных сил при малом изменении конфигурации системы $\delta A = -dW_{\Pi}$.

Примечание. Предполагается, что внешние потенциальные силы стационарны, т. е. могут изменяться со временем только вследствие изменения положения рассматриваемой системы относительно системы отсчета. В против-

ном случае $dW_{\Pi} = -\delta A + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t} dt$.

В простейшем случае, когда система представляет собой материальную точку, находящуюся в потенциальном поле, связь между силой F , действующей на точку, и потенциальной энергией W_{Π} этой точки в поле имеет вид

$$F_x = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} \quad \text{и} \quad F = -\text{grad } W_{\Pi}.$$

Потенциальная энергия материальной точки W_{Π} связана с силовой функцией (1.3.1.8°) соответствующего потенциального поля соотношением

$$dW_{\Pi} = -d\Phi \quad \text{или} \quad W_{\Pi}(x, y, z, t) = -\Phi(x, y, z, t) + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

2°. Соотношения п. 1° позволяют найти зависимость потенциальной энергии системы от ее конфигурации только с точностью до произвольного постоянного слагаемого, не влияющего на изменение энергии. Для получения однозначной зависимости потенциальной энергии системы от ее конфигурации в каждой конкретной задаче выбирают так называемую *нулевую конфигурацию*, в которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю. Таким образом, потенциальная энергия системы в произвольном состоянии равна работе, совершаемой всеми действующими на систему потенциальными силами при переводе системы из рассматриваемого состояния в состояние, соответствующее нулевой конфигурации.

3°. **Пример 1.** *Потенциальная энергия материальной точки в однородном силовом поле.* Пусть сила F , действующая на точку со стороны поля, направлена вдоль оси OZ , т. е. $F = F_z k$, где k — орт оси OZ , а проекция F_z силы F на ось OZ не зависит от координат точки. Тогда

$$dW_{\Pi} = -F dr = -F_z dz \quad \text{и} \quad W_{\Pi}(z) = -F_z z + W_{\Pi}(0),$$

где $W_{\Pi}(0)$ — значение потенциальной энергии материальной точки на уровне $z = 0$.

В частности, потенциальная энергия материальной точки массы m , находящейся в однородном поле силы тяжести у поверхности Земли (ось OZ направлена вертикально вверх, $F_z = -mg$, g — ускорение свободного падения), равна

$$W_{\Pi}(z) = mgz + W_{\Pi}(0).$$

4°. **Пример 2.** *Потенциальная энергия материальной точки в поле центральных сил.* В потенциальном поле центральных сил на материальную точку действуют силы F , которые всюду направлены вдоль прямых, проходящих через одну и ту же неподвижную точку — *центр сил*, и зависят только от расстояния r до центра сил:

$$F = F_r(r) \frac{r}{r}.$$

Здесь r — радиус-вектор, проведенный из центра сил в рассматриваемую точку поля, а $F_r(r)$ — проекция силы F на направление вектора r , зависящая только от расстояния r . Если материальная точка притягивается к центру сил, то $F_r(r) = -|F| < 0$, если же она отталкивается от центра сил, то $F_r(r) = |F| > 0$. Элементарная работа силы F

$$\delta A = F dr = F_r(r) dr.$$

Потенциальная энергия материальной точки

$$W_{\Pi}(r) = \int_r^{\infty} F_r(r) dr + W_{\Pi}(\infty).$$

Обычно за начало отсчета потенциальной энергии принимают энергию материальной точки, находящейся бесконечно далеко от центра сил, т. е. полагают $W_{\Pi}(\infty) = 0$:

$$W_{\Pi}(r) = \int_r^{\infty} F_r(r) dr.$$

Примерами центрального силового поля, в котором сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра сил ($F_r(r) \sim r^{-2}$), могут служить гравитационные поля материальной точки и однородного шара, электростатические поля точечного заряда, а также сферы и шара, равномерно заряженных соответственно по поверхности и по объему.

5°. **Пример 3.** Потенциальная энергия системы из двух материальных точек, между которыми действуют центральные силы, т. е. силы, зависящие от расстоя-

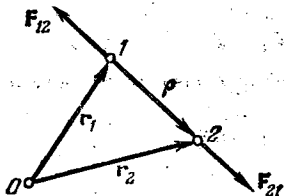


Рис. 1.3.3

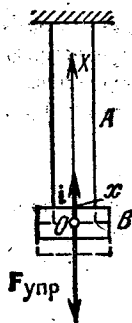


Рис. 1.3.4

ния между точками и направленные вдоль соединяющей их прямой. На рис. 1.3.3 показаны силы взаимного отталкивания F_{12} и $F_{21} = -F_{12}$:

$$F_{21} = F_{\rho}(\rho) \frac{\rho}{\rho},$$

где $\rho = r_2 - r_1$ — радиус-вектор, проведенный из точки 1 в точку 2, а $F_{\rho}(\rho)$ — проекция силы F_{21} на направление вектора ρ , зависящая только от расстояния ρ между точками. Малое изменение потенциальной энергии системы

$$dW_{\Pi} = -(F_{12} dr_1 + F_{21} dr_2) = -F_{21} d\rho = -F_{\rho}(\rho) d\rho.$$

Если принять, что $W_{\Pi} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, то

$$W_{\Pi}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} F_{\rho}(\rho) d\rho.$$

Эту энергию часто называют *взаимной потенциальной энергией двух материальных точек*.

6°. Пример 4. Потенциальная энергия упругого тела (например, пружины) при его продольном растяжении или сжатии. При деформации упругого тела в нем возникают потенциальные внутренние силы (силы упругости), которые препятствуют деформации. По закону Гука упругая сила $F_{упр}$, с которой деформируемое тело A (рис. 1.3.4) действует на тело B , вызывающее его деформацию, пропорциональна величине деформации:

$$F_{упр} = - kx_1.$$

Здесь x_1 — вектор перемещения тела B , характеризующий деформацию тела A (в недеформированном состоянии $x = 0$, при сжатии $x > 0$, а при растяжении $x < 0$), $k > 0$ — коэффициент, характеризующий упругие свойства тела A .

Потенциальная энергия деформированного тела (в отсутствие деформации, т. е. при $x = 0$, эта энергия принята равной нулю)

$$W_{п} = \frac{kx^2}{2}.$$

§ 1.3.4. Закон сохранения механической энергии

1°. Механической энергией, или *полной механической энергией*, называется энергия механического движения и взаимодействия. Механическая энергия W системы материальных точек равна сумме их кинетической энергии W_k и потенциальной энергии $W_{п}$ взаимодействия этих точек друг с другом и с внешними телами:

$$W = W_k + W_{п}.$$

Элементарное приращение механической энергии системы за малый промежуток времени dt

$$dW = \delta A_{вн} + \frac{\partial W_{п}}{\partial t} dt,$$

где $\delta A_{вн}$ — алгебраическая сумма элементарных работ, совершаемых за время dt всеми действующими на систему внутренними и внешними непотенциальными силами. Член $\frac{\partial W_{п}}{\partial t} dt$ представляет собой изменение за время dt потенциальной энергии системы и соответственно ее полной механической энергии, обусловленное нестационарностью внешних потенциальных сил (1.3.3.1°).

2°. Если система консервативна (1.3.1.7°), то $\delta A_{вн} = 0$ и $\frac{\partial W_{п}}{\partial t} = 0$.

Соответственно механическая энергия такой системы: $W = \text{const}$, т. е. справедлив следующий закон, называемый *законом сохранения механической энергии*: при движении консервативной системы ее механическая энергия не изменяется.

В частности, этот закон справедлив для замкнутых консервативных систем: механическая энергия замкнутой системы не изменяется с течением времени, если все внутренние силы, действующие в этой системе, потенциальны либо не совершают работы.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*. Это свойство времени проявляется в том, что законы движения замкнутой системы (или системы, находящейся в стационарном внешнем поле) не зависят от

выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в стационарном потенциальном поле силы тяжести у поверхности Земли, скорость тела и пройденный им путь зависят только от продолжительности свободного падения тела и от начальной скорости, а не от того, в какой конкретно момент времени тело начало падать.

3°. Механическая энергия замкнутой неконсервативной системы изменяется за счет работы, совершаемой всеми непотенциальными внутренними силами:

$$dW = \delta A_{\text{вп.}}$$

Гироскопические силы (1.3.1.7°) работы не совершают и вклада в $\delta A_{\text{вп.}}$ не дают, т. е. существование таких сил в системе не вызывает изменения ее механической энергии.

Действие диссипативных сил (1.3.1.7°), например сил трения, приводит к постепенному уменьшению механической энергии замкнутой системы. Этот процесс называется *диссипацией энергии*. Соответственно система, механическая энергия которой непрерывно уменьшается с течением времени, называется *диссипативной системой*. При диссипации энергии происходит преобразование механической энергии системы в другие виды энергии (например, в энергию беспорядочного движения молекул). Преобразование механической энергии осуществляется в полном соответствии со всеобщим законом природы — законом сохранения энергии (11.2.2.7°).

Согласно этому закону энергия может переходить из одной формы в другую и перераспределяться внутри системы, однако ее общее количество в замкнутой системе должно оставаться постоянным. Из закона сохранения и превращения энергии следует, что изменение энергии незамкнутой системы, происходящее при взаимодействии системы с внешней средой (внешними телами и полями), должно быть численно равно и противоположно по знаку изменению энергии внешней среды. Иными словами, изменение энергии системы при ее взаимодействии с внешней средой должно быть равно той энергии, которую система получает извне в рассматриваемом процессе.

4°. Во всех реальных механических системах действуют силы сопротивления и трения, вследствие чего все эти системы неконсервативны. Однако в некоторых случаях их можно приближенно считать консервативными и применять к ним закон сохранения механической энергии. Такой подход возможен, если в рассматриваемом процессе работа $A_{\text{вп.}}$ всех действующих на систему непотенциальных сил пренебрежимо мала по сравнению с механической энергией системы W , т. е.

$\left| \frac{A_{\text{вп.}}}{W} \right| \ll 1$, так что $\left| \frac{\Delta W}{W} \right| \ll 1$, где $\Delta W = A_{\text{вп.}}$ — изменение механической энергии системы.

5°. Состоянием *механического равновесия системы* называется такое состояние, из которого она может быть выведена только в результате внешнего силового воздействия. В этом состоянии все материальные точки системы находятся в покое, так что кинетическая энергия системы равна нулю. Состояние механического равновесия называется *устойчивым*, если малое внешнее воздействие на систему вызывает малое изменение ее состояния. При этом в системе возникают силы, стремящиеся вернуть систему в состояние равновесия. Состояние механического равновесия называется *неустойчивым*, если система при сколь угодно малом

внешнем воздействии выходит из этого состояния и больше не возвращается в него. При этом возникают силы, вызывающие дальнейшее отклонение системы от состояния равновесия.

Закон сохранения механической энергии позволяет указать условия равновесия консервативных систем: в состояниях устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимумы, а в состояниях неустойчивого равновесия — максимумы.

6°. На основе закона сохранения механической энергии можно выяснить, какова область возможных конфигураций консервативной системы (1.3.3.1°). Кинетическая энергия системы $W_k \geq 0$. Поэтому при заданном значении W механической энергии системы последняя может находиться только в таких состояниях, которые удовлетворяют условию: $W_n \leq W$. Рис. 1.3.5 соответствует

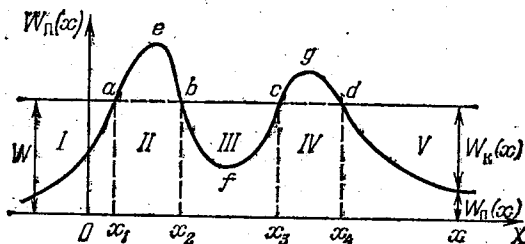


Рис. 1.3.5

простейшему случаю, когда материальная точка совершает одномерное движение вдоль оси Ox во внешнем стационарном потенциальном поле. Потенциальная энергия точки является функцией только одной координаты x , т. е. $W_n = W_n(x)$. График этой зависимости, показанный на рис. 1.3.5, называется *потенциальной кривой*. При фиксированном значении W механической энергии точки, показанном на рис. 1.3.5, точка может двигаться, оставаясь в одной из следующих трех областей: $x < x_1$ (область I), $x_2 < x < x_3$ (область III) и $x \geq x_4$ (область V). Они отделены друг от друга областями II и IV так называемых *потенциальных барьеров* aeb и sgd , в пределах которых материальная точка находиться не может. На границах потенциальных барьеров (в точках a, b, c и d) материальная точка изменяет направление своего движения на противоположное, причем в области I точка может неограниченно удаляться влево от границы a барьера, а в области V — вправо от границы d барьера. В области III материальная точка колеблется между точками b и c — она находится в так называемой *потенциальной яме* bfc .

§ 1.3.5. Абсолютно упругий и неупругий удары

1°. *Ударом* называется столкновение тел, при котором за весьма малый промежуток времени происходит значительное изменение скоростей тел. Например, молот ударяет по отковываемому изделию, лежащему на наковальне, молоток ударяет по шляпке забиваемого гвоздя и т. п.

Линией удара называется общая нормаль, проведенная к поверхностям двух соударяющихся тел в месте их соприкосновения при ударе. Удар называется

центральный, если в момент удара центры инерции сталкивающихся тел (1.2.3.3°) находятся на линии удара. Примером такого удара может служить удар двух шаров. Удар называется *прямым*, если скорости центров инерции сталкивающихся тел перед ударом направлены параллельно линии удара. В противном случае удар называется *косым*.

2°. При ударе тела деформируются, и в местах их соприкосновения возникают кратковременно действующие, но весьма значительные силы, называемые *ударными силами*. Для системы соударяющихся тел эти силы являются внутренними*), т. е. не изменяют суммарного импульса системы. Внешние силы, постоянно действующие на систему (например, силы тяжести тел), обычно очень малы по сравнению с ударными силами. Поэтому, хотя импульсы ударных сил (1.2.4.2°) за время τ продолжительности удара соизмеримы с импульсами сталкивающихся тел (1.2.3.4°), результирующий импульс всех постоянно действующих внешних сил за тот же промежуток времени τ мал по сравнению с импульсами тел. Соответственно и работа внешних сил над системой за время τ мала по сравнению с механической энергией системы. Таким образом, систему тел в процессе их соударения можно приближенно считать замкнутой системой (1.2.2.4°), а при расчете результатов удара пользоваться законами сохранения импульса (1.2.7.1°), момента импульса (1.4.4.1°) и энергии (II.2.2.7°). Если при ударе тела деформируются как вполне упругие, то ударные силы потенциальны и в системе выполняется закон сохранения механической энергии (1.3.4.2°).

3°. Удар двух тел называется *абсолютно неупругим*, если после удара оба тела движутся как одно целое. Достаточно близки к абсолютно неупругому удару, например, такие процессы, как удар молота копра по забиваемой им свае, попадание пули в тележку с песком, в котором пуля застревает. При неупругом ударе происходят различного рода процессы в соударяющихся телах (их пластические деформации, трение и др.), в результате которых кинетическая энергия системы частично преобразуется в ее внутреннюю энергию (II.2.1.2°).

Если два тела с массами m_1 и m_2 , движущиеся поступательно со скоростями v_1 и v_2 , претерпевают *абсолютно неупругий прямой центральный удар*, то после него они движутся также поступательно со скоростью

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Примечание. В случае произвольного абсолютно неупругого удара, не являющегося прямым центральным, эта формула позволяет найти скорость центра инерции соединившихся при ударе тел. Однако в результате такого удара может также возникнуть вращение системы вокруг ее центра инерции, согласующееся с законом сохранения момента импульса (1.4.4.1°).

4°. Изменение кинетической энергии системы двух сталкивающихся тел при абсолютно неупругом прямом центральном ударе

$$\Delta W_k = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 - \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_2}{2} v_2^2 = - \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 < 0.$$

*) Предполагается, что соударяющиеся тела либо свободны (1.2.2.3°), либо наложенные на них связи таковы, что ударные реакции связей не возникают.

В частности, если второе тело до удара покоится (например, свая, забиваемая при помощи копра, или поковка, лежащая на наковальне), то относительное уменьшение кинетической энергии системы при абсолютно неупругом прямом центральном ударе

$$-\frac{\Delta W_k}{W_{k1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругий прямой центральный удар используют в технике либо для изменения формы тел (ковка, штамповка, клепка и т. п.), либо для перемещения тел в среде с большим сопротивлением (забивание гвоздей, свай и т. п.). В первом случае целесообразно, чтобы отношение $-\Delta W_k/W_{k1}$ было возможно ближе к единице, т. е. необходимо, чтобы $m_2 \gg m_1$ (масса отковываемого изделия и наковальни должна во много раз превосходить массу молота). Во втором случае, наоборот, нужно, чтобы потери кинетической энергии при ударе были возможно меньшими, т. е. чтобы $m_1 \gg m_2$ (масса молотка должна во много раз превосходить массу забиваемого гвоздя).

5°. Удар двух тел называется *абсолютно упругим*, если при этом ударе механическая энергия системы не изменяется, т. е. тела являются абсолютно упругими.

Пример 1. *Абсолютно упругий прямой центральный удар* двух тел (например, шаров) с массами m_1 и m_2 , которые перед ударом движутся поступательно

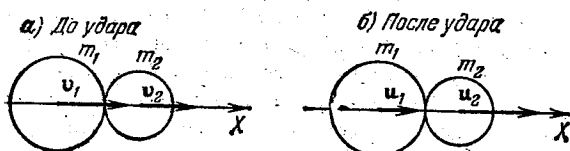


Рис. 1.3.6

со скоростями v_1 и v_2 вдоль проходящей через их центры инерции оси OX (рис. 1.3.6, а). Скорости тел после удара u_1 и u_2 (рис. 1.3.6, б) можно найти из законов сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Скорости u_1 и u_2 направлены вдоль оси OX , а их проекции на эту ось равны

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1) v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

В частности, если массы тел одинаковы, то при ударе тела обмениваются скоростями: $u_{1x} = v_{2x}$ и $u_{2x} = v_{1x}$.

Если масса второго тела во много раз больше массы первого тела, то $u_{1x} \approx 2v_{2x} - v_{1x}$ и $u_{2x} \approx v_{2x}$.

6°. **Пример 2.** *Абсолютно упругий косой центральный удар*. Если тела гладкие, то импульсом сил трения при ударе можно пренебречь. В таком случае не изменяются касательные составляющие скоростей тел, т. е. составляющие, перпендикулярные к линии удара: $u_{1\tau} = v_{1\tau}$ и $u_{2\tau} = v_{2\tau}$. Нормальные составляющие,

направленные вдоль линии удара, изменяются так же, как при прямом ударе:

$$u_{1n} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1n} + 2m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2n} = \frac{2m_1 v_{1n} + (m_2 - m_1) v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

В частности, при абсолютно упругом косом ударе гладкого шара о неподвижную плоскую стенку ($m_2 \gg m_1$, $u_2 = v_2 = 0$)

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{1n} = -v_{1n},$$

т. е. шар отскакивает от стенки по закону зеркального отражения: угол отражения равен углу падения. Численное значение скорости сохраняется: $u_1 = v_1$. Вектор изменения импульса шара Δp_1 при ударе направлен перпендикулярно к стенке:

$$\Delta p_1 = m_1 (u_1 - v_1) = -2m_1 v_{1n}.$$

Импульс ударной силы, действующей на стенку, равен $2m_1 v_{1n}$.

Г л а в а 1.4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1.4.1. Момент силы и момент импульса

1°. Для характеристики внешнего механического действия на тело, приводящего к изменению вращательного движения тела, вводят понятие момента силы. Различают момент силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.

Моментом силы F относительно неподвижной точки O (полюса) называется векторная величина M , равная векторному произведению радиуса-вектора r , проведенного из точки O в точку A приложения силы (рис. 1.4.1), на вектор силы F :

$$M = [rF].$$

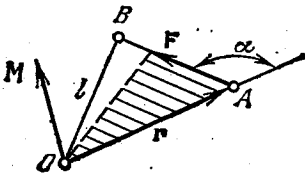


Рис. 1.4.1

Модуль момента силы $M = Fr \sin \alpha = Fl$, где α — угол между векторами r и F , а $l = r \sin \alpha$ — длина перпендикуляра OB (рис. 1.4.1), опущенного из точки O на линию действия силы. Величина l называется *плечом силы* относительно точки O . При переносе точки приложения силы F вдоль линии ее действия момент этой силы

M относительно одной и той же неподвижной точки O не изменяется. Если линия действия силы проходит через точку O , то момент силы относительно этой точки равен нулю.

2°. Главным моментом (резльтирующим моментом) системы сил относительно неподвижной точки O (полюса) называется вектор M , равный геометрической сумме моментов относительно точки O всех n сил системы:

$$M = \sum_{i=1}^n [r_i F_i],$$

где r_i — радиус-вектор, проведенный из полюса O в точку приложения силы F_i .

Из третьего закона Ньютона (1.2.5.1°) следует, что моменты относительно полюса O внутренних сил взаимодействия материальных точек системы попарно ком-

пенсируются: $[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ik}] = -[\mathbf{r}_k \mathbf{F}_{ki}]$. Следовательно, при вычислении главного момента сил нужно учитывать только внешние силы, действующие на рассматриваемую механическую систему.

3°. Моментом силы \mathbf{F} относительно неподвижной оси a называется скалярная величина M_a , равная проекции на эту ось вектора \mathbf{M} момента силы \mathbf{F} относительно произвольной точки O оси a . Значение момента M_a не зависит от выбора положения точки O на оси a .

Примечание. Иногда под моментом силы относительно неподвижной оси a понимают векторную величину $\mathbf{M}_a = M_a \mathbf{i}_a$, где \mathbf{i}_a — орт оси a . Вектор \mathbf{M}_a — составляющая вектора \mathbf{M} момента силы относительно полюса O , направленная вдоль оси a .

Если линия действия силы пересекает ось или параллельна ей, то момент силы относительно этой оси равен нулю.

Пусть A — точка приложения силы \mathbf{F} , а O_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на рассматриваемую ось OZ (рис. 1.4.2). Силу \mathbf{F} удобно разложить на три взаимно перпендикулярные составляющие: осевую F_z , параллельную оси, радиальную F_r , направленную вдоль вектора $\rho = \overrightarrow{O_1 A}$, и касательную F_τ , направленную перпендикулярно к оси и к вектору ρ . Момент силы \mathbf{F} относительно оси OZ

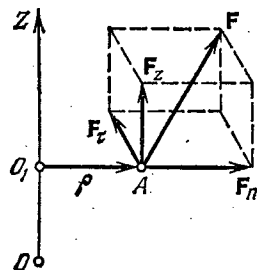


Рис. 1.4.2

$$M_z = [\rho \mathbf{F}_\tau]_z, \quad \mathbf{M}_z = [\rho \mathbf{F}_\tau].$$

Так как векторы ρ и \mathbf{F}_τ взаимно перпендикулярны, то

$$|\mathbf{M}_z| = |M_z| = \rho |\mathbf{F}_\tau|.$$

Главный момент (резльтирующий момент) относительно неподвижной оси a системы сил равен алгебраической сумме моментов относительно этой оси всех сил системы.

4°. Моментом импульса (моментом количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки O (полюса) называется вектор \mathbf{L} , равный векторному произведению радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного из полюса O в место нахождения материальной точки, на вектор \mathbf{p} ее импульса:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}m\mathbf{v}],$$

где m и \mathbf{v} — масса и скорость материальной точки.

Моментом импульса системы относительно неподвижной точки O называется геометрическая сумма \mathbf{L} моментов импульса относительно той же точки O всех материальных точек системы:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i],$$

где m_i , \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i — масса, радиус-вектор и скорость i -й материальной точки, а n — общее число этих точек в системе.

Моментом импульса системы относительно неподвижной оси a называется величина L_a , равная проекции на эту ось вектора \mathbf{L} момента импульса системы

относительно какой-либо точки O , принадлежащей этой оси:

$$L_a = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i]_a.$$

Выбор положения точки O на оси a не влияет на численное значение L_a .

Примечание. Иногда под моментом импульса системы относительно неподвижной оси a понимают векторную величину $L_a = L_a \mathbf{i}_a$, где \mathbf{i}_a — орт оси a .

5°. Момент импульса тела относительно неподвижной точки O , вокруг которой это тело вращается с угловой скоростью ω , равен:

$$\mathbf{L} = \int_{(m)} [\mathbf{r}\mathbf{v}] dm = \int_{(m)} [\mathbf{r}[\omega\mathbf{r}]] dm,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из точки O в малый элемент тела массой dm , а $\mathbf{v} = [\omega\mathbf{r}]$ — скорость этого элемента тела. Поскольку $[\mathbf{r}[\omega\mathbf{r}]] = r^2\omega - (\omega\mathbf{r})\mathbf{r}$, векторы \mathbf{L} и ω в общем случае не совпадают по направлению:

$$\mathbf{L} = \omega \int_{(m)} r^2 dm - \int_{(m)} (\omega\mathbf{r}) \mathbf{r} dm.$$

Момент импульса тела, закрепленного в точке O , и его угловая скорость совпадают по направлению, если тело вращается вокруг одной из его главных осей инерции в точке O (1.4.2.4°)

$$\mathbf{L} = J\omega,$$

где J — момент инерции тела (1.4.2.1°) относительно этой главной оси.

6°. Значения M и M^* главного момента системы сил относительно двух различных неподвижных точек O и O^* связаны соотношением:

$$M = M^* + [\mathbf{r}^*\mathbf{F}],$$

где \mathbf{r}^* — радиус-вектор, проведенный из начала O в точку O^* , а \mathbf{F} — главный вектор рассматриваемой системы сил. Если $\mathbf{F} = 0$, то главный момент системы сил одинаков по отношению к любой неподвижной точке: $M^* = M$. Именно таким свойством обладает пара сил, т. е. система из двух сил, которые численно равны друг другу и направлены вдоль параллельных прямых в противоположные стороны. Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом пары*. Момент пары сил направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат силы, а его модуль равен $M = Fd$, где F — модуль каждой из сил пары.

Главный момент M_C относительно центра инерции C механической системы (1.2.3.3°) всех действующих на нее сил связан с главным моментом M этой же системы сил относительно неподвижной точки O соотношением:

$$M = M_C + [\mathbf{r}_C\mathbf{F}],$$

где \mathbf{r}_C — радиус-вектор, проведенный из начала O в точку C , \mathbf{F} — главный вектор системы сил.

7°. Значения момента импульса механической системы относительно ее центра инерции C для абсолютного движения точек со скоростями \mathbf{v}_i (т. е. относительно неподвижной инерциальной системы отсчета) и для их относительного движения со скоростями $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C$ (т. е. относительно поступательно движущейся

системы отсчета с началом в точке C) одинаковы:

$$\sum_{i=1}^n [r'_i m_i v_i] = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i] = L_C,$$

где $r'_i = r_i - r_C$ — радиус-вектор i -й точки в системе отсчета, движущейся вместе с центром инерции.

Связь между значениями момента импульса механической системы L относительно неподвижной точки O и относительно центра инерции L_C имеет вид:

$$L = L_C + [r_C p],$$

где $p = \sum_{i=1}^n m_i v_i$ — импульс системы в ее абсолютном движении.

§ 1.4.2. Момент инерции

1°. Моментом инерции механической системы относительно неподвижной оси a называется физическая величина J_a , равная сумме произведений масс всех n материальных точек системы на квадраты их расстояний до оси:

$$J_a = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2,$$

где m_i и ρ_i — масса i -й точки и ее расстояние от оси.

Момент инерции тела

$$J_a = \int_{(m)} \rho^2 dm = \int_{(V)} \rho^2 D dV,$$

где $dm = D dV$ — масса малого элемента объема тела dV ; D — плотность, а ρ — расстояние от элемента dV до оси a .

Если тело однородно, т. е. его плотность всюду одинакова, то

$$J_a = D \int_{(V)} \rho^2 dV.$$

Момент инерции тела J_a является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг неподвижной оси a (1.4.3.4°), подобно тому как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

2°. Момент инерции данного тела относительно какой-либо оси зависит не только от массы, формы и размеров тела, но также от положения тела по отношению к этой оси. Согласно *теореме Штейнера (теореме о переносе осей инерции)* момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела J_C относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:

$$J = J_C + md^2.$$

3°. Моменты инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей (табл. 1.4.1).

Таблица I.4.1

Тело	Положение оси d	Момент инерции J_a
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R и массы m	Ось цилиндра	mR^2
Сплошной цилиндр (диск) радиуса R и массы m	Ось цилиндра	$\frac{1}{2} mR^2$
Шар радиуса R и массы m	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5} mR^2$
Тонкостенная сфера радиуса R и массы m	Ось проходит через центр сферы	$\frac{2}{3} mR^2$
Прямой тонкий стержень длины l и массы m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12} ml^2$
Тот же стержень	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3} ml^2$

4°. Центробежными моментами инерции тела по отношению к осям прямоугольной декартовой системы координат называются следующие величины:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy \, dm = \int_{(V)} xyD \, dV,$$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xz \, dm = \int_{(V)} xzD \, dV,$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} yz \, dm = \int_{(V)} yzD \, dV,$$

где x , y и z — координаты малого элемента тела объемом dV , плотностью D и массой dm .

Ось Ox называется *главной осью инерции тела*, если центробежные моменты инерции J_{xy} и J_{xz} одновременно равны нулю. Через каждую точку тела можно провести три главные оси инерции. Эти оси взаимно перпендикулярны друг другу. Моменты инерции тела относительно трех главных осей инерции, проведенных в произвольной точке O тела, называются *главными моментами инерции тела*.

Главные оси инерции, проходящие через центр инерции тела, называются *главными центральными осями инерции тела*, а моменты инерции тела относительно этих осей — его *главными центральными моментами инерции*. Ось симметрии однородного тела всегда является одной из его главных центральных осей инерции.

§ I.4.3. Основной закон динамики вращательного движения

1°. Из законов Ньютона следует, что первая производная по времени t от момента импульса L механической системы относительно любой неподвижной точки O равна главному моменту $M_{\text{внешн}}$ относительно той же точки O всех

внешних сил, приложенных к системе:

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{внешн.}}$$

Это уравнение выражает закон изменения момента импульса системы. Оно справедливо, в частности, для твердого тела, шарнирно закрепленного в точке O и вращающегося вокруг нее. В таком случае это уравнение выражает основной закон динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

В проекциях на оси неподвижной прямоугольной декартовой системы координат с началом в точке O закон изменения момента импульса системы записывается в виде:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{внешн.}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{внешн.}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внешн.}}$$

Здесь L_x, L_y, L_z и $M_x^{\text{внешн.}}, M_y^{\text{внешн.}}, M_z^{\text{внешн.}}$ — моменты импульса системы и главные моменты внешних сил относительно соответствующих осей координат.

2°. **Пример. Регулярная прецессия гироскопа** под действием его силы тяжести. Гироскопом (симметричным гироскопом) называется симметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, которая может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп имеет три степени свободы (1.1.5.6°), если он закреплен в одной неподвижной точке O , принадлежащей его оси и называемой центром подвеса гироскопа. Если центр подвеса совпадает с центром тяжести C гироскопа, то такой гироскоп называется *уравновешенным*, или *астатическим*, гироскопом: действие на [него] силы тяжести не вызывает изменения состояния его вращения. В противном случае гироскоп называется *тяжелым гироскопом* (рис. 1.4.3). Под действием момента силы тяжести относительно точки O

$$M^{\text{внешн.}} = [r_C mg]$$

тяжелый гироскоп поворачивается вокруг этой точки так, что его ось OZ' равномерно вращается вокруг вертикальной оси OZ , описывая коническую поверхность, показанную на рис. 1.4.3 пунктиром. Такое движение гироскопа называется *регулярной прецессией*. Если угловая скорость прецессии $\Omega \ll \omega$ (ω — угловая скорость собственного вращения гироскопа вокруг оси симметрии OZ'), то приближенно можно считать, что момент импульса гироскопа L относительно точки O направлен по оси гироскопа OZ' и равен:

$$L = J\omega,$$

где J — момент инерции гироскопа относительно оси OZ' . Поэтому

$$\frac{dL}{dt} = [r_C mg] = \left[\frac{r_C}{J\omega_{z'}} L mg \right] = [\Omega L],$$

где $\Omega = -\frac{m r_C}{J \omega_{z'}} g$ — угловая скорость прецессии, а $\omega_{z'} = \omega$ в случае, изображенном на рис. 1.4.3. Чем больше угловая скорость собственного вращения гироскопа, тем медленнее он прецессирует.

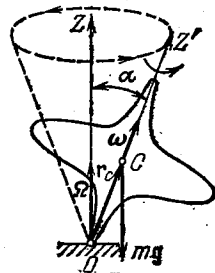


Рис. 1.4.3

3°. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с угловой скоростью ω :

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения (I.1.5.6°).

Элементарная работа, совершаемая за малый промежуток времени dt силой F , действующей на тело,

$$\delta A = M\omega dt = M d\varphi = M_\omega d\varphi,$$

где $M = [rF]$ — момент силы F относительно точки O (r — радиус-вектор, проведенный из O в точку приложения силы F), $d\varphi = \omega dt$ и $d\varphi = \omega dt$ — угол поворота и вектор элементарного поворота тела за время dt , а M_ω — момент силы F относительно мгновенной оси вращения тела, равный проекции вектора M на направление вектора ω .

Приращение кинетической энергии твердого тела за время dt равно работе внешних сил:

$$dW_k = M_\omega^{\text{внешн}} d\varphi,$$

где $M_\omega^{\text{внешн}}$ — главный момент внешних сил относительно мгновенной оси вращения тела (I.4.1.3°).

4°. Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OZ с угловой скоростью ω , то его момент импульса относительно этой оси

$$L_z = J_z \omega_z \quad \text{и} \quad L_z = J_z \omega.$$

Здесь J_z — момент инерции тела относительно оси OZ , не изменяющийся с течением времени ($J_z = \text{const}$), а $|\omega_z| = \omega > 0$ ($\omega_z = \omega$, если векторы ω и орт оси OZ совпадают по направлению, и $\omega_z = -\omega$ — в противном случае).

Основной закон динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ :

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\text{внешн}} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{J_z} M_z^{\text{внешн}},$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ — угловое ускорение тела.

Из последней формулы видно, что момент инерции твердого тела относительно какой-либо неподвижной оси является мерой инертности этого тела во вращении вокруг данной оси: чем больше момент инерции тела, тем меньшее угловое ускорение оно приобретает под действием одного и того же момента внешних сил.

5°. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ с угловой скоростью ω ,

$$W_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

Элементарная работа, совершаемая за малый промежуток времени dt силой F , приложенной к телу,

$$\delta A = M_z \omega dt = M_z d\varphi,$$

где M_z — момент силы F относительно оси вращения OZ (орт оси OZ совпадает по направлению с вектором ω).

Приращение кинетической энергии твердого тела за время dt равно работе внешних сил:

$$dW_k = M_z^{\text{внешн}} d\varphi.$$

где $M_2^{\text{внешн}}$ — главный момент внешних сил относительно оси вращения тела.

6°. Движение свободного твердого тела удовлетворяет следующим двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d}{dt} (mv_C) = F_{\text{внешн}} \quad \text{и} \quad \frac{dL_C}{dt} = M_C^{\text{внешн}}$$

Здесь m — масса тела, v_C — скорость его центра инерции C , $F_{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к телу (1.2.5.2°), $M_C^{\text{внешн}}$ — главный момент внешних сил относительно точки C (1.4.1.6°), а L_C — момент импульса тела относительно той же точки C (1.4.1.7°).

Первое уравнение описывает поступательное движение свободного тела со скоростью его центра инерции (1.2.5.3°). Второе уравнение вытекает из закона изменения момента импульса (1.4.3.1°) и описывает вращение твердого тела вокруг его центра инерции (1.1.5.9°).

7°. Кинетическая энергия свободного твердого тела может быть найдена на основе теоремы Кёнига (1.3.2.4°):

$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где J_C — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через его центр инерции C , ω — угловая скорость тела. В общем случае мгновенная ось перемещается в теле и момент инерции J_C изменяется с течением времени. Величина J_C остается постоянной, если движение тела является плоским (1.1.5.9°).

Пример. Кинетическая энергия однородного кругового цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без проскальзывания. Движение цилиндра — плоское: все его точки движутся в параллельных друг другу вертикальных плоскостях. Цилиндр движется поступательно со скоростью v_C , направленной вдоль наклонной плоскости, и вращается вокруг своей оси ($J_C = mR^2/2$, где m и R — масса и радиус цилиндра) с угловой скоростью ω . Из условия отсутствия проскальзывания следует, что мгновенные скорости точек касания цилиндра о наклонную плоскость равны нулю, т. е. $\omega = v_C/R$. Поэтому кинетическая энергия катящегося цилиндра

$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{3}{4} mv_C^2.$$

§ 1.4.4. Закон сохранения момента импульса

1°. *Закон сохранения момента импульса:* момент импульса замкнутой системы (1.2.2.4°) относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени; т. е.

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L = \text{const.}$$

Соответственно, момент импульса замкнутой системы относительно ее центра инерции (1.4.1.7°) не изменяется с течением времени:

$$\frac{dL_C}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_C = \text{const.}$$

Подобно законам сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса далеко выходит за рамки классической механики. Он принадлежит к числу самых фундаментальных физических законов, так как связан с определенным свойством симметрии пространства — его изотропностью. *Изотропность пространства* проявляется в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не зависят от выбора направления осей координат инерциальной системы отсчета, т. е. не изменяются при повороте в пространстве замкнутой системы как целого на любой угол.

Согласно современным представлениям моментом импульса могут обладать не только частицы и тела, но также и поля, причем элементарные частицы и построенные из них системы (например, атомные ядра) могут иметь момент импульса, не связанный с движением этих частиц в пространстве и называемый их *спином* (табл. VIII.2.2 и VIII.2.3).

2°. Применительно к системам, описываемым классической (ньютоновской) механикой, закон сохранения момента импульса можно рассматривать как следствие законов Ньютона. Для замкнутой механической системы главный момент внешних сил относительно любой неподвижной точки (а также относительно центра инерции системы) тождественно равен нулю: $M^{\text{внешн}} \equiv 0$ (соответственно $M_C^{\text{внешн}} \equiv 0$, см. (I.4.1.6°), где $F = F^{\text{внешн}} \equiv 0$), и из (I.4.3.1°) следует закон сохранения момента импульса:

$$L = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i] = \text{const},$$

где m_i , r_i и v_i — масса, радиус-вектор и скорость i -й материальной точки системы, состоящей из n таких точек.

Соответственно (см. I.4.1.7° и I.2.5.3°),

$$L_C = \sum_{i=1}^n [r_i' m_i v_i'] = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i] = \text{const},$$

где $r_i' = r_i - r_C$, $v_i' = v_i - v_C$, а r_C и v_C — радиус-вектор и скорость центра инерции системы.

3°. Если система не замкнутая, но действующие на нее внешние силы таковы, что их главный момент относительно неподвижной точки O тождественно равен нулю ($M^{\text{внешн}} \equiv 0$); то согласно законам Ньютона (I.4.3.1°) момент импульса системы относительно той же точки O не изменяется с течением времени: $L = \text{const}$. Этому условию практически удовлетворяет, например, уравновешенный гироскоп (I.4.3.2°) с тремя степенями свободы, момент сил трения в подвесе которого достаточно мал. При любых поворотах подставки такого гироскопа, удерживающей в покое его центр подвеса, ось гироскопа сохраняет свою ориентацию относительно неподвижной инерциальной системы отсчета *).

Обычно $M^{\text{внешн}} \neq 0$ и $L \neq \text{const}$. Однако, если главный момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси, проходящей через точку O , тождественно

*) Предполагается, что вектор L направлен по оси гироскопа. В противном случае свободный гироскоп совершает регулярную прецессию: его ось описывает круговую коническую поверхность, вершина которой находится в центре подвеса, а ось направлена вдоль вектора $L = \text{const}$.

венно равен нулю, то момент импульса системы относительно этой оси не изменяется с течением времени. Например, если $M_2^{\text{внешн}} \equiv 0$, то $L_z = \text{const}$.

В случае, когда система вращается вокруг неподвижной оси OZ , а главный момент внешних сил относительно этой оси $M_2^{\text{внешн}} \equiv 0$, момент импульса системы относительно оси вращения не изменяется с течением времени:

$$J_z \omega = \text{const},$$

где ω и J_z — угловая скорость и момент инерции системы.

Если под действием внутренних сил, а также внешних сил, удовлетворяющих условию $M_2^{\text{внешн}} \equiv 0$, система деформируется и ее момент инерции J_z изменяется, то соответственно возрастает или убывает угловая скорость ω .

4°. *Свободными осями тела* называются такие оси, вокруг которых свободное твердое тело (1.2.2.3°) может вращаться с постоянной угловой скоростью ω в отсутствие всяких внешних воздействий. Такое вращение тела называется *инерционным, или свободным, вращением*. Свободные оси тела совпадают с его главными центральными осями инерции (1.4.2.4°). В общем случае значения J_1 , J_2 и J_3 главных центральных моментов инерции тела (1.4.2.4°) различны. Свободное вращение такого тела (например, однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами различной длины) практически осуществляется только вокруг двух свободных осей, соответствующих экстремальным значениям главных центральных моментов инерции — наибольшему и наименьшему. Вращение тела вокруг его третьей главной центральной оси, соответствующей промежуточному значению момента инерции тела, неустойчиво: даже малые внешние воздействия способны вызвать значительные отклонения мгновенной оси вращения тела от ее первоначального направления в теле.

Если значения двух главных центральных моментов инерции тела одинаковы: $J_1 = J_2 \neq J_3$, то устойчивое свободное вращение такого тела (например, однородного кругового цилиндра) возможно только вокруг свободной оси, соответствующей отличному от них третьему значению момента инерции тела J_3 . Для однородного кругового цилиндра такой свободной осью является его ось симметрии. Однако, если длинный, тонкий цилиндр приводится во вращение с помощью нити, прикрепленной к его концу, то устойчивым оказывается вращение цилиндра вокруг свободной оси, соответствующей наибольшему значению его момента инерции. Эта свободная ось перпендикулярна к оси симметрии цилиндра.

Глава 1.5. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1.5.1. Постулаты специальной теории относительности

1°. *Специальная теория относительности* (ее часто называют также *частной теорией относительности*) представляет собой современную физическую теорию пространства и времени. Специальная теория относительности и квантовая механика (VI.1.1.1°) служат теоретической базой современной физики и техники (например, ядерной физики и техники). Специальную теорию относительности часто называют *релятивистской теорией*, а специфические явления, описываемые этой теорией, — *релятивистскими эффектами*. Как правило, релятивист-

ские эффекты проявляются при скоростях движения тел, близких по величине к скорости света в вакууме $c=3 \cdot 10^8$ м/с и называемых *релятивистскими скоростями*. *Релятивистской механикой* называется механика движений с релятивистскими скоростями, основанная на специальной теории относительности.

В специальной теории относительности так же, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно (I.3.4.2°), а пространство однородно (I.2.7.1°) и изотропно (I.4.4.1°).

2°. В основе специальной теории относительности лежат два основных принципа, принимаемых в качестве исходных постулатов.

Первый постулат является обобщением механического принципа относительности Галилея (I.2.8.4°) на любые физические процессы. Этот постулат, называемый *принципом относительности*, или *релятивистским принципом относительности Эйнштейна*, гласит: в любых инерциальных системах отсчета (I.2.1.2°) все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково. Иначе говоря, принцип относительности утверждает, что физические законы независимы (инвариантны) по отношению к выбору инерциальной системы отсчета: уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, на основе любых физических экспериментов, проведенных в замкнутой системе тел (I.2.2.4°), нельзя установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно (относительно какой-либо инерциальной системы отсчета). В физике все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Основываясь на физических экспериментах, нельзя выбрать из множества инерциальных систем отсчета какую-то главную («абсолютную») систему отсчета, обладающую какими-либо качественными отличиями от других инерциальных систем отсчета.

3°. *Второй постулат* выражает принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от движения источника света. Она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, являясь одной из важнейших физических постоянных. Опыты показывают, что скорость света в вакууме c — предельная скорость в природе. Скорость любых частиц и тел, а также скорость распространения любых взаимодействий и сигналов не может превосходить c .

Указанные специфические закономерности процесса распространения света в вакууме позволяют использовать этот реальный физический процесс для установления процедуры *хронометризации системы отсчета*, т. е. для синхронизации часов, расположенных в разных точках пространства и перемещающихся вместе с рассматриваемой системой отсчета (I.5.2.3°).

4°. Постулаты специальной теории относительности противоречат тем представлениям о свойствах пространства и времени, которые приняты в классической механике и отражены в преобразованиях Галилея (I.2.8.1°). В частности, это относится к считающемуся в механике Ньютона «само собой разумеющимся» утверждению об одинаковости хода времени во всех инерциальных системах отсчета и, следовательно, об абсолютности промежутка времени между какими-либо двумя событиями. Например, если два события происходят одновременно по часам в одной инерциальной системе отсчета, то они, согласно классическим представлениям, совершаются также одновременно по часам в любой другой инерциальной системе отсчета.

Указанное противоречие можно пояснить на следующем примере (рис. 1.5.1). Имеются две инерциальные системы отсчета — неподвижная система K и система K' , движущаяся вдоль оси OX с постоянной скоростью V . Пусть в момент начала отсчета времени в обеих системах K и K' ($t=t'=0$), когда их начала координат O и O' совпадают, в точке O производится мгновенная световая вспышка, к моменту времени $t > 0$ свет, распространяясь в вакууме со скоростью c , достигнет в системе отсчета K точек поверхности сферы с центром в точке O и радиусом, равным ct .

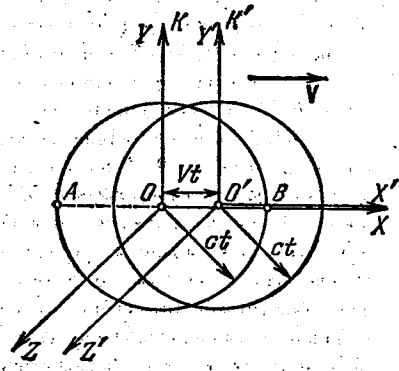


Рис. 1.5.1

В системе K' можно считать, что световая вспышка произошла в момент времени $t'=0$ в точке O' . Поэтому, согласно постулатам специальной теории относительности, к моменту времени $t'=t$ свет в системе K' достигнет точек сферы того же радиуса ct' , что и в системе K , но с центром в точке O' , находящейся в это время не в точке O , а на расстоянии Vt от нее. Таким образом, соединение постулатов специальной теории относительности и классических представлений об абсолютном времени, идущем одинаково во всех системах отсчета, приводит к абсурду — свет вспышки должен одновременно достигать точек пространства, принадлежащих двум разным сферам.

§ 1.5.2. Одновременность событий. Синхронизация часов

1°. При проведении различных физических измерений широко пользуются понятием одновременности двух или нескольких событий. Например, для определения длины l стержня, расположенного вдоль оси OX системы отсчета K и движущегося относительно этой системы, необходимо одновременно, т. е. в один и тот же момент времени t , зафиксировать значения $x_2(t)$ и $x_1(t)$ координат концов стержня:

$$l = |x_2(t) - x_1(t)|.$$

Определение момента времени совершения того или иного события (например, старта или посадки космического корабля) сводится к установлению показания часов, одновременно рассматриваемому событию. Это легко сделать с помощью часов, находящихся в том же месте, где происходит событие. Таким образом, в каждой системе отсчета должно быть множество часов, находящихся в различных точках пространства. Само собой разумеется, что все эти часы должны идти согласованно, синхронно — их показания в каждый момент времени t должны быть одинаковыми.

2°. Синхронность хода часов, находящихся рядом, т. е. в одном и том же месте пространства, можно проверить по совпадению их показаний в каждый произвольный момент времени. Синхронность хода часов, находящихся в удаленных друг от друга точках A и B , можно было бы проверить аналогичным обра-

вом, имея в своем распоряжении возможность посылать сигналы точного времени, распространяющиеся из A в B мгновенно. Однако опыт показывает, что такой способ неосуществим, так как скорость любого сигнала не может превосходить скорость света в вакууме.

Можно поступить следующим образом — перевезти часы из точки B в A , убедиться в синхронности их хода с часами, находящимися в точке A , а затем аккуратно перевезти часы обратно в точку B . Проверить, что привезенные в точку B часы продолжают идти одинаково быстро с часами, оставшимися в точке A , можно с помощью сигналов времени, отправляемых из A в B через определенные равные промежутки времени по часам в точке A . Однако таким способом нельзя установить, не произошел ли при перевозке часов сдвиг в начале отсчета времени по ним, т. е. не стали ли часы, привезенные в точку B , спешить или отставать от часов в точке A на постоянную величину Δt .

3°. Вопрос о синхронности хода часов, находящихся в разных точках A и B , можно решить только путем однозначного соглашения (определения) относительно того, когда эти часы следует считать синхронными. За основу такого определения Эйнштейн взял реальный физический процесс — распространение света в вакууме. При этом он исходил из того, что скорость света в вакууме, во-первых, является максимально возможной в природе скоростью передачи сигналов, а во-вторых, одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Пусть по часам в точке A световой сигнал отправляется из этой точки в момент времени t_1 и после отражения в точке B возвращается в A в момент времени t_2 . Тогда, по определению, часы в точке B идут синхронно с часами в точке A , если они идут одинаково быстро и в момент прихода светового сигнала в точку B установленные в ней часы показывают время $t_2 = (t_1 + t_3)/2$.

4°. В специальной теории относительности ход времени в разных инерциальных системах отсчета различен. Соответственно, промежуток времени между какими-либо двумя определенными событиями относителен: он изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В частности, относительна одновременность двух событий, происходящих в разных точках пространства. События, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, вовсе не одновременны в других инерциальных системах отсчета, движущихся относительно первой. В одних системах отсчета первое из этих двух событий происходит раньше второго, а в других — позже второго.

Так, в примере, показанном на рис. I.5.1 (см. I.5.1.4°), достижение светом вспышки точек A и B — события, одновременные в неподвижной системе отсчета K . В движущейся системе отсчета K' эти события не одновременны. В точку A , удаляющуюся от источника световой вспышки — точки O' , свет попадет позже, чем в точку B , приближающуюся к O' .

События, связанные причинно-следственной связью, не могут совершаться одновременно ни в одной системе отсчета, так как всякое следствие обусловлено каким-то процессом, вызываемым причиной. Между тем любой процесс (физический, химический, биологический) не может протекать мгновенно. Поэтому относительность ни в какой мере не противоречит причинности. В любой инерциальной системе отсчета событие — следствие всегда совершается позже, чем событие, являющееся его причиной.

§ 1.5.3. Преобразования Лоренца

1°. Из постулатов специальной теории относительности, а также из однородности и изотропности пространства (1.2.7.1°, 1.4.4.1°) и однородности времени (1.3.4.2°) следует, что соотношения между координатами и временем одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета выражаются *преобразованиями Лоренца*, а не преобразованиями Галилея (1.2.8.1°), как это считается в классической (ньютоновской) механике. Согласно принципу относительности и вышеуказанным свойствам симметрии пространства и времени преобразования Лоренца должны быть линейными.

2°. Преобразования Лоренца имеют простейший вид в том случае, когда сходственные оси декартовых координат неподвижной (K) и движущейся (K') инерциальных систем попарно параллельны, причем система K' движется относительно K с постоянной скоростью V вдоль оси OX (рис. 1.2.3, см. 1.2.8.1°). Если кроме того в качестве начала отсчета времени в обеих системах ($t=0$ и $t'=0$) выбран тот момент, когда начала координат O и O' обеих систем совпадают, то преобразования Лоренца имеют вид:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\y' &= y, & y &= y', \\z' &= z, & z &= z', \\t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.\end{aligned}$$

где c — скорость света в вакууме.

3°. Преобразования Лоренца показывают, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой изменяются не только пространственные координаты рассматриваемых событий, но и соответствующие им моменты времени. Однако между пространственными координатами x' , y' , z' события и временем t' его совершения в произвольной инерциальной системе отсчета K' существует определенная взаимосвязь, так что величина $[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2]$ не зависит от скорости V системы K' , т. е. одинакова во всех инерциальных системах отсчета:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Координата x' и время t' не могут быть мнимыми. Поэтому из преобразований Лоренца следует, что скорость относительного движения любых двух инерциальных систем отсчета не может превосходить скорость света в вакууме ($V < c$).

4°. Согласно принципу относительности Эйнштейна (1.5.1.2°), физические законы должны удовлетворять условию *релятивистской инвариантности (лоренц-инвариантности)*. Это требование означает, что уравнения, выражающие физические законы, должны сохранять свою форму при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, осуществляемом в соответствии с преобразованиями Лоренца.

Преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (1.2.8.1°) при $V \ll c$, или, точнее, в пределе при $V/c \rightarrow 0$, т. е. при $c \rightarrow \infty$. Иными словами,

преобразования Галилея и основанная на них классическая (ньютоновская) механика построены на предположении о мгновенном распространении взаимодействий. Такой приближенный подход допустим лишь при рассмотрении закономерностей механического движения тел со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме.

§ 1.5.4. Относительность длин и промежутков времени. Интервал между двумя событиями

1°. Из преобразований Лоренца (1.5.3.2°) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения. Это изменение продольного размера тела при его движении называется *лоренцевым сокращением*. Пусть l_0 — длина стержня, покоящегося в системе отсчета K' . Если стержень расположен вдоль оси $O'X'$ (рис. 1.5.2), то $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_2 и x'_1 — координаты концов стержня. Длина l того же стержня в системе отсчета K , относительно которой он движется вдоль оси OX со скоростью V , равна разности значений координат концов стержня, измеренных в один и тот же момент времени t :

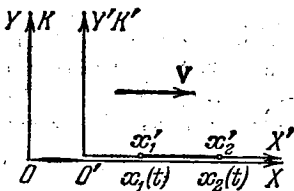


Рис. 1.5.2

$$l = x_2(t) - x_1(t) = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - V^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета:

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 \quad \text{и} \quad z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1.$$

Итак, линейные размеры тела относительны. Они максимальны в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится. Эти размеры тела называются его *собственными размерами*.

2°. Лоренцево сокращение является кинематическим эффектом специальной теории относительности. Оно не связано с действием на движущееся тело каких-либо продольных сил, сжимающих его вдоль направления движения. Это сокращение заметно сказывается только при скоростях движения, близких к скорости света в вакууме. Из формулы для лоренцева сокращения следует, что тела не могут двигаться со скоростями $V \geq c$, так как при $V = c$ продольный размер тела обращается в нуль, а при $V > c$ он должен был бы стать мнимым.

3°. Из преобразований Лоренца видно, что в теории относительности можно говорить об определенном «моменте времени» лишь применительно к какой-либо одной определенной инерциальной системе отсчета. Так, например, одному «моменту времени» в системе отсчета K (одному определенному значению времени t в этой системе) соответствует множество значений времени t' в системе отсчета K' в зависимости от значений координаты x :

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Наоборот, одному «моменту времени» в системе отсчета K' , т. е. одному определен-

ному значению времени t' , соответствует множество значений времени t в системе отсчета K в зависимости от значений координаты x' :

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

4°. Еще одно важное следствие преобразований Лоренца — относительность промежутка времени между какими-либо двумя событиями (например, между началом и концом какого-нибудь процесса), т. е. зависимость этого промежутка от выбора инерциальной системы отсчета. Пусть в движущейся инерциальной системе отсчета K' два рассматриваемых события 1 и 2 происходят в одной и той же неподвижной относительно K' точке A ($x'_2 = x'_1$) в моменты времени t'_1 и t'_2 , так что промежуток времени между этими событиями $\tau_0 = t'_2 - t'_1$.

Относительно неподвижной инерциальной системы отсчета K точка A движется с той же скоростью V , что и система K' . Поэтому в K события 1 и 2 совершаются в разных точках пространства с координатами x_1 и x_2 , причем $x_2 - x_1 = V\tau$, где $\tau = t_2 - t_1$ — промежуток времени между событиями 1 и 2 по часам в системе отсчета K . Из преобразований Лоренца следует, что

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Таким образом, промежуток времени между двумя событиями минимален в той инерциальной системе отсчета, относительно которой оба события совершаются в одной и той же точке. Время, измеряемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем* этого объекта.

5°. Закономерность, рассмотренная в п. 4°, свидетельствует о существовании релятивистского эффекта *замедления хода времени* в движущейся инерциальной системе отсчета по сравнению с неподвижной. Часы, движущиеся со скоростью V относительно данной инерциальной системы отсчета, идут медленнее в $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ раз, чем неподвижные. Соответственно, в согласии с принципом относительности, все физические процессы в движущейся системе отсчета протекают медленнее, чем в неподвижной.

Эффект замедления хода времени становится заметным только при очень больших скоростях движения V , близких к скорости света в вакууме. Он подтверждается экспериментально, например, в опытах с мюонами (VIII.2.3.3°). Мюон — нестабильная элементарная частица. Среднее собственное время жизни мюона (по часам в той инерциальной системе отсчета, относительно которой он покоится) $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Мюоны рождаются в верхних слоях атмосферы под действием первичных космических лучей и движутся относительно Земли со скоростями V , близкими к c . Если бы релятивистского эффекта замедления хода времени не было, то по отношению к земному наблюдателю мюон мог бы пройти за время своей жизни путь в атмосфере, не превосходящий, в среднем, $\tau_0 c = 660$ м. Иными словами, мюоны не могли бы достигать поверхности Земли. В действительности они регистрируются приборами, установленными на поверхности Земли, так как среднее время жизни движущегося мюона по часам земного наблюдателя $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - V^2/c^2} > \tau_0$ и путь, проходимый мюоном за это время, $\tau V > 660$ м.

6°. Релятивистский эффект замедления хода времени в космическом корабле, движущемся относительно Земли, открывает возможность осуществления сколь

угодно дальних космических полетов и путешествий «в будущее». Согласно принципу относительности, все процессы на космическом корабле, включая и процесс старения космонавтов, идут по тем же законам, что и на Земле. Однако при этом время на корабле нужно измерять по часам, движущимся вместе с ним со скоростью V относительно Земли. Если V близко к c , то часы на корабле идут значительно медленнее, чем земные (на космодроме) — в $1/\sqrt{1-V^2/c^2}$ раз. Например, при $\beta = V/c = 0,99999$ ход часов на корабле и на Земле различается в 224 раза. Следовательно, на таком корабле за промежуток времени $\tau_0 = 10$ лет по корабельным часам можно совершить, постарев всего лишь на 10 лет, космический полет, который по часам на Земле будет продолжаться $\tau = 2240$ лет! При этом корабль удалится от Земли на огромное расстояние $l = V\tau = \beta c\tau = 2239,98$ световых лет*). Чем ближе V к c , тем больший путь l может пройти корабль относительно Земли за один и тот же промежуток τ_0 собственного времени на корабле, т. е. тем более дальний космический перелет могут совершить космонавты за свою жизнь.

Если космонавт, совершив космический полет со скоростью V , близкой к c , возвратится на Землю, то он обнаружит, что люди на Земле (в частности, его брат-близнец, оставшийся на Земле) постарели за время полета больше, чем он. При достаточно малом отличии V от c , когда $(1 - V^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$, космонавт может за время полета пережить всех своих сверстников на Земле и оказаться по возвращении на Землю среди представителей последующих поколений людей.

7°. На первый взгляд, кажется, что, основываясь на принципе относительности, можно прийти к выводам, прямо противоположным, приведенным в п. 6°: часы на Земле, движущейся со скоростью $-V$ относительно космического корабля, должны отставать от часов на корабле. Поэтому длительность полета должна быть большей для космонавта, а не для жителей Земли. Соответственно, за время полета должен сильнее постареть тот из двух близнецов, который летел на корабле.

Таким образом, получается, что разность показаний часов на космодроме и на корабле после приземления последнего должна быть с одной стороны, положительной (см. п. 6°), а с другой — отрицательной. Этот абсурдный результат получил название *парадокса часов*, или *парадокса времени*. В действительности никакого парадокса часов нет. Он возник вследствие неправильного применения принципа относительности. Этот принцип говорит о полном равноправии не любых систем отсчета, а только и н е р ц и а л ь н ы х систем. Между тем, система отсчета, связанная с космическим кораблем, в отличие от земной, не все время является инерциальной, так как во время набора скорости при старте, облета цели и торможения при спуске на Землю корабль движется с ускорением. Поэтому задача о ходе часов на космодроме, которые все время покоятся относительно одной и той же инерциальной системы отсчета, и часов, находящихся на космическом корабле, принципиально несимметрична, а земная и корабельная системы отсчета — неравноправны в данной задаче. Правильны рассуждения, изложенные в п. 6°, поскольку они основаны на использовании инерциальной (земной) системы отсчета. Соответственно рассуждения в начале п. 7°, приведшие к парадоксу часов, — ошибочны. Во втором случае нужно пользоваться не специальной, а общей теорией от-

*) Световым годом называется расстояние, проходимое светом в вакууме за год: $1 \text{ св. год} = 9,4605 \cdot 10^{12} \text{ м}$.

носительности. При этом оказывается, что и с точки зрения космонавта его часы должны идти медленнее, чем часы на космодроме.

8°. *Интервалом*, или *пространственно-временным интервалом*, между двумя событиями, измеренным в инерциальной системе отсчета K' , называется величина

$$s'_{12} = \sqrt{c^2 (t'_{12})^2 - (l'_{12})^2},$$

где $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ — промежуток времени между рассматриваемыми событиями (по часам в системе отсчета K'), а $l'_{12} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$ — расстояние между точками, в которых совершаются события 1 и 2, измеренное также в системе отсчета K' .

Из преобразований Лоренца следует, что интервал между данными двумя событиями 1 и 2 инвариантен по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т. е. не изменяется при переходе от движущейся инерциальной системы отсчета K' к неподвижной системе K :

$$s'_{12} = s_{12} = \text{inv}, \text{ где } s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}.$$

Если $s_{12}^2 > 0$, т. е. s_{12} — действительное число, то интервал s_{12} называется *временноподобным интервалом*.

Интервал s_{12} называется *пространственноподобным интервалом*, если $s_{12}^2 < 0$, т. е. s_{12} — мнимое число.

9°. Из инвариантности интервала по отношению к выбору инерциальной системы отсчета K' следует, что во всех системах отсчета K' значения t'_{12} и l'_{12} для данных двух событий 1 и 2 удовлетворяют уравнению гиперболы:

$$c^2 (t'_{12})^2 - (l'_{12})^2 = s_{12}^2.$$

Если $s_{12}^2 > 0$, то связь между t'_{12} и l'_{12} в различных инерциальных системах отсчета K' , движущихся относительно неподвижной системы отсчета K со всевозможными скоростями ($0 \leq V < c$), изображается графически в виде двух ветвей гиперболы I и II (рис. 1.5.3). Следовательно, знак промежутка времени между событиями 1 и 2, связанными времениподобным интервалом, абсолютен. Он не зависит от выбора инерциальной системы отсчета: во всех системах отсчета K' второе событие происходит либо всегда позже первого, т. е. $t'_{12} > 0$ (ветвь I), либо всегда раньше первого, т. е. $t'_{12} < 0$ (ветвь II). Расстояние l'_{12} относительно, причем можно указать такую инерциальную систему отсчета K'_s , в которой $l'_{12} = 0$, т. е. события 1 и 2 совершаются в одном и том же месте (точки A и B на ветвях гиперболы I и II).

Двум событиям, связанным причинно-следственной связью, всегда должен соответствовать времениподобный интервал или, в крайнем случае, интервал, равный нулю ($s_{12} = 0$). Это обусловлено тем, что сигнал, посредством которого событие 1 (причина) вызывает появление события 2 (следствие), не может распространяться в пространстве со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме: $l'_{12} \leq c (t'_2 - t'_1)$.

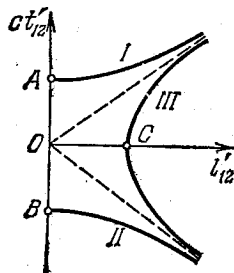


Рис. 1.5.3

10°. В случае событий, связанных пространственноподобным интервалом ($s_{12}^2 < 0$), знак t'_{12} относителен: $t'_{12} > 0$ (верхняя часть гиперболы III на рис. 1.5.3) в одних инерциальных системах отсчета K' , а в других $t'_{12} < 0$ (нижняя часть гиперболы III). Точка C соответствует системе отсчета K' , в которой $t'_{12} = 0$, т. е. события 1 и 2 происходят одновременно,

§ 1.5.5. Преобразование скоростей и ускорений в релятивистской кинематике

1°. Значения \mathbf{v} и \mathbf{v}' скорости материальной точки в двух инерциальных системах отсчета K и K' равны:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}',$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$ — радиусы-векторы рассматриваемой точки в системах отсчета K и K' . Проекции скоростей \mathbf{v} и \mathbf{v}' на оси декартовых координат равны:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad \text{и} \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

Если сходственные оси декартовых координат систем отсчета K' и K попарно параллельны и система K' движется относительно K с постоянной скоростью \mathbf{V} , направленной вдоль оси OX (рис. 1.2.3, см. 1.2.8.1°), причем в момент начала отсчета времени в K и K' ($t=0$ и $t'=0$) начала координат O и O' этих систем отсчета совпадают, то справедливы преобразования Лоренца в форме 1.5.3.2°. Из этих преобразований следует, что связь между проекциями скоростей точки на оси декартовых координат в системах K и K' имеет вид:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}, & v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \\ v'_y &= \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}, & v_y &= \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}, \\ v'_z &= \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}, & v_z &= \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}. \end{aligned}$$

Эти формулы выражают закон сложения скоростей в релятивистской кинематике. В пределе при $c \rightarrow \infty$ они приводят к обычному закону сложения скоростей в классической механике (1.2.8.2°):

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \quad \text{и} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

2°. Связь между квадратами модулей векторов \mathbf{v} и \mathbf{v}'

$$v^2 = c^2 \left[1 - \frac{(1 - (v'/c)^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 + Vv'_x/c^2)^2} \right] \quad \text{и} \quad (v')^2 = c^2 \left[1 - \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - Vv_x/c^2)^2} \right].$$

В частности, если $v' = c$, то $v = c$ и наоборот. Итак, если скорость частицы относительно какой-либо инерциальной системы отсчета равна скорости света в вакууме, то она должна быть такой же по величине относительно любой другой инерциальной системы отсчета независимо от скорости относительного движения

этих систем отсчета. Иначе говоря, сумма двух скоростей, из которых одна равна c , всегда равна c . В этой закономерности, обнаруживающейся при движении таких элементарных частиц, как фотоны (V.6.1.4°) и нейтрино (табл. VIII.2.2), проявляется предельный характер скорости света в вакууме (I.5.1.3°).

3°. Из соотношений п. 2° видно, что частица, движущаяся относительно какой-нибудь инерциальной системы отсчета со скоростью, меньшей c , имеет скорость относительно любой другой инерциальной системы отсчета тоже меньшую c (например, если $v < c$, то $v' < c$, и наоборот). Отсюда, в частности, следует, что как бы ни были близки к c скорости двух частиц, их относительная скорость всегда меньше c . Например, пусть две частицы движутся вдоль оси OX системы отсчета K навстречу друг другу со скоростями, соответственно равными: $v_1 = 0,8c$ и $v_2 = -0,8c$. Скорость u_{21} второй частицы относительно первой не равна, как это считается в классической механике, геометрической разности $v_2 - v_1 = -1,6c$, хотя бы потому, что модуль этой скорости превосходит c . Искомая скорость равна скорости второй частицы относительно инерциальной системы отсчета K' , движущейся вместе с первой частицей ($V = 0,8c$), т. е. $u_{21} = v'_2$.

Из формул п. 1° следует, что

$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{Vv_{2x}}{c^2}} = -\frac{1,6c}{1 + 0,64} = -0,976c, \quad v'_{2y} = v'_{2z} = 0,$$

т. е. $u_{21} = -0,976c$ и $|u_{21}| < c$.

4°. Проекции ускорения материальной точки на оси декартовых координат двух инерциальных систем отсчета K и K' (п. 1°) связаны между собой следующими соотношениями:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = a_x \left(\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \right)^3,$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right) a_y + \frac{Vv_y}{c^2} a_x \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)^3},$$

$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right) a_z + \frac{Vv_z}{c^2} a_x \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)^3},$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a'_x \left(\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \right)^3,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left[\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) a'_y - \frac{Vv'_y}{c^2} a'_x \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)^3},$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left[\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) a'_z - \frac{Vv'_z}{c^2} a'_x \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)^3}.$$

§ 1.5.6. Основной закон релятивистской динамики

1°. В релятивистской механике, в отличие от классической, масса материальной точки не постоянна, а зависит от скорости v этой точки. Ее значение m различно в двух движущихся друг относительно друга инерциальных системах отсчета. *Зависимость массы от скорости* выражается формулой:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — масса покоя частицы (материальной точки), т. е. ее масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое, c — скорость света в вакууме. Массу m часто называют *релятивистской массой*.

Влияние скорости частицы на величину ее массы становится существенным только при значениях v , близких к c . Например, $\frac{m}{m_0} = 1,005$ при $\frac{v}{c} = 0,1$ и $\frac{m}{m_0} = 2,29$ при $\frac{v}{c} = 0,9$. Из закона зависимости m от v видно, что частицы с массой покоя $m_0 \neq 0$ не могут двигаться со скоростями, большими или равными c ($v < c$). В то же время частицы, масса покоя которых равна нулю [фотоны (V.6.1.4°) и нейтрино (табл. VIII.2.2)], не могут иметь скорость, отличную от c .

2°. Импульс материальной точки $p = mv$ является нелинейной функцией ее скорости:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Вектор p иногда называют *релятивистским импульсом* материальной точки (в отличие от значения $m_0 v$ ее импульса в классической механике). Очевидно, что при $v \ll c$ импульс $p = mv \approx m_0 v$.

В силу однородности пространства (I.2.7.1°) в релятивистской механике справедлив *закон сохранения релятивистского импульса*: импульс замкнутой системы (I.2.2.4°) не изменяется с течением времени.

Из этого закона следует *закон сохранения релятивистской массы*: при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, ее полная релятивистская масса не изменяется.

3°. *Основной закон релятивистской динамики*: скорость изменения импульса материальной точки равна силе F , действующей на эту точку, т. е.

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F.$$

Примечание. Если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то под силой F нужно понимать равнодействующую силу (I.2.2.2°).

4°. Элементарная работа силы F на малом перемещении dr точки ее приложения

$$\delta A = (F dr) = (Fv) dt.$$

Из основного закона релятивистской динамики (п. 3°) и формулы зависимости массы от скорости (п. 1°) следует, что

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dm}{dt} = \frac{mv}{c^2 - v^2} \frac{dv}{dt}.$$

Поэтому

$$\delta A = (\mathbf{Fv}) dt = m(v dv) + v^2 dm = mv dv + v^2 dm = c^2 dm.$$

5°. Ускорение, сообщаемое материальной точке силой \mathbf{F} ,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{\mathbf{v}}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{m} \left[\mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{Fv}) \right].$$

Следовательно, в отличие от классической механики, в релятивистской механике ускорение материальной точки, вообще говоря, не совпадает по направлению с силой, вызывающей это ускорение. Вектор \mathbf{a} коллинеарен силе \mathbf{F} только в двух случаях:

а) сила \mathbf{F} направлена перпендикулярно к скорости \mathbf{v} точки (поперечная сила), так что $(\mathbf{Fv})=0$ и

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

б) сила \mathbf{F} направлена параллельно вектору \mathbf{v} скорости точки (продольная сила), так что $\mathbf{v}(\mathbf{Fv})=v^2\mathbf{F}$ и

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\mathbf{F}}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}.$$

Продольная сила сообщает материальной точке ускорение в $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ раз меньшее, чем такая же по величине поперечная сила. Это связано с тем, что поперечная сила вызывает изменение скорости точки только по направлению (модуль v скорости и релятивистская масса точки не изменяются), а продольная сила вызывает изменение значения модуля скорости точки и ее массы.

§ 1.5.7. Закон взаимосвязи массы и энергии

1°. Приращение кинетической энергии W_k материальной точки равно работе, совершаемой действующей на эту точку силой \mathbf{F} (1.5.6.4°):

$$dW_k = \delta A = c^2 dm,$$

где dm — соответствующее приращение релятивистской массы материальной точки. Отсюда следует, что

$$W_k = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right],$$

где m_0 — масса покоя точки. Разлагая $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ в ряд Маклорена, получаем:

$$W_k = m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \dots \right].$$

При $v \ll c$ эта формула приводит к обычному выражению кинетической энергии в классической механике:

$$W_k = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

2°. Из первой формулы п. 1° следует, что увеличение кинетической энергии тела должно сопровождаться соответствующим увеличением его релятивистской массы m :

$$dm = \frac{1}{c^2} dW_k.$$

Изменение других видов энергии тела также связано с увеличением его массы. Например, если при нагревании покоящегося тела его внутренняя энергия (11.2.1.2°) увеличивается на dU , то масса m этого тела, равная его массе покоя m_0 , увеличивается на

$$dm = dm_0 = \frac{1}{c^2} dU.$$

В общем случае изменение полной энергии W тела на dW сопровождается изменением его релятивистской массы m на величину

$$dm = \frac{1}{c^2} dW.$$

Соответственно, между W и m существует универсальное соотношение:

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

которое выражает *закон взаимосвязи массы и энергии*: полная энергия тела (или системы) равна произведению релятивистской массы этого тела (или системы) на квадрат скорости света в вакууме.

В силу однородности времени (1.3.4.2°) в релятивистской механике, как и в классической, выполняется *закон сохранения энергии*: полная энергия замкнутой системы (1.2.2.4°) не изменяется с течением времени.

Из закона взаимосвязи массы и энергии следует, что законы сохранения релятивистской массы (1.5.6.2°) и полной энергии не являются независимыми законами.

3°. Полная энергия покоящейся частицы или системы частиц (например, атомного ядра, атома, молекулы, тела), равная

$$W_0 = m_0 c^2,$$

где m_0 — масса покоя, называется *энергией покоя* частицы или системы. Значения m_0 и W_0 не зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Для бесструктурной (элементарной) частицы они являются неизменными ее характеристиками, подобно, например, электрическому заряду и спину частицы (табл. VIII.2.2). Масса и энергия покоя системы частиц зависят от состава системы и от ее внутреннего состояния. Например, масса покоя «возбужденного» ядра (или атома) больше, чем масса покоя того же ядра (или атома) в нормальном состоянии.

4°. Полная энергия частицы W и ее импульс p связаны соотношениями:

$$p = \frac{W}{c^2} v \quad \text{и} \quad \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2, \quad \text{или} \quad W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Значения полной энергии, релятивистской массы и импульса данной частицы, в отличие от ее массы покоя m_0 , относительны, т. е. различны в двух инерциальных системах отсчета K (W , m и p) и K' (W' , m' и p'). Однако разность квадрата полной энергии частицы, деленной на c^2 , и квадрата импульса этой частицы, подобно интервалу между двумя событиями (1.5.4.8°), не зависит от выбора инерциальной системы отсчета:

$$\frac{(W')^2}{c^2} - (p')^2 = \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2.$$

5°. При переходе от одной инерциальной системы отсчета K к другой K' , движущейся со скоростью $V = \text{const}$ вдоль оси OX (рис. 1.2.3, см. 1.2.8.1°), проекции импульса частицы на оси координат и ее полная энергия преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} p'_{x'} &= \frac{p_x - VW/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & p_x &= \frac{p'_{x'} + VW'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ p'_{y'} &= p_y, & p_y &= p'_{y'}, \\ p'_{z'} &= p_z, & p_z &= p'_{z'}, \\ W' &= \frac{W - Vp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & W &= \frac{W' + Vp'_{x'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned}$$

6°. Из закона сохранения релятивистской массы (1.5.6.2°) и полной энергии (п. 2°) вовсе не следует, что масса и энергия покоя замкнутой системы не могут изменяться. Например, сумма масс покоя свободных протонов и нейтронов всегда больше, чем масса покоя образованного из них атомного ядра.

Для характеристики систем, обладающих запасом прочности (например, атомных ядер, атомов, молекул и т. п.), вводится понятие энергии связи. Энергия связи системы измеряется той наименьшей работой, которую нужно совершить, чтобы разложить систему на ее составные части (например, атом — на ядро и электроны). Энергия связи системы

$$W_{\text{св}} = \sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 - M_0c^2,$$

где M_0 — масса покоя системы, состоящей из n частиц, а m_{0i} — масса покоя i -й частицы в свободном состоянии. Величину

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_{0i} - M_0 = \frac{W_{\text{св}}}{c^2}$$

иногда называют *дефектом массы системы*.

Г л а в а 1.6. ТЯГОТЕНИЕ

§ 1.6.1. Закон всемирного тяготения

1°. Закон всемирного тяготения И. Ньютона гласит: между всякими двумя материальными точками действуют силы взаимного притяжения, которые прямо пропорциональны массам точек и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. Эти силы называются *силами тяготения*, или *гравитационными силами*. Если m_1 и m_2 — массы рассматриваемых материальных точек, а \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиусы-векторы этих точек, то по закону всемирного тяготения на 1-ю точку со стороны 2-й действует сила \mathbf{F}_{12} , а на 2-ю со стороны 1-й — сила \mathbf{F}_{21} , которые равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21}.$$

Здесь $r_{12} = r_1 - r_2$ и $r_{21} = r_2 - r_1$ — радиусы-векторы, проведенные соответственно из 2-й точки в 1-ю и из 1-й во 2-ю, а $r_{12} = r_{21} = |r_{12}| = |r_{21}|$ — расстояние между этими точками. Коэффициент пропорциональности γ называется *гравитационной постоянной*. Гравитационная постоянная численно равна силе взаимного тяготения двух материальных точек единичной массы, находящихся на единичном расстоянии одна от другой. Из опытов найдено, что

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0041) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2.$$

2°. Гравитационное взаимодействие двух тел произвольных размеров и формы (рис. I.6.1) описывается формулой:

$$F_{12} = -\gamma \int_{(V_1)} \rho_1 dV_1 \int_{(V_2)} \frac{\rho_2}{r_{12}^3} r_{12} dV_2,$$

где r_{12} — радиус-вектор, проведенный из малого элемента dV_2 объема второго тела в малый элемент dV_1 объема первого тела, ρ_1 и ρ_2 — плотности указанных элементов тел, а интегрирование проводится по всему объему обоих тел.

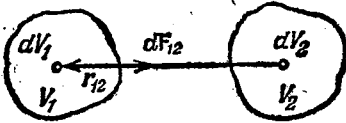


Рис. I.6.1

Расчет силы F_{12} значительно упрощается в следующих двух случаях:

а) распределение масс во взаимодействующих телах сферически симметрично, т. е. оба тела имеют шарообразную форму, а

плотность каждого из них зависит только от расстояния до его центра (в частности, тела могут быть однородными);

б) одно из тел имеет ничтожно малые размеры по сравнению со вторым, распределение масс в котором сферически симметрично.

В указанных случаях

$$F_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} r_{12},$$

где m_1 и m_2 — массы тел, а r_{12} — радиус-вектор, соединяющий центры инерции (I.2.3.3°) второго и первого тел.

3°. В первом приближении можно считать, что Земля имеет форму шара, масса которого распределена сферически симметрично. Поэтому сила F тяготения к Земле тела массы m направлена к центру Земли, а ее модуль

$$F = \gamma \frac{mM^3}{r^2},$$

где M_3 — масса Земли, а r — расстояние от тела до центра Земли (размеры любого тела на Земле ничтожно малы по сравнению с радиусом Земного шара).

4°. Применительно к таким микробиъектам, как элементарные частицы, гравитационное взаимодействие не играет практически никакой роли, так как оно оказывается сверхслабым по сравнению со всеми другими типами взаимодействий — сильным, электромагнитным и слабым (VIII.2.2.6°—8°). Например, электрическая сила взаимного отталкивания двух электронов превосходит силу их тяготения более, чем в 10^{42} раз! Однако даже для обычных макроскопических объектов на Земле силы гравитационного взаимодействия крайне малы. Так, два

однородных шара массой по 1000 кг каждый, центры которых удалены на 1 м друг от друга, притягиваются с силой, равной всего лишь $7 \cdot 10^{-5}$ Н.

В то же время гравитационные силы являются определяющими в движении объектов, исследуемых в астрономии и космонавтике (космических кораблей, планет и их спутников, планетных систем, звезд и т. д.). Это связано, во-первых, с огромной величиной астрономических тел и, во-вторых, с малостью сил электромагнитного взаимодействия рассматриваемых тел, являющихся, в целом, практически электронеутральными.

§ 1.6.2. Гравитационное поле

1°. Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством создаваемого ими *гравитационного поля*, называемого также *полем тяготения*. Отличительная особенность гравитационного поля состоит в том, что на помещенную в него материальную точку действует сила, пропорциональная массе этой точки.

Силовой характеристикой гравитационного поля служит его *напряженность* — векторная величина \mathbf{G} , равная отношению силы \mathbf{F} , действующей со стороны поля на помещенную в него материальную точку, к массе m этой точки

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Напряженность гравитационного поля не зависит от массы m материальной точки. Она является функцией координат (x, y, z) точек рассматриваемого поля. В случае нестационарного поля напряженность зависит также от времени t .

Гравитационное поле стационарно (1.2.2.1°), если создающие его тела неподвижны относительно системы отсчета, выбранной для описания поля. Напряженность стационарного гравитационного поля зависит только от координат: $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z)$.

Из второго закона Ньютона (1.2.4.3°) следует, что под действием сил гравитационного поля свободная материальная точка приобретает ускорение \mathbf{a} , равное напряженности этого поля,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{G}.$$

2°. Из закона всемирного тяготения (1.6.1.1°) следует, что напряженность гравитационного поля неподвижной материальной точки массы M , находящейся в начале координат, равна:

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор рассматриваемой точки поля.

Это поле потенциально (1.3.1.6°), так как сила, действующая на внесенную в него материальную точку массы m , — центральная сила (1.3.3.4°):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Соответственно, потенциальная энергия материальной точки в таком поле равна (I.3.3.4° *):

$$W_{\Pi} = \int_r^{\infty} F_r dr = -\gamma mM \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Величину W_{Π} можно с равным правом рассматривать как потенциальную энергию материальной точки массы M в гравитационном поле, создаваемом материальной точкой массы m , или, наконец, как *взаимную потенциальную энергию двух материальных точек*, обусловленную их гравитационным взаимодействием.

3°. Гравитационные поля удовлетворяют *принципу суперпозиции полей*: при наложении нескольких (n) гравитационных полей их напряженности в каждой точке пространства складываются геометрически, т. е. напряженность результирующего поля

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i,$$

где \mathbf{G}_i — напряженность одного i -го поля в рассматриваемой точке пространства.

Напряженность гравитационного поля произвольной системы, состоящей из n неподвижных материальных точек,

$$\mathbf{G} = -\gamma \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i^3} \rho_i,$$

где $\rho_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из i -й материальной точки, радиус-вектор которой равен \mathbf{r}_i , в рассматриваемую точку поля, определяемую радиусом-вектором \mathbf{r} . Соответственно, потенциальная энергия материальной точки массы m в этом гравитационном поле

$$W_{\Pi} = -\gamma m \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i}.$$

В частности, если гравитационное поле создано телом, масса M которого распределена сферически симметрично (I.6.1.2°), то вне этого тела

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad W_{\Pi} = -\gamma \frac{mM}{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра тела в рассматриваемую точку поля. Эти формулы справедливы, например, для гравитационного поля Земли.

4°. В силу потенциальности гравитационного поля (I.3.1.6°) можно ввести его энергетическую характеристику — потенциал. *Потенциалом гравитационного поля* называется скалярная величина φ , равная отношению потенциальной энергии W_{Π} материальной точки, помещенной в рассматриваемую точку поля, к массе m материальной точки:

$$\varphi = \frac{W_{\Pi}}{m}.$$

*) Здесь и всюду в §§ I.6.2 и I.6.3 за начало отсчета потенциальной энергии выбирается бесконечно удаленная точка, т. е. считается, что $W_{\Pi}(\infty) = 0$.

Потенциал φ не зависит от массы m материальной точки, а является функцией координат точек гравитационного поля. Например, потенциал гравитационного поля, создаваемого неподвижной материальной точкой массы M ,

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r},$$

где r — расстояние от источника поля до рассматриваемой точки.

Потенциал гравитационного поля, создаваемого произвольной системой из n неподвижных материальных точек,

$$\varphi = -\sum_{i=1}^n \gamma \frac{m_i}{\rho_i},$$

где ρ_i — расстояние от материальной точки с массой m_i до рассматриваемой точки поля. Таким образом, при наложении гравитационных полей их потенциалы складываются алгебраически, т. е. потенциал φ в любой точке результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов в той же точке для всех накладывающихся полей порознь:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Примечание. При пользовании этой формулой необходимо, чтобы начала отсчетов потенциалов φ_i всех накладывающихся полей были выбраны одинаково: $\varphi_i(\infty) = 0$ (см. сноску к п. 2°).

5°. Элементарная работа, совершаемая силами гравитационного поля при малом перемещении $d\mathbf{r}$ материальной точки массы m в этом поле,

$$\delta A = (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = m (\mathbf{G} d\mathbf{r}).$$

С другой стороны, эта работа δA равна убыли потенциальной энергии материальной точки в гравитационном поле:

$$\delta A = -dW_{\text{п}} = -m d\varphi.$$

Следовательно, потенциал и напряженность гравитационного поля связаны соотношением:

$$d\varphi = -(\mathbf{G} d\mathbf{r}) = -(G_x dx + G_y dy + G_z dz),$$

где G_x , G_y и G_z — проекции вектора \mathbf{G} на оси прямоугольных декартовых координат. Поскольку

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz,$$

то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -G_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -G_y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -G_z$$

и

$$\mathbf{G} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\text{grad } \varphi,$$

т. е. напряженность гравитационного поля численно равна и противоположна по направлению градиенту потенциала этого поля.

Связь между Φ и G можно представить также в виде:

$$d\Phi = -G dl \cos \alpha = -G_l dl \quad \text{или} \quad G_l = -\frac{d\Phi}{dl},$$

где α — угол между векторами G и dr , $dl = |dr|$, а G_l — проекция вектора G на направление вектора dr . Таким образом, проекция вектора напряженности гравитационного поля на какое-либо направление численно равна и противоположна по знаку изменению потенциала поля на единицу длины в том же направлении.

6°. Рассмотренная выше нерелятивистская теория тяготения, основанная на законе всемирного тяготения Ньютона, является приближенной. Она достаточно точно описывает только сравнительно слабые гравитационные поля, потенциалы которых $|\Phi| \ll c^2$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. В частности, она пригодна для гравитационных полей Земли и Солнца, так как абсолютные значения потенциалов этих полей у поверхностей, соответственно, Земли и Солнца равны $6,3 \cdot 10^7$ м²/с² и $1,9 \cdot 10^{11}$ м²/с².

7°. Современная (релятивистская) теория тяготения, представляющая единую теорию пространства, времени и тяготения, была сформулирована А. Эйнштейном и названа им *общей теорией относительности*. Еще в специальной теории относительности было показано существование тесной взаимосвязи между пространством и временем. Эта взаимосвязь нашла отражение в преобразованиях Лоренца (I.5.3.2°) и в инвариантности интервала между двумя событиями (I.5.4.8°). Оказалось, что для описания физических процессов необходимо использовать четырехмерное пространство — время, положение точки в котором определяется тремя пространственными координатами и временной координатой *ict*.¹

Согласно релятивистской теории тяготения геометрические свойства (метрика) пространства — времени зависят от распределения в пространстве тяготеющих масс и их движения. Тела, создающие гравитационное поле, «искривляют» реальное трехмерное пространство и по-разному изменяют ход времени в различных его точках, т. е. вызывают отклонение его метрики от метрики «плоского» пространства — времени, описываемого геометрией Евклида и рассматриваемого в специальной теории относительности. Поэтому движение тела в поле тяготения оказалось возможным рассматривать как движение по инерции, но в «искривленном» (неевклидовом) пространстве — времени. Соответственно материальная точка, на которую действует гравитационное поле, движется в реальном трехмерном пространстве неравномерно и непрямолинейно.

В релятивистской теории тяготения было показано, что для произвольных гравитационных полей принцип суперпозиции (п. 3°) не выполняется. Этот принцип, как и вся нерелятивистская теория тяготения, достаточно точен только в случае слабых полей ($|\Phi| \ll c^2$) и движений в этих полях с малыми скоростями $v \ll c$.

§ I.6.3. Законы Кеплера. Космические скорости

1°. Движение планет Солнечной системы по их орбитам вокруг Солнца удовлетворяет трем законам Кеплера. Эти законы можно получить из закона всемирного тяготения Ньютона, рассматривая в первом приближении Солнце и планеты как материальные точки. В центральном силовом поле тяготения Солнца на планету

массы m действует сила тяготения

$$F = -\gamma \frac{mM_{\odot}}{r^2} \mathbf{r},$$

где M_{\odot} — масса Солнца, а \mathbf{r} — радиус-вектор планеты, проведенный из центра сил O , принятого за начало координат.

Момент силы F относительно центра сил $\mathbf{M} = [\mathbf{r}F] = 0$, так что момент импульса \mathbf{L} планеты относительно той же точки O не изменяется с течением времени (I.4.3.1°):

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \text{const.}$$

Следовательно, планета движется по плоской траектории (орбите), плоскость которой перпендикулярна к вектору \mathbf{L} . Согласно (I.1.3.6°) $\mathbf{L} = [gm\mathbf{v}_{\varphi}]$, где \mathbf{v}_{φ} — трансверсальная скорость планеты. Поэтому орбитальное движение планеты удовлетворяет условию:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m} = \text{const.},$$

где r и φ — полярные координаты планеты.

Второе условие накладывается законом сохранения механической энергии: $W_k + W_{\Pi} = W = \text{const.}$ Согласно (I.1.3.6°) и (I.6.2.2°)

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right]$$

и

$$W_{\Pi} = -\gamma \frac{mM_{\odot}}{r},$$

так что второе условие имеет вид

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 - \frac{2\gamma M_{\odot}}{r} = \frac{2W}{m}.$$

2°. Уравнение траектории планеты (в полярных координатах r и φ):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где $p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M_{\odot}}$ и $e = \sqrt{\frac{2WL^2}{\gamma^2 m^3 M_{\odot}^2} + 1}$. Полная механическая энергия планеты $W < 0$, так что $e < 1$ и траектория имеет вид эллипса.

Первый закон Кеплера: все планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Из первого условия (п. 1°) следует, что секториальная скорость планеты (I.1.3.6°) постоянна:

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

Второй закон Кеплера: за равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади.

3°. Согласно второму закону Кеплера период T обращения планеты вокруг Солнца равен отношению площади S орбиты к секториальной скорости планеты σ :

$$T = \frac{S}{\sigma} = \frac{\pi ab}{\sigma},$$

где $a = p/(1-e^2)$ и $b = a\sqrt{1-e^2}$ — большая и малая полуоси эллиптической орбиты. Следовательно,

$$T^2 = \frac{\pi^2 p}{L^2/4m^2} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma M_{\text{С}}} a^3.$$

Это уравнение выражает *третий закон Кеплера*: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит этих планет.

4°. *Первой космической скоростью* называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло стать искусственным спутником Земли. Эту скорость называют также *круговой скоростью*, так как она равна скорости искусственного спутника, обращающегося вокруг Земли в отсутствие сопротивления атмосферы по круговой орбите. Первая космическая скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{З}}}{r}},$$

где $M_{\text{З}}$ — масса Земли, r — радиус круговой орбиты. У поверхности Земли $v_1 = 7,9$ км/с.

5°. *Второй космической скоростью* называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло без воздействия каких-либо дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца. Эту скорость называют также *параболической скоростью*, так как она соответствует параболической траектории тела в поле тяготения Земли (в отсутствие сопротивления атмосферы). Вторая космическая скорость

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{З}}}{r}},$$

где r — расстояние от места запуска тела до центра Земли. У поверхности Земли $v_2 = 11,2$ км/с.

6°. *Третьей космической скоростью* называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить космическому аппарату, запускаемому у поверхности Земли для того, чтобы он преодолел притяжение Солнца и покинул Солнечную систему. Эта скорость $v_3 = 16,7$ км/с.

Глава 1.7. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

§ 1.7.1. Кинематика относительного движения

1°. В классической (ньютоновской) механике считается, что расстояния и промежутки времени не изменяются при переходе от одной системы отсчета к любой другой, движущейся относительно первой самым произвольным образом. Например, пусть K — инерциальная система отсчета с началом координат в точке O^* , а S — неинерциальная система отсчета с началом координат в точке O (рис. 1.7.1). В общем случае движение системы отсчета S относительно K можно рассматривать как сумму двух движений — поступательного со скоростью v_0 точки O и вращения вокруг этой точки с угловой скоростью Ω . Значения r^* и r радиуса-вектора произвольной материальной точки M , измеренные в системах

отсчета K и S , связаны соотношением

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0^* + \mathbf{r},$$

где \mathbf{r}_0^* — радиус-вектор точки O , измеренный в системе отсчета K .

2°. Движение материальной точки M относительно какой-либо инерциальной системы отсчета K , условно принимаемой за неподвижную, называется *абсолютным движением* точки M . Движение той же точки относительно неинерциальной системы отсчета S называется *относительным движением*.

Относительная скорость $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ точки M , т. е. ее скорость по отношению к системе отсчета S , равна:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k},$$

где x, y, z — декартовы координаты точки M , а \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} — орты осей координат в системе отсчета S .

Абсолютная скорость точки M , т. е. ее скорость \mathbf{v} по отношению к системе отсчета K , равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \mathbf{v}_0 + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{v}_{\text{отн}},$$

где $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0^*/dt$ — абсолютная скорость точки O . Поскольку орты подвижной системы S могут изменяться в системе отсчета K только вследствие вращения системы S вокруг точки O с угловой скоростью Ω , то

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\Omega \mathbf{i}], \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\Omega \mathbf{j}], \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\Omega \mathbf{k}]$$

и

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн}},$$

где $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_0 + [\Omega \mathbf{r}]$ — *переносная скорость* точки M . Она равна абсолютной скорости той точки подвижной системы отсчета S (т. е. жестко связанной с этой системой), в которой находится в данный момент времени материальная точка M .

3°. Относительное ускорение $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ точки M (ее ускорение по отношению к системе отсчета S) равно:

$$\mathbf{a}_{\text{отн}} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}.$$

Абсолютное ускорение точки M , т. е. ее ускорение \mathbf{a} по отношению к системе отсчета K , равно:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{отн}}.$$

Здесь

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\Omega}{dt} \mathbf{r} \right] + [\Omega [\Omega \mathbf{r}]]$$

— *переносное ускорение* точки M , равное абсолютному ускорению той точки подвижной системы отсчета S , в которой находится в данный момент времени материальная точка M ,

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2 [\Omega \mathbf{v}_{\text{отн}}]$$

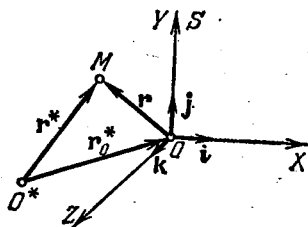


Рис. 1.7.1

— *кориолисово ускорение (поворотное ускорение)* точки M . Кориолисово ускорение максимально, если относительная скорость точки $v_{отн}$ направлена перпендикулярно к вектору Ω угловой скорости вращения подвижной системы отсчета. Оно равно нулю, если угол между векторами $v_{отн}$ и Ω равен 0 или π , либо если хотя бы один из этих векторов равен нулю.

§ 1.7.2. Силы инерции

1°. В неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. В частности, материальная точка может изменять состояние своего движения относительно неинерциальной системы отсчета S без всякого воздействия на эту точку со стороны других тел. Например, шарик, подвешенный на нити к потолку вагона равномерно и прямолинейно движущегося поезда, отклоняется назад при ускорении движения поезда и вперед — при его замедлении, т. е. приходит в движение относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с вагоном. Между тем никакие горизонтальные силы на шарик при этом не действуют.

2°. Основной закон динамики материальной точки в неинерциальных системах отсчета можно получить, исходя из второго закона Ньютона и связи между абсолютным и относительным ускорениями материальной точки. Из 1.7.1.3° следует, что произведение массы m материальной точки на ее относительное ускорение равно:

$$m a_{отн} = m a - m a_{пер} - m a_{кор}.$$

Согласно второму закону Ньютона, записанному применительно к абсолютному движению материальной точки, т. е. к ее движению относительно инерциальной системы отсчета K ,

$$m a = F,$$

где F — геометрическая сумма всех сил, действующих на материальную точку. Следовательно, *основное уравнение динамики относительного движения материальной точки* имеет вид:

$$m a_{отн} = F - m a_{пер} - m a_{кор}.$$

Его можно привести к виду, аналогичному по форме основному закону динамики абсолютного движения точки:

$$m a_{отн} = F + I_{пер} + I_{кор}.$$

Векторные величины $I_{пер} = -m a_{пер}$ и $I_{кор} = -m a_{кор}$ имеют размерность силы и называются соответственно *переносной силой инерции* и *кориолисовой силой инерции*.

3°. Из 1.7.1.3° следует, что в общем случае переносная сила инерции равна сумме трех членов:

$$I_{пер} = -m \frac{dv_0}{dt} - m \left[\frac{d\Omega}{dt} r \right] - m [\Omega [\Omega r]].$$

Последний член правой части этого выражения

$$I_{цб} = -m [\Omega [\Omega r]]$$

называется *центробежной силой инерции* или просто *центробежной силой*, так как этот вектор перпендикулярен к мгновенной оси вращения (к вектору Ω) не-

инерциальной системы отсчета S и направлен от указанной оси. Численно центробежная сила равна:

$$I_{цб} = m\Omega^2\rho,$$

где ρ — расстояние от материальной точки массы m до мгновенной оси вращения системы отсчета.

Переносная сила инерции совпадает с центробежной, если неинерциальная система отсчета движется поступательно с постоянной скоростью ($v_0 = \text{const}$) и вращается с постоянной угловой скоростью ($\Omega = \text{const}$).

4°. Кориолисова сила инерции

$$I_{кор} = 2m[v_{отн}\Omega].$$

Эта сила действует на материальную точку только тогда, когда неинерциальная система отсчета вращается, а материальная точка движется относительно нее. Так, например, на частицы воды в реках Северного полушария, текущих в меридиональном направлении, действуют кориолисовы силы инерции, которые направлены перпендикулярно к скорости течения реки и вызывают подмывание правого по течению берега.

Кориолисова сила инерции не совершает работы в относительном движении материальной точки, так как эта сила направлена перпендикулярно к скорости относительного движения точки. Следовательно, кориолисова сила инерции служит примером гироскопических сил (I.3.1.7°).

5°. Силы инерции реально действуют на материальную точку в неинерциальной системе отсчета и могут быть в ней измерены, например, с помощью пружинного динамометра. Однако, в отличие от обычных сил взаимодействия тел, для сил инерции нельзя сказать, действие каких конкретно тел на рассматриваемую материальную точку они выражают. Эта особенность сил инерции связана с тем, что само появление векторных величин $I_{пер}$ и $I_{кор}$ в основном уравнении динамики относительного движения обусловлено только неинерциальностью системы отсчета, используемой для описания относительного движения точки. Добавление к силе F , характеризующей действие на материальную точку всех других тел, сил инерции $I_{пер}$ и $I_{кор}$ позволяет записать основное уравнение динамики относительного движения в форме, похожей на запись второго закона Ньютона в инерциальной системе отсчета.

В неинерциальных системах отсчета не может быть замкнутых систем тел, так как для любого из тел системы силы инерции всегда являются внешними силами. Поэтому в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса (I.2.7.1°), момента импульса (I.4.4.1°) и энергии (I.3.4.2°).

§ 1.7.3. Относительное движение в системе отсчета, связанной с Землей. Сила тяжести и вес тела

1°. Система отсчета, связанная с Землей, неинерциальна по двум причинам: во-первых, вследствие суточного вращения Земли с постоянной угловой скоростью Ω ($\Omega = 2\pi \text{ рад/сут} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$) и, во-вторых, вследствие действия на Землю гравитационного поля Солнца, Луны, планет и др. астрономических тел. Это гравитационное поле практически однородно в пределах земного шара и сообщает Земной системе отсчета и всем движущимся относительно нее телам одно

и то же ускорение поступательного движения $a_0 = \frac{dv_0}{dt} = G$, где G — напряженность поля (1.6.2.1°).

Из соотношений 1.7.2.2° и 1.7.2.3° следует, что уравнение относительного движения материальной точки массы m в системе отсчета, связанной с Землей, имеет вид:

$$ma_{отн} = F + F_{тяг} + I_{цб} + I_{кор},$$

где $I_{цб}$ и $I_{кор}$ — центробежная и кориолисова силы инерции, $F_{тяг}$ — сила тяготения материальной точки к Земле (1.6.1.3°), а F — сумма всех остальных сил, действующих на материальную точку, кроме гравитационных.

2°. Силой тяжести тела называется сила P , приложенная к телу и равная геометрической сумме силы $F_{тяг}$ тяготения тела к Земле (1.6.1.3°) и центробежной силы инерции $I_{цб}$, обусловленной суточным вращением Земли (рис. 1.7.2):

$$P = F_{тяг} + I_{цб}.$$

т. е.

$$P = -\gamma \frac{mM_3}{r^3} r - m[\Omega \{\Omega r\}].$$

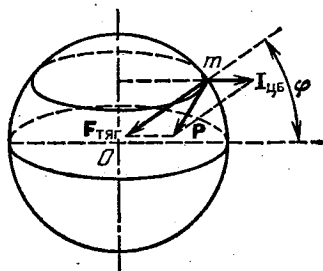


Рис. 1.7.2

Здесь m и M_3 — массы тела и Земли, r — радиус-вектор, проведенный из центра Земли в место нахождения тела, Ω — угловая скорость суточного вращения Земли, γ — гравитационная постоянная (1.6.1.1°).

Сила тяжести P вызывает падение на Землю незакрепленного тела. Она равна силе, с которой неподвижное относительно Земли тело давит на горизонтальную опору (или действует на вертикальный подвес) вследствие тяготения к Земле, и может быть измерена в Земной системе отсчета, например, с помощью пружинного динамометра. Точка приложения силы тяжести тела, т. е. точка приложения равнодействующей сил тяжести всех частиц тела, называется *центром тяжести тела*. Центр тяжести тела совпадает с его центром инерции (1.2.3.3°).

3°. Сила тяжести тела не зависит от скорости его относительного движения. Она пропорциональна массе m тела и может быть представлена в виде:

$$P = mg,$$

где g — ускорение силы тяжести, или ускорение свободного падения (см. п. 5°). В данном месте Земли вектор g одинаков для всех тел и изменяется с изменением этого места.

Сила тяжести тела совпадает с силой его тяготения к Земле только на полюсах последней, так как там центробежная сила инерции $I_{цб} = 0$. Наибольшее отличие силы тяжести тела от силы его тяготения наблюдается на экваторе, где сила $I_{цб}$ достигает максимального значения и направлена в сторону, противоположную направлению силы $F_{тяг}$. Однако даже на экваторе сила тяжести отличается от силы тяготения всего лишь на 0,35%. Во всех точках земной поверхности, кроме полюсов и экватора, силы P и $F_{тяг}$ не совпадают также и по направлению (рис. 1.7.2), но максимальный угол между ними не превосходит 6'. Сила тяжести уменьшается с подъемом на высоту. Вблизи поверхности Земли это уменьшение составляет приблизительно 0,034% на каждый километр подъема.

4°. Ускорение g вблизи поверхности Земли изменяется от значения $9,78 \text{ м/с}^2$ на экваторе до значения $9,83 \text{ м/с}^2$ на полюсах. Это связано, во-первых, с зависимостью центробежной силы инерции от географической широты места и, во-вторых, с нешарообразностью Земли, которая слегка сплюснута вдоль оси вращения и имеет вид эллипсоида вращения (полярный и экваториальный радиусы Земли равны; $R_{\text{пол}} = 6357 \text{ км}$ и $R_{\text{экв}} = 6378 \text{ км}$). Стандартное значение ускорения свободного падения, принятое при построении систем единиц и при барометрических расчетах, равно $9,80665 \text{ м/с}^2$.

5°. Свободным падением тела называется его движение, происходящее под действием только поля тяготения.

Ускорение свободно падающего на Землю тела, регистрируемое во вращающейся вместе с Землей неинерциальной системе отсчета, можно найти из уравнения движения (1.7.3.1°), положив в нем $F=0$; $F_{\text{тяг}} + I_{\text{цб}} = mg$ и $I_{\text{кор}} = 2m[v_{\text{отн}}\Omega]$:

$$a_{\text{отн}} = g + 2[v_{\text{отн}}\Omega].$$

Если $v_{\text{отн}} = 0$, то $a_{\text{отн}} = g$.

Следовательно, вектор g равен ускорению свободно падающего тела, измеренному относительно Земной системы отсчета в тот момент, когда относительная скорость тела равна нулю. По этой причине вектор g называют *ускорением свободного падения*.

Если относительная скорость свободно падающего тела $v_{\text{отн}} \neq 0$, то его ускорение относительно Земли не равно g : $g = a_{\text{отн}} + 2[\Omega v_{\text{отн}}]$. Однако при скоростях $v_{\text{отн}} < 680 \text{ м/с}$ значения g и $a_{\text{отн}}$ различаются менее, чем на 1%. Поэтому во многих случаях можно считать, что для наблюдателя, находящегося на Земле, свободное падение тела вызывается действием только силы тяжести этого тела, сообщаемой ему ускорение g . Соответственно действие на свободно падающее тело кориолисовой силы инерции можно рассматривать как сравнительно малое возмущение. Так, например, под влиянием кориолисовой силы свободно падающее тело отклоняется к востоку от направления отвеса, т. е. от направления вектора $P = mg$. Это отклонение s для тела, свободно падающего без начальной скорости с высоты h , на широте φ равно

$$s = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \varphi.$$

Например, если $h = 160 \text{ м}$ и $\varphi = 45^\circ$, то $s = 1,55 \text{ см}$.

6°. *Весом тела* называется сила Q , с которой оно действует вследствие тяготения к Земле на опору или подвес, удерживающие его от свободного падения. При этом предполагается, что тело и опора (или подвес) неподвижны относительно системы отсчета, в которой определяется вес тела. Со стороны опоры или подвеса на тело действует сила $-Q$. Из основного уравнения динамики относительного движения (1.7.2.2°), где $a_{\text{отн}} = a_{\text{кор}} = 0$ и $F = F_{\text{тяг}} - Q$, следует, что

$$Q = F_{\text{тяг}} + I_{\text{пер}}.$$

Здесь $F_{\text{тяг}}$ — сила гравитационного притяжения тела к Земле, а $I_{\text{пер}}$ — переносная сила инерции, обусловленная неинерциальностью системы отсчета.

Пример 1. Вес тела в системе отсчета, связанной с Землей, равен силе тяжести тела (п. 2°):

$$Q = F_{\text{тяг}} + I_{\text{цб}} = P.$$

Пример 2. Вес тела в системе отсчета, связанной с лифтом, который движется относительно Земли поступательно с ускорением a_0 ,

$$Q = P - ma_0.$$

Если лифт свободно падает, то $a_0 = g$ — ускорение свободного падения и вес тела в лифте $Q = 0$, т. е. тело находится в состоянии невесомости.

7°. *Невесомостью* называется такое состояние механической системы, при котором действующее на нее гравитационное поле не вызывает взаимного давления частей системы друг на друга и их деформации. Такое состояние реализуется в механической системе, удовлетворяющей следующим трем условиям: а) на систему не действуют никакие другие внешние силы, кроме сил гравитационного поля; б) размеры системы таковы, что в ее пределах внешнее гравитационное поле можно считать однородным; в) система движется поступательно. Состояние невесомости характерно, например, для тел, находящихся в космическом корабле, так как основную часть своей траектории в поле тяготения корабль проходит с неработающим двигателем.

§ 1.7.4. Принцип эквивалентности

1°. Силы инерции, действующие на тела в неинерциальной системе отсчета, пропорциональны их массам и при прочих равных условиях сообщают этим телам одинаковые относительные ускорения (1.7.1.3°). Иными словами, все тела, свободные от внешних воздействий, движутся в «поле сил инерции», т. е. относительно неинерциальной системы отсчета, совершенно одинаково, если только начальные условия их движения тоже одинаковы. Аналогичная закономерность наблюдается при движении относительно инерциальных систем отсчета тел, находящихся под действием сил гравитационного поля. В каждой точке поля эти силы, подобно силам инерции, пропорциональны массам тел и сообщают всем телам одинаковые ускорения свободного падения, равные напряженности поля в рассматриваемой его точке (1.6.2.1°).

Например, в неинерциальной системе отсчета, связанной с лифтом, который движется равноускоренно вертикально вверх с переносным ускорением $a_0 = \text{const}$, все свободные тела падают в отсутствие гравитационного поля с одинаковым относительным ускорением $a_{\text{отн}} = -a_0$. Точно так же ведут себя свободные тела в том же лифте, движущемся равномерно в однородном гравитационном поле напряженностью $G = -a_0$. Таким образом, на основе экспериментов по свободному падению тел внутри наглухо закрытого лифта нельзя установить, движется ли лифт равномерно в гравитационном поле напряженностью $G = a_{\text{отн}}$ (в частности, лифт может также покоиться в этом поле) или он движется с постоянным переносным ускорением $a_{\text{пер}} = -a_{\text{отн}}$ в отсутствие гравитационного поля.

2°. *Локальный принцип эквивалентности:* гравитационное поле в ограниченной области пространства физически эквивалентно «полю сил инерции» в соответствующим образом выбранной неинерциальной системе отсчета. Область пространства должна быть столь малой, чтобы гравитационное поле в ней можно было считать однородным.

Принцип эквивалентности не следует понимать как утверждение о тождественности сил инерции и сил ньютоновского тяготения между телами. Дейст-

вительно, напряженность истинного гравитационного поля, создаваемого телами, убывает по мере удаления от этих тел и обращается в нуль, на бесконечности. Гравитационные поля, «эквивалентные» силам инерции, не удовлетворяют этому условию. Например, напряженность гравитационного поля, «эквивалентного» центробежным силам инерции во вращающейся системе отсчета, неограниченно возрастает по мере удаления от оси вращения. Напряженность поля, «эквивалентного» переносным силам инерции в поступательно движущейся системе отсчета, всюду одинакова.

3°. Истинное гравитационное поле, в отличие от «эквивалентного» силам инерции, существует как в неинерциальных, так и в инерциальных системах отсчета. Никаким выбором неинерциальной системы отсчета нельзя полностью исключить истинное гравитационное поле, т. е. скомпенсировать его во всем пространстве «полем сил инерции». Это следует хотя бы из различного поведения «полей сил инерции» и истинных гравитационных полей на бесконечности. Такое исключение гравитационного поля можно осуществить лишь локально, т. е. для малой области пространства, в пределах которой это поле можно считать однородным, и для промежутка времени, в течение которого поле можно считать постоянным. Соответствующая этой операции неинерциальная система отсчета должна двигаться с переносным ускорением, равным ускорению свободного падения тел в рассматриваемой области истинного гравитационного поля. Так, в космическом корабле, совершающем свободный полет в гравитационном поле, силы тяготения компенсируются переносными силами инерции и не вызывают относительного движения тел на корабле.

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Г л а в а II.1. ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

§ II.1.1. Предмет молекулярной физики. Тепловое движение

1°. В разделе физики, называемом *молекулярной физикой*, изучаются зависимости строения и физических свойств тел от характера движения и взаимодействия между частицами, из которых состоят тела.

Молекулярная физика основывается на *молекулярно-кинетической теории* строения вещества. Согласно этой теории, все тела состоят из мельчайших частиц — атомов, молекул или ионов, — находящихся в непрерывном хаотическом движении, которое называется *тепловым движением*. Экспериментальными подтверждениями молекулярно-кинетической теории являются: броуновское движение (II.4.7.1°), явления переноса в различных агрегатных состояниях вещества и другие явления.

2°. Молекулярно-кинетическая теория строения вещества успешно применяется в различных разделах физики. В этой теории с единой точки зрения рассматриваются разнообразные физические явления, протекание которых зависит от взаимодействия и движения частиц вещества. Например, эта теория позволяет понять механизм упругих свойств твердых тел (VII.1.3.1°), вскрывает причину внутреннего трения в газах (II.3.8.4°) и жидкостях, объясняет различия между реальными газами (II.5.1.2°) и идеальным газом (II.1.4.1°).

На основе молекулярно-кинетической теории строения вещества объясняется механизм электропроводности различных по своей природе проводников электрического тока, электрические и магнитные свойства веществ.

3°. Тепловое движение частиц вещества в различных агрегатных состояниях не одинаково. Оно зависит от сил притяжения и отталкивания, действующих между атомами, молекулами и ионами.

Силы притяжения между атомами и молекулами достаточно разреженных газов практически отсутствуют. Это связано с тем, что частицы таких газов находятся друг от друга на расстояниях, превышающих радиус молекулярного действия (II.5.2.3°). Частицы таких газов движутся равномерно и прямолинейно до тех пор, пока они не сталкиваются между собой или со стенками сосуда. Эти столкновения носят случайный характер. Каждая молекула может в объеме газа испытать соударение с любой из ближайших к ней частиц и изменить произвольным образом направление своего движения. Соударение молекулы (атома) газа со стенкой может происходить под любым углом $\vartheta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right)$. В итоге тепловое движение молекул газов является беспорядочным и, в среднем, в любом произвольном направлении внутри газа в любой момент времени движется одинаковое число молекул.

4°. Твердые, кристаллические тела характеризуются значительными силами взаимодействия между частицами твердых тел (атомами, молекулами, ионами). Совместное действие сил притяжения и отталкивания между этими частицами (II.5.1.3°) приводит к тому, что частицы твердых тел совершают колебания около

средних равновесных положений, называемых *узлами кристаллической решетки* (VII.1.1.1°). Межмолекулярное взаимодействие и нарушение периодичности в кристаллах (VII.1.1.1°) приводят к тому, что эти колебания являются ангармоническими (IV.1.1.3°).

5°. Тепловое движение молекул жидкости имеет промежуточный характер между двумя предыдущими видами движения (см. п. 3° и 4°). Молекула жидкости определенное время колеблется около некоторого положения равновесия и находится в оседлом положении. По истечении некоторого времени положение равновесия молекулы смещается и образуется новое оседлое положение. Происходят, одновременно, медленные перемещения молекул и их колебания внутри малых объемов. См. также II.6.2.3°.

§ II.1.2. Статистический и термодинамический методы исследования

1°. Число атомов (молекул) в любом теле огромно. Например, в 1 см^3 газа, близкого по своим свойствам к идеальному, при нормальных условиях содержится $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. В конденсированных состояниях — жидком и твердом — порядка 10^{22} частиц/ см^3 . Если считать, что движение каждого атома (молекулы) вещества подчиняется второму закону Ньютона (I.2.4.1°), то не может быть и речи не только о решении дифференциальных уравнений движения отдельных частиц вещества, но даже и о написании этих уравнений. Поэтому поведение отдельной молекулы (атома) тела, например, ее траектория, последовательность изменения ее состояний, не может быть изучено методами классической механики.

2°. Макроскопические свойства систем, состоящих из очень большого числа частиц, изучаются *статистическим методом*. Статистический метод основан на использовании теории вероятностей и определенных моделей строения изучаемых систем. Раздел теоретической физики, в котором физические свойства систем изучаются с помощью статистического метода, называется *статистической физикой* (*физической статистикой*). В совокупном поведении большого числа частиц проявляются особые закономерности, называемые *статистическими закономерностями*. В системе, состоящей из большого числа частиц, существуют некоторые *средние значения физических величин*, характеризующих всю совокупность частиц в целом. Так, в газе существуют средние значения скоростей теплового движения молекул (II.3.3.6°) и их энергий (II.3.2.4°). В твердом теле существует средняя энергия, приходящаяся на каждую степень свободы колебательного движения частицы (VII.2.7.2°), и т. д. Все свойства системы частиц обусловлены не только индивидуальными свойствами самих частиц, но также особенностями их совокупных движений и средними значениями динамических характеристик частиц (средние скорости, средние энергии и т. д.).

Помимо статистических закономерностей существуют *динамические закономерности*, описывающие движения отдельных частиц. Связь между динамическими и статистическими закономерностями проявляется в том, что законы движения отдельных частиц влияют на описание свойств системы частиц, изучаемой статистическим методом.

3°. Кроме статистического метода исследования физических явлений существует *термодинамический метод*, в котором не учитываются внутреннее строение

веществ тех тел (систем), которые изучаются, и характер движения отдельных частиц. Термодинамический метод основан на изучении различных превращений энергии, происходящих в системе. Условия этих превращений и соотношения между разными видами энергий позволяют изучать физические свойства исследуемых систем при самых разнообразных процессах, в которых эти системы участвуют. Раздел физики, в котором физические свойства систем изучаются с помощью термодинамического метода, называется *термодинамикой* (*феноменологической термодинамикой*). Термодинамика основывается на двух установленных опытным путем законах (началах) термодинамики (II.2.3.1°, II.4.3.2°), а также на тепловой теореме Нернста, или третьем начале термодинамики (II.4.6.2°).

§ II.1.3. Термодинамические параметры. Уравнение состояния. Термодинамический процесс

1°. В термодинамике рассматриваются *термодинамические системы* — макроскопические объекты (тела и поля), которые могут обмениваться энергией как друг с другом, так и с внешней средой, т. е. телами и полями, которые являются внешними по отношению к данной системе.

2°. Для описания состояния термодинамической системы вводятся физические величины, которые называются *термодинамическими параметрами* или *параметрами состояния* системы. Обычно термодинамическими параметрами выбирают давление, удельный объем и температура.

Давлением p называется физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу площади поверхности тела по направлению нормали к этой поверхности:

$$p = \frac{dF_n}{dS},$$

где dF_n — численное значение нормальной силы, действующей на малый участок поверхности тела площадью dS .

Удельным объемом v называется величина, обратная плотности ρ тела: $v = 1/\rho$. Для однородного тела удельный объем равен объему тела, масса которого равна единице.

3°. Понятие температуры имеет смысл для равновесных состояний термодинамической системы (п. 4°). *Равновесным состоянием* (*состоянием термодинамического равновесия*) называется состояние системы, не изменяющееся с течением времени (*стационарное состояние*), причем стационарность состояния не связана с процессами, происходящими во внешней среде. Равновесное состояние устанавливается в системе при постоянных внешних условиях и сохраняется в системе произвольно долгое время. Во всех частях термодинамической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, температура одинакова. Если происходит соприкосновение двух тел с различной температурой, то путем теплообмена происходит передача внутренней энергии (II.2.1.2°) от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой. Этот процесс прекращается, когда температуры обоих тел становятся равными.

4°. Температура равновесной системы является мерой интенсивности теплового движения ее молекул (атомов, ионов). Для равновесной системы частиц,

подчиняющихся законам классической статистической физики (п. 2°), средняя кинетическая энергия теплового движения частиц прямо пропорциональна абсолютной температуре системы (II.3.2.4°).

Температуру можно измерять только косвенным путем, основываясь на том, что целый ряд физических свойств тела, поддающихся прямому или косвенному измерению, зависит от температуры. Так, при изменении температуры тела изменяется его длина и объем, плотность, электрическое сопротивление, упругие свойства и т. д. Изменение любого из этих свойств может быть основой измерения температуры. Для этого необходимо, чтобы для одного тела, называемого *термометрическим телом*, была известна функциональная зависимость данного свойства от температуры. Температурные шкалы, устанавливаемые с помощью термометрических тел, называются *эмпирическими*.

В *международной стогоградусной шкале* температура измеряется в °С и обозначается t (градус стогоградусной шкалы, градус Цельсия). Считается, что при нормальном давлении в $1,01325 \cdot 10^6$ Па (IX) температуры плавления льда и кипения воды равны 0 °С и 100 °С соответственно.

В *термодинамической шкале температур* температура измеряется в кельвинах (K) и обозначается T .

Связь между *термодинамической (абсолютной) температурой* T и температурой по стогоградусной шкале: $T = 273,15 + t$.

Температура $T = 0$ ($t = -273,15$ °С) называется *абсолютным нулем температуры*. О недостижимости абсолютного нуля см. (II.4.8.4°).

5°. Параметры состояния системы разделяются на внешние и внутренние. *Внешними параметрами системы* называются физические величины, которые зависят от положения в пространстве и различных свойств тел, являющихся внешними по отношению к данной системе. Например, для газа объем V сосуда, в котором находится газ, является внешним параметром, ибо объем зависит от расположения внешних тел — стенок сосуда. Для диэлектрика, находящегося в электрическом поле, внешним параметром является напряженность этого поля, созданного некоторыми внешними источниками поля. Внешним параметром для жидкости в открытом сосуде является, например, атмосферное давление.

Внутренними параметрами системы называются физические величины, зависящие как от положения внешних тел по отношению к системе тел, так и от координат и скоростей частиц, образующих данную систему. Например, внутренними параметрами газа являются его давление и энергия, ибо они зависят от координат и скоростей движущихся молекул и от плотности газа.

6°. Параметры состояния системы, находящейся в равновесном состоянии (п. 3°), не являются независимыми. Внутренние параметры такой системы зависят только от ее внешних параметров и температуры. Равновесное состояние простой системы *) заданного химического состава и массы M определяется заданием двух параметров — объема V и температуры T .

Уравнением состояния (термическим уравнением состояния) простой системы называется функциональная зависимость равновесного давления p в системе от

*) Примером простых систем является газ в отсутствие внешних полей. Простыми системами являются также смеси химически однородных газов постоянного состава, химически чистые жидкости и т. д.

объема и температуры

$$p = f(V, T).$$

Уравнение состояния в термодинамике получается опытным путем. В статистической физике (II.1.2.2°) уравнение состояния выводится теоретически. В этом состоит взаимосвязь статистического метода исследования (II.1.2.2°) с термодинамическим методом (II.1.2.3°).

7°. Если какой-либо из внешних параметров системы изменяется, то происходит изменение состояния термодинамической системы, называемое *термодинамическим процессом*. Термодинамический процесс называется равновесным (*равновесный, квазистатический процесс*), если система бесконечно медленно проходит непрерывный ряд бесконечно близких термодинамически равновесных состояний (II.1.3.3°). Все процессы, которые не удовлетворяют перечисленным условиям, называются *неравновесными*. Реальные процессы неравновесны, ибо происходят с конечной скоростью. Однако они тем ближе к равновесным, чем медленнее они происходят.

Изопроцессами называются термодинамические процессы, происходящие в системе с постоянной массой при каком-либо одном постоянном параметре состояния.

Изотермический (изотермный) процесс происходит при постоянной температуре ($T = \text{const}$).

Изохорический (изохорный) процесс происходит при постоянном объеме ($V = \text{const}$).

Изобарический (изобарный) процесс протекает при постоянном давлении ($p = \text{const}$).

Адиабатным (адиабатическим) процессом называется термодинамический процесс, который происходит в системе без теплообмена (II.2.2.4°) с внешними телами (см. также II.2.5.10°).

8°. *Функциями состояния* называются физические величины, характеризующие состояние системы. Изменения функций состояния при термодинамических процессах не зависят от вида этих процессов. Функции состояния однозначно определяются значениями параметров начального и конечного состояний системы. Простейшими функциями состояния системы являются ее внутренняя энергия U (II.2.1.2°) и энтропия S (II.4.4.2°).

§ II.1.4. Уравнение состояния идеального газа

1°. *Идеальным газом* называется газ, молекулы которого не взаимодействуют друг с другом на расстоянии и имеют исчезающе малые собственные размеры. У реальных газов (II.5.1.2°) молекулы испытывают силы межмолекулярного взаимодействия (II.5.1.3°).

При взаимных столкновениях и соударениях со стенками сосуда молекулы идеального газа ведут себя как абсолютно упругие шары (I.1.1.4°) с диаметром d (*эффективный диаметр молекулы*), зависящим от химической природы газа. Наличие эффективного диаметра d ($d \sim 10^{-10}$ м) означает, что между молекулами действуют силы взаимного отталкивания (II.5.1.3°). Межмолекулярные силы притяжения (II.5.1.3°) быстро убывают с увеличением расстояния r между молекулами и не проявляются практически при $r > r_m \sim 10^{-8}$ м. При малых плотностях реаль-

ных газов средние расстояния (r) между молекулами превышают r_m , и они с хорошим приближением считаются идеальными. Водород, гелий, кислород, азот считаются идеальными при плотностях, соответствующих нормальным условиям.

2°. Для данной массы идеального газа отношение произведения численных значений давления и объема к абсолютной температуре есть величина постоянная (*уравнение Клапейрона*)

$$\frac{pV}{T} = C = \text{const.}$$

Численное значение *газовой постоянной* C зависит от массы газа и его химического состава.

Если v — удельный объем газа (II.1.3.2°) и M — масса газа, то $V = Mv$ и уравнение Клапейрона принимает вид

$$pv = \frac{C}{M} T = BT,$$

где $B = \frac{C}{M}$ — *удельная газовая постоянная*, отнесенная к единице массы.

3°. Из определения моля (IX) следует, что моли различных газов содержат одинаковое число молекул — *постоянная (число) Авогадро* N_A (IX).

Молярной массой μ газа или любого тела называется физическая величина, равная отношению массы M газа (или любого тела) к количеству N молей, которое в нем содержится: $\mu = M/N$.

Молярная масса прямо пропорциональна относительной массе молекул газа: $\mu = 10^{-3} m/m_0$, где m — масса молекулы данного газа, m_0 — атомная единица массы по углеродной шкале (IX). Коэффициент 10^{-3} появляется потому, что в СИ молярную массу измеряют в кг/моль.

Молярным объемом V_μ называется физическая величина, равная отношению объема V газа к числу N молей, содержащихся в газе: $V_\mu = V/N$. Масса моля численно равна μ , поэтому $V_\mu = \mu v$, где v — удельный объем (II.1.3.2°).

4°. Уравнение состояния для моля идеального газа:

$$\frac{pV_\mu}{T} = \mu B = R \quad \text{или} \quad pV_\mu = RT.$$

Здесь R — *универсальная газовая постоянная*, представляющая собой газовую постоянную, отнесенную к молю газа. Универсальность R вытекает из *закона Авогадро*, согласно которому моли всех идеальных газов при одинаковых давлениях и температурах занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях ($T = 273,15$ К, $p = 1,0132 \cdot 10^5$ Па = 1 атм = 760 мм рт. ст.) моль любого газа имеет объем $V_\mu = 22,415 \cdot 10^{-3}$ м³. Отсюда можно рассчитать численные значения R в разных системах единиц (IX).

Если в объеме V газа содержится масса M кг, т. е. M/μ молей, то $V = M/\mu \cdot V_\mu$ и уравнение состояния газа принимает форму, называемую *уравнением Менделеева — Клапейрона*:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT.$$

5°. *Постоянной Больцмана* k называется физическая величина, равная отношению универсальной газовой постоянной R к постоянной Авогадро N_A , т. е. $k = R/N_A$. Значения k в разных системах единиц см. в IX.

Уравнение состояния идеального газа, выраженное с помощью постоянной Больцмана, имеет вид:

$$p = \frac{kN_A T}{V_\mu} = k n_0 T,$$

где $n_0 = N_A/V_\mu$ — число молекул газа в единице объема (концентрация молекул).

При постоянной температуре давление газа прямо пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа).

Г л а в а II.2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН (ПЕРВОЕ НАЧАЛО) ТЕРМОДИНАМИКИ

§ II.2.1. Полная и внутренняя энергии системы

1°. Произвольная термодинамическая система (II.1.3.1°), находящаяся в любом термодинамическом состоянии (II.1.3.3°), обладает *полной энергией* W , складывающейся из:

- а) кинетической энергии $W_K^{\text{мех}}$ механического движения системы как целого (или ее макроскопических частей);
- б) потенциальной энергии (I.3.3.1°) $W_{\text{п}}^{\text{внешн}}$ системы во внешних силовых полях (например, электромагнитном, гравитационном);
- в) внутренней энергии U :

$$W = W_K^{\text{мех}} + W_{\text{п}}^{\text{внешн}} + U.$$

2°. *Внутренней энергией* тела или термодинамической системы (II.1.3.1°) называется энергия, зависящая только от термодинамического состояния тела (системы). Для неподвижной системы, не находящейся во внешних силовых полях, внутренняя энергия совпадает с полной энергией. Внутренняя энергия совпадает также с энергией покоя тела (системы) (I.5.7.3°) и включает в себя энергию всех видов внутренних движений в теле (системе) и энергию взаимодействия всех частиц (атомов, молекул, ионов и т. д.), входящих в тело (систему).

Например, внутренняя энергия газа многоатомных молекул (аммиак, углекислый газ и т. п.) состоит из:

- а) кинетической энергии теплового поступательного и вращательного движения молекул;
- б) кинетической и потенциальной энергии колебаний атомов в молекулах;
- в) потенциальной энергии, обусловленной межмолекулярными взаимодействиями;
- г) энергии электронных оболочек атомов и ионов;
- д) кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия нуклонов (VIII.1.1.1°) в ядрах атомов.

Слагаемые г) и д) обычно не изменяются в процессах, происходящих при не очень высоких температурах, когда ионизация и возбуждение не играют существенной роли. В этих условиях слагаемые г) и д) не учитываются в балансе внутренней энергии. Для идеального газа (II.1.4.1°) не учитывается также слагаемое в).

3°. Внутренняя энергия является однозначной функцией термодинамического состояния системы. Значение внутренней энергии в любом состоянии не зависит от того, с помощью какого процесса система пришла в данное состояние, Изменение

внутренней энергии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 равно $\Delta U = U_2 - U_1$ и не зависит от вида процесса перехода 1→2. Если система совершает круговой процесс (II.4.1.1°), то полное изменение ее внутренней энергии равно нулю: $\oint dU = 0$.

Как известно, математически это соотношение означает, что элементарное изменение dU внутренней энергии является полным (точным) дифференциалом. Таким же свойством, кроме внутренней энергии, обладает энтропия (II.4.4.2°) и другие функции состояния (II.1.3.8°) (ср. с II.2.2.5°).

4°. В системе, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, внутренняя энергия зависит только от температуры и внешних параметров (II.1.3.5°). В частности, для простой системы (II.1.3.6°) с постоянной массой M внутренняя энергия есть функция температуры T и объема V системы (*калорическое уравнение состояния* простой системы)

$$U = \varphi(V, T).$$

Пример 1. Внутренняя энергия идеального газа (II.1.4.1°) зависит только от его абсолютной температуры и пропорциональна массе газа M :

$$U = \int_0^T C_V dT + U_0 = M \left(\int_0^T c_V dT + u_0 \right),$$

где C_V и $c_V = C_V/M$ — соответственно, теплоемкость (II.2.5.1°) и удельная теплоемкость (II.2.5.2°) газа при изохорном процессе (II.1.3.7°); $u_0 = U_0/M$ — внутренняя энергия единицы массы газа при $T=0$ К. Для одноатомных газов при обычных температурах C_V не зависит от T и $U = C_V T + U_0$.

Пример 2. Внутренняя энергия газа Ван дер Ваальса (II.5.2.1°):

$$U = \int_0^T C_V dT - \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V} + U_0,$$

где M — масса газа, μ — его молярная масса (II.1.4.3°), a — коэффициент Ван дер Ваальса (II.5.2.3°).

5°. В термодинамике внутренняя энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого U_0 , значение которого зависит от выбора начала отсчета величины U — от состояния с нулевой внутренней энергией. Практически величина U_0 не играет роли в термодинамических расчетах, где определяются не зависящие от U_0 изменения ΔU внутренней энергии (см. также (II.2.1.2°)).

§ II.2.2. Теплота и работа

1°. Обмен энергией между термодинамической системой и внешними телами происходит двумя путями: либо при совершении работы, либо с помощью теплообмена *). Количество энергии, переданной системе внешними телами при силовом взаимодействии между ними, называется *работой*, совершенной над системой.

*) Рассмотрение третьего способа обмена энергией — массообмена — выходит за рамки данного справочника.

Количество энергии, переданной системе внешними телами путем теплообмена, называется *количеством теплоты*, сообщенной системе *).

2°. Если термодинамическая система неподвижна, то для совершения работы необходимо перемещение взаимодействующих с ней внешних тел, т. е. необходимо изменение внешних параметров состояния системы (II.1.3.5°). В отсутствие внешних силовых полей обмен энергией между неподвижной системой и внешней средой с помощью совершения работы может происходить лишь при изменении объема и формы системы. По закону сохранения энергии работа A' , совершаемая над системой внешними силами, численно равна и противоположна по знаку работе A , которую сама система совершает над внешней средой, т. е. против внешних сил: $A' = -A$.

3°. *Работой расширения* называется работа, которую система производит против внешнего давления. Элементарная работа расширения: $\delta A = p_{\text{внешн}} dV$, где $p_{\text{внешн}}$ — равномерно распределенное внешнее давление, dV — элементарное изменение объема системы. Если процесс расширения является равновесным (квазистатическим) (II.1.3.7°), то $p_{\text{внешн}} = p$, где p — давление в системе. Тогда $\delta A = p dV$.

Смысл отличия в записях элементарных изменений δA и dU см. в II.2.4.3° и II.2.1.3°. Работа равновесного расширения системы от объема V_1 до объема V_2 :

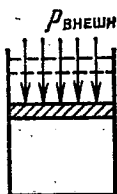


Рис. II.2.1

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Пример. Работа газа, заключенного в сосуде с невесомым подвижным поршнем (рис. II.2.1). Давление газа $p > 0$, поэтому при расширении ($dV > 0$) газ совершает положительную работу ($\delta A > 0$). При сжатии газа ($dV < 0$ и $\delta A < 0$) положительную работу над газом совершают силы внешнего давления. Сам газ совершает при этом отрицательную работу.

Графическое изображение работы см. во II.2.4.2°.

4°. Теплообмен происходит между телами (или частями одного тела), нагретыми до различной температуры. Существуют три вида теплообмена: конвективный теплообмен, теплопроводность и теплообмен излучением («лучистый» теплообмен).

Конвективным теплообменом называется передача теплоты между движущимися неравномерно нагретыми частями газов, жидкостей или газами, жидкостями и твердыми телами. Конвективный теплообмен в жидкостях осуществляется при движении частей жидкости друг относительно друга или по отношению к твердым телам. Например, в батареях водяного отопления энергия от горячей воды, протекающей в батарее, передается конвективным теплообменом к менее нагретым стенкам батареи.

Явление *теплопроводности* состоит в передаче теплоты от одной части неравномерно нагретого тела к другой. Так, например, происходит передача энергии через стенки батареи водяного отопления от более нагретых внутренних поверхностей к менее нагретым наружным стенкам.

*) Иногда термин «количество теплоты» там, где это не вызывает недоразумения, заменяется термином «теплота».

Теплообмен излучением происходит без непосредственного контакта тел, обменивающихся энергией, и заключается в испускании и поглощении телами энергии электромагнитного поля. Лучистым теплообменом от Солнца к поверхности Земли доставляется колоссальная энергия.

5°. Работа и теплота являются энергетическими характеристиками процессов изменения состояния термодинамических систем и имеют смысл только при наличии таких процессов. В зависимости от вида процессов, переводящих систему из состояния 1 в состояние 2, необходимо совершение различной работы и сообщение системе различных количеств теплоты. Сравнение с II.2.1.3° (об изменении внутренней энергии в процессах) показывает, что работа и теплота не являются видами энергии, и поэтому нельзя говорить о «запасе работы» или «запасе теплоты» в теле. По этим же причинам элементарное количество теплоты δQ и элементарная работа δA не являются полными дифференциалами (ср. с II.2.1.3°).

6°. Совершение работы над системой может изменить любой вид энергии системы. Например, при быстром сжатии газа в сосуде с подвижным поршнем (II.2.2.3°) работа, совершаемая над газом внешними силами, увеличивает внутреннюю энергию газа. При неупругом соударении двух тел (I.3.5.3°) часть совершенной работы идет на изменение кинетической энергии тел (I.3.2.2°), а часть работы идет на изменение внутренней энергии тел.

Если энергия сообщается системе в форме теплоты, то она идет только на увеличение внутренней энергии системы. Это связано с тем, что при любом виде теплообмена (II.2.2.4°) происходит обмен энергией непосредственно между хаотически движущимися частицами тел. При этом изменяются их внутренние энергии. Например, в процессе теплопроводности в неодинаково нагретом твердом теле частицы тела, находящиеся в более нагретых участках его, передают часть своей энергии частицам, расположенным в менее нагретых участках тела. В итоге происходит выравнивание внутренних энергий различных участков тела, выравнивание их температур и прекращение процесса теплопроводности.

Из предыдущего следует качественное различие и неравноценность работы и теплоты как форм передачи энергии. Часто две эти формы передачи энергии существуют одновременно. Например, при нагревании газа в сосуде с подвижным поршнем одновременно происходит увеличение объема газа и совершается работа против внешнего давления.

7°. *Замкнутой (изолированной)* называется термодинамическая система, которая не обменивается энергией ни в какой форме с внешней средой. Подобные системы подчиняются *закону сохранения энергии*: полная энергия изолированной системы остается неизменной при любых процессах, в ней происходящих.

8°. Термодинамическая система называется *адиабатически изолированной (система изолированная в тепловом отношении)*, если не происходит теплообмена между системой и внешней средой. Такая система может совершать работу над внешними телами. Вместе с тем, внешние силы могут совершать работу над системой. Примером может служить цилиндр с подвижным поршнем, наполненный газом и со всех сторон окруженный плотным слоем теплонепроницаемого войлока. Отсутствие теплообмена с внешней средой не исключает возможности газу совершать работу расширения (II.2.2.3°) и совершения над ним работы сжатия силами внешнего давления.

Система приближается по свойствам к адиабатически изолированной, если происходит столь быстрое изменение ее состояния, что за время процесса не успевает произойти теплообмен системы с внешней средой. Например, быстрое расширение газа, заключенного в баллоне, при кратковременном открывании крана.

§ II.2.3. Первый закон (первое начало) термодинамики

1°. *Первый закон (первое начало) термодинамики*: изменение внутренней энергии ΔU_{1-2} системы, которое происходит в процессе $1 \rightarrow 2$ перехода системы из состояния 1 в состояние 2, равно сумме работы A'_{1-2} , совершенной над системой внешними силами, и количества теплоты Q_{1-2} , сообщаемого системе:

$$\Delta U_{1-2} = A'_{1-2} + Q_{1-2},$$

$A'_{1-2} = -A_{1-2}$, где A_{1-2} есть работа, совершенная системой над внешними телами в процессе $1 \rightarrow 2$. Поэтому

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}.$$

Количество теплоты, сообщаемое системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил.

Для элементарного количества теплоты δQ , элементарной работы δA и бесконечно малого изменения dU внутренней энергии (II.2.1.3° и II.2.2.5°) первый закон термодинамики имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

2°. Если $\delta Q > 0$, то к системе подводится теплота. Если $\delta Q < 0$, то от системы отводится теплота. В конечном процессе $1 \rightarrow 2$ элементарные количества теплоты могут быть обоих знаков, и общее количество теплоты Q_{1-2} в процессе $1 \rightarrow 2$ равно алгебраической сумме теплот на всех участках этого процесса:

$$Q_{1-2} = \int_1^2 \delta Q.$$

Если система производит работу над внешними телами, то считается, что $\delta A > 0$. Если над системой внешними силами совершается работа, то считается, что $\delta A < 0$. Работа A_{1-2} , совершаемая системой в конечном процессе $1 \rightarrow 2$, равна алгебраической сумме работ δA , совершаемых системой на всех участках этого

процесса: $A_{1-2} = \int_1^2 \delta A.$

3°. Если система, например, рабочее тело в периодически действующем двигателе (II.4.1.1°) совершает круговой процесс $1 \rightarrow 1$ (II.1.3.7°), то $\Delta U_{1-1} = 0$ и $A_{1-1} = Q_{1-1}$. Нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы работу большую, чем та энергия, которая подводится к двигателю извне. Такой двигатель называется *вечным двигателем первого рода*. Невозможность создания вечного двигателя первого рода является также формулировкой первого закона термодинамики.

§ II.2.4. Графическое изображение термодинамических процессов и работы

1°. Уравнение состояния (II.1.3.6°) термодинамической системы позволяет по любым значениям двух параметров состояния, например, V и T определить значение третьего параметра, p . Поэтому в различных двумерных системах координат можно графически изобразить термодинамические процессы. Кроме самой распространенной диаграммы ($p-V$) применяются также диаграммы ($p-T$) и ($V-T$).

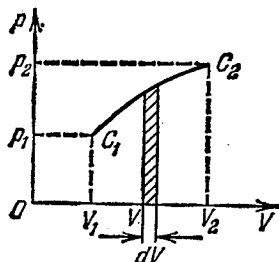


Рис. II.2.2

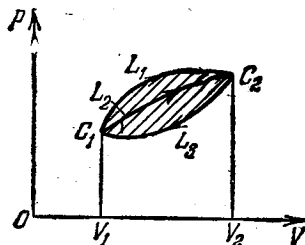


Рис. II.2.3

На рис. II.2.2 термодинамический процесс в диаграмме ($p-V$) изображается кривой C_1C_2 , а точки $C_1(p_1, V_1)$ и $C_2(p_2, V_2)$ характеризуют начальное и конечное состояния термодинамической системы.

Графически можно изображать только равновесные процессы (II.1.3.7°). Для неравновесных процессов (II.1.3.7°) нельзя говорить о параметрах состояния для всего тела (или системы), ибо они различны в разных частях тела (системы). Поэтому подобное графическое изображение неравновесных процессов невозможно.

2°. Элементарная работа δA , совершенная системой (II.2.2.3°) при равновесном процессе (II.1.3.7°), измеряется площадью криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. II.2.2. Работа системы A_{1-2} , совершаемая системой в процессе

C_1C_2 , равная $A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$, измеряется площадью, ограниченной кривой процесса

C_1C_2 , осью абсцисс и ординатами p_1 и p_2 точек C_1 и C_2 . Работа A_{1-2} зависит от того, каким образом система переходит из состояния C_1 в состояние C_2 , т. е. от вида процесса C_1C_2 . В диаграмме ($p-V$) (рис. II.2.3) работы, совершенные системой в процессах $C_1L_1C_2$, $C_1L_2C_2$ и $C_1L_3C_2$ и равные, соответственно, A_{L_1} , A_{L_2} и A_{L_3} , измеряются различными по величине площадями: $A_{L_1} > A_{L_2} > A_{L_3}$.

После завершения системой кругового процесса (II.4.1.1°) $C_1L_1C_2L_3C_1$ полная работа $A_{C_1-C_1}$ не равна нулю. Положительная работа расширения в процессе $C_1L_1C_2$ превышает отрицательную работу, которая совершается в процессе сжатия $C_2L_3C_1$. Результирующая положительная работа измеряется площадью, заштрихованной на рис. II.2.3.

3°. Работа A и количество теплоты Q не являются функциями состояния (II.1.3.8°). В различных процессах $1 \rightarrow 2$ изменения состояния системы к ней

подводятся различные количества теплоты, и совершаются различные работы. Элементарные значения δQ и δA не являются полными дифференциалами (II.2.1.3°).

§ II.2.5. Теплоемкость вещества. Применения первого начала термодинамики к изопроцессам в идеальном газе

1°. *Теплоемкостью C* тела называется физическая величина, численно равная отношению количества теплоты δQ , сообщаемого телу, к изменению dT температуры тела в рассматриваемом термодинамическом процессе:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Значение C зависит от массы тела, его химического состава, термодинамического состояния и процесса, в котором сообщается теплота δQ .

2°. *Удельной теплоемкостью c* называется теплоемкость единицы массы вещества. Для однородного тела $c = C/M$, где M — масса тела.

Молярной (мольной) теплоемкостью C_μ называется теплоемкость одного моля (IX) вещества: $C_\mu = \mu c$, где μ — молярная масса вещества (I.1.4.3°).

3°. Элементарное количество теплоты δQ , сообщаемое телу для изменения его температуры от T до $T + \Delta T$,

$$\delta Q = C dT.$$

Для однородного тела: $\delta Q = Mc dT = \frac{M}{\mu} C_\mu dT$, где M — масса тела, μ — молярная масса, M/μ — число молей, содержащихся в теле.

4. Для равновесных (II.1.3.7°) изопроцессов в газах (II.1.3.7°) первое начало термодинамики (II.2.3.1°) имеет вид:

$$\frac{M}{\mu} C_\mu dT = dU + p dV.$$

При изохорическом процессе (II.1.3.7°) нагревания или охлаждения газа (прямые 1-2 и 1-3 на рис. II.2.4) элементарная работа $\delta A = p dV$ не совершается ($dV = 0$). Все количество теплоты δQ , подводимое к газу, идет на изменение его внутренней энергии: $\delta Q = dU$. Если $C_{V\mu}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, то

$$dU = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} dT. \quad (*)$$

В определенной области температур можно считать, что $C_{V\mu} \approx \text{const}$ (см. подробнее II.3.7.4°) и изменение внутренней энергии газа ΔU_{1-2} при изменении его температуры от T_1 до T_2 , равное $\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1 = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} (T_2 - T_1)$, происходит за счет количества теплоты Q_{1-2} , сообщенной газу в изохорическом процессе

$$Q_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} (T_2 - T_1). \quad (**)$$

При $T_2 > T_1$ теплота $Q_{1-2} > 0$ и к газу подводится определенное количество теплоты; при $T_2 < T_1$ теплота $Q_{1-2} < 0$ и от газа отводится некоторое количество теплоты.

5°. Для идеального газа формулы (*) и (***) выражают изменения его внутренней энергии для любого процесса изменения состояния газа в интервале температур $(T_2 - T_1)$. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его химического состава, массы и температуры.

Для реальных газов (II.5.1.2°) внутренняя энергия включает в себя потенциальную энергию взаимодействия между молекулами (II.2.1.2°), зависящую от расстояния между ними. При изменении объема реального газа эта часть его внутренней энергии изменяется. Поэтому формулы (*) и (***) выражают изменение внутренней энергии реального газа только в изохорическом процессе его нагревания или охлаждения,

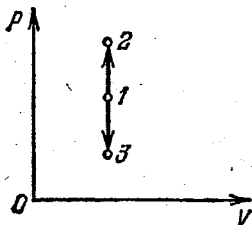


Рис. II.2.4

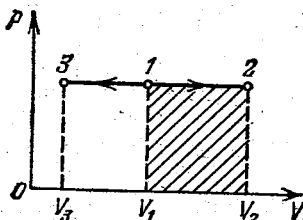


Рис. II.2.5

6°. Для произвольного равновесного (II.1.3.7°) процесса в идеальном газе первое начало термодинамики имеет вид:

$$\frac{M}{\mu} C_{\mu} dT = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} dT + p dV,$$

где C_{μ} — молярная теплоемкость идеального газа в данном процессе. Изобарический процесс (II.1.3.7°) нагревания (прямая 1—2 на рис. II.2.5) или охлаждения (прямая 1—3 на рис. II.2.5) газа осуществляется, например, в сосуде с подвижным поршнем, на который действует постоянное внешнее давление. Элементарная работа δA , совершаемая идеальным газом в изобарическом процессе,

$$\delta A = p dV = \frac{M}{\mu} R dT,$$

где использовано выражение $dV = \frac{M}{\mu} \frac{R}{p} dT$ из уравнения Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°) при $p = \text{const}$.

Универсальная газовая постоянная R (II.1.4.4°) численно равна работе, совершаемой одним молем идеального газа при изобарическом нагревании на один градус,

$$R = \frac{\delta A}{(M/\mu) \cdot dT}.$$

Работа A_{1-2} , совершаемая газом в процессе изобарического расширения 1—2,

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1).$$

изображается площадью, заштрихованной на рис. II.2.5. Для идеального газа работа A_{1-2} также равна

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} R (T_2 - T_1).$$

7°. Элементарное количество теплоты δQ , сообщаемое газу в изобарическом процессе,

$$\delta Q = \frac{M}{\mu} C_{p\mu} dT,$$

где $C_{p\mu}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном давлении. Если в интервале температур $(T_2 - T_1)$ величину $C_{p\mu}$ можно считать постоянной, то количество теплоты Q_{1-2} , которое подводится (или отводится) к газу (от него),

$$Q_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_{p\mu} (T_2 - T_1).$$

8°. Молярные теплоемкости газа $C_{p\mu}$ и $C_{v\mu}$ связаны уравнением Майера

$$C_{p\mu} - C_{v\mu} = R.$$

Для удельных теплоемкостей c_p и c_v оно имеет вид:

$$c_p - c_v = R/\mu,$$

где μ — молярная масса газа (I.1.4.3°).

Для теплоемкостей C_p и C_v

$$C_p - C_v = \frac{M}{\mu} R,$$

где M — масса газа, M/μ — число молей, содержащихся в газе.

Смысл уравнения Майера заключается в том, что при изобарическом нагревании газа на один градус к газу должно быть подведено большее количество теплоты, чем для такого же изохорического нагревания. Разность количеств теплот должна быть равна работе, совершенной газом при изобарическом расширении.

9°. Изотермический процесс (II.1.3.7°) расширения (или сжатия) газа может происходить в условиях, когда теплообмен (II.2.2.4°) между газом и внешней средой осуществляется при постоянной разности температур. Для этого теплоемкость (II.2.5.1°) внешней среды должна быть достаточно велика, и процесс расширения (или сжатия) должен происходить весьма медленно. Изотермическими являются процессы фазовых переходов I рода (II.5.3.3°) — кипение, конденсация и др. происходящие при постоянном внешнем давлении.

При изотермическом процессе в идеальном газе его внутренняя энергия не изменяется (II.2.5.5°), и все количество теплоты Q_{1-2} , сообщаемое газу, расходуется на совершение газом работы A_{1-2} против внешних сил:

$$Q_{1-2} = A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{M}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Здесь M/μ — количество молей газа, содержащихся в массе M , T — постоянная температура газа, V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа. Если газ изотермически расширяется ($V_2 > V_1$), то к нему подводится тепло $Q_{1-2} > 0$, и газ совершает положительную работу ($A_{1-2} > 0$), которая измеряется площадью, заштрихованной на рис. II.2.6. При изотермическом сжатии газа (процесс I—3 на рис. II.2.6) работа A_{1-2} , совершаемая газом, отрицательна ($A_{1-2} < 0$). Положи-

тельную работу ($A'_{1-3} = -A_{1-3} > 0$) совершают внешние силы. От газа при этом отводится некоторое количество теплоты ($Q_{1-3} < 0$). Теплоемкость вещества в изотермическом процессе равна бесконечности ($dT=0$, а $\delta Q \neq 0$).

10°. Адиабатический процесс (II.1.3.7°) происходит при условии $\delta Q=0$. Существенно, что для определения этого процесса условие $Q=0$ не годится, ибо оно не означает требования отсутствия теплообмена с внешней средой, а лишь равенство нулю алгебраической суммы количеств теплоты, подводимых и отводимых от газа на различных участках процесса. При адиабатическом процессе работа совершается идеальным газом за счет убыли его внутренней энергии

$$\delta A = -dU = -\frac{M}{\mu} C_{V\mu} dT,$$

где: $C_{V\mu}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, $\frac{M}{\mu}$ — число молей газа, содержащихся в массе M газа, dT — элементарное изменение температуры газа. Если газ адиабатически расширяется, то $\delta A = p dV > 0$ и происходит его охлаждение ($dT < 0$). При адиабатическом сжатии газа он нагревается: $\delta A = -p dV < 0$ и $dT > 0$.

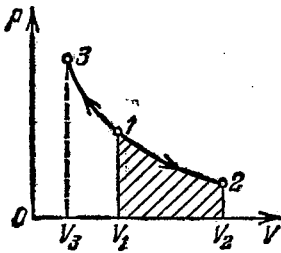


Рис. II.2,6

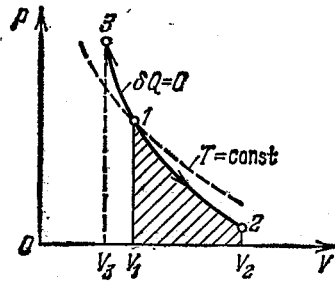


Рис. II.2,7

11°. Для равновесного адиабатического процесса (II.1.3.7°) справедливо уравнение Пуассона: $pV^\kappa = \text{const}$.

Используя уравнение Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°), можно из уравнения Пуассона найти связь между p и T , а также V и T в адиабатическом процессе:

$$pT^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{1}{\kappa-1}} = \text{const}.$$

В этих уравнениях безразмерная величина $\kappa = C_{p\mu}/C_{V\mu} = c_p/c_v > 1$ является коэффициентом Пуассона (показатель адиабаты). На рис. II.2.7 сплошная кривая — адиабата — изображает в $(p-V)$ -диаграмме адиабатический процесс, а пунктирная линия — изотерма — изотермический процесс при температуре, соответствующей начальному состоянию 1 газа. При адиабатическом процессе давление изменяется с изменением объема резче, чем при изотермическом процессе. При адиабатическом расширении уменьшается температура газа, и его давление падает быстрее, чем при соответствующем изотермическом расширении. При адиабатическом сжатии газа его давление возрастает быстрее, чем при изотермиче-

Таблица II.2.1

Название процесса				
	Изохорический	Изобарический	Изотермический	Адиабатический
Условие протекания процесса	$V = \text{const}$	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$\delta Q = 0$
Связь между параметрами состояния	$\frac{p}{T} = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$pV = \text{const}$	$pV^\kappa = \text{const},$ $pT^{\kappa/(1-\kappa)} = \text{const}$ $V T^{1/(\kappa-1)} = \text{const}$
Работа в процессе	$\delta A = 0,$ $A = 0$	$\delta A = p dV,$ $A = p (V_2 - V_1)$	$\delta A = p dV,$ $A = \frac{M}{\mu} \times$ $\times R T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta A = p dU =$ $= -dU,$ $A = -\Delta U =$ $= C_V (T_1 - T_2)$
Количество теплоты, сообщенное в процессе	$\delta Q = C_V dT,$ $Q =$ $= C_V (T_2 - T_1)$	$\delta Q = C_p dT,$ $Q =$ $= C_p (T_2 - T_1)$	$\delta Q = \delta A,$ $Q = A$	$\delta Q = 0,$ $Q = 0$
Изменение внутренней энергии	$dU = \delta Q,$ $U = Q$	$dU = C_V dT,$ $U =$ $= C_V (T_2 - T_1)$	$dU = 0,$ $\Delta U = 0$	$dU = -\delta A =$ $= C_V dT,$ $\Delta U = -A =$ $= C_V (T_2 - T_1)$
Теплоемкость	$C_V = \frac{M}{\mu} \frac{R}{(\kappa - 1)}$	$C_p = \frac{M}{\mu} \frac{\kappa R}{(\kappa - 1)}$	$C_T = \infty$	$C_{ад} = 0$

ском сжатии. Это связано с тем, что увеличение давления происходит за счет уменьшения объема газа и в связи с возрастанием температуры.

12°. Работа A_{1-2} , совершаемая газом при адиабатическом процессе 1→2, измеряется площадью, заштрихованной на рис. II.2.7.

Выражение для работы A_{1-2} при адиабатическом процессе:

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_V \mu (T_1 - T_2), \quad A_{1-2} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{\kappa - 1} (T_1 - T_2),$$

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right), \quad A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{(\kappa - 1)} \right].$$

В этих формулах M/μ — число молей газа, содержащихся в массе M , $C_{V\mu}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, κ — коэффициент Пуассона, p , V и T — параметры состояния газа, соответственно, в состояниях 1 и 2.

13°. В таблице II.2.1 приводятся сводные данные о характеристиках изопроцессов в газах.

Г л а в а II.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

§ II.3.1. Некоторые сведения о классической статистической физике

1°. *Кинетической теорией газов* называется учение о строении и физических свойствах газов, основанное на статистическом методе исследования (I.1.2.2°). В основе *классической статистической физики* помимо того, о чем сказано в I.1.2.1°, лежат следующие исходные положения.

2°. В системе частиц выполняются законы сохранения энергии (II.2.2.7°), импульса (I.2.7.1°) и момента импульса (I.4.4.1°). Для систем заряженных частиц выполняется также закон сохранения электрического заряда (III.1.1.3°).

3°. Все физические процессы, которые происходят в системе частиц, протекают в пространстве и времени *не прерывно*. Пространственно-временное описание любых физических явлений в классической механике и классической статистической физике предполагает возможность непрерывных изменений всех физических величин, характеризующих состояние системы. Например, скорость и энергия любой частицы могут непрерывно изменяться под действием различных сил.

4°. Любая частица в системе является «меченой». Ее можно отличить от всех остальных таких же частиц (*различимость тождественных частиц в классической статистической физике*).

5°. Любая частица системы может иметь произвольные значения координат и импульсов (или скоростей) независимо от значений этих величин для других частиц. Если в системе координат XYZ выбран произвольный бесконечно малый объем $dx dy dz$, то любая частица может находиться внутри этого объема, независимо от присутствия в этом объеме произвольного числа других частиц. Аналогично, любая частица может находиться внутри произвольного элементарного «объема» $dp_x dp_y dp_z$ в «пространстве импульсов» (или $du_x du_y du_z$ «пространства скоростей») независимо от присутствия в этих «объемах» произвольного числа других частиц. Это означает, что любая частица может иметь компоненты импульса по осям координат, заключенные в пределах от p_x до $p_x + dp_x$, от p_y до $p_y + dp_y$, от p_z до $p_z + dp_z$ (соответственно, компоненты скорости частицы по осям координат в пределах от u_x до $u_x + du_x$, от u_y до $u_y + du_y$, от u_z до $u_z + du_z$). Минимальная величина объемов $dx dy dz$ и $dp_x dp_y dp_z$ ничем не ограничена.

Пункты 2° и 3° относятся не только к классической статистической физике, а являются характерными для всей классической физики. Пункты 4° и 5° относятся только к классической статистической физике и не справедливы в квантовой статистике (VII.2.1.1°).

§ II.3.2. Основное уравнение кинетической теории газов

1°. Давление газа (II.1.3.2°) в сосуде есть результат столкновений молекул газа со стенками сосуда. Давление газа является макроскопическим проявлением теплового движения молекул (II.1.1.1°). При столкновении молекул газа со стенками сосуда (II.1.4.1°) молекулы передают стенкам свой импульс (I.1.3.4°). Изменения импульсов молекул приводят к появлению давления газа. Для идеального газа взаимные столкновения молекул в объеме сосуда не изменяют давления газа на стенки. Ввиду хаотичности теплового движения молекул (II.1.1.3°) давление газа на все стенки сосуда одинаково и, по определению (II.1.3.2°), представляет собой среднюю силу, действующую по направлению нормали на единицу площади поверхности стенки.

2°. Основное уравнение кинетической теории газов:

$$pV = \frac{2}{3} W_k,$$

где p — давление газа, V — его объем, $W_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i u_i^2}{2}$ — суммарная кинетическая энергия поступательного движения N молекул газа, находящихся в сосуде.

3°. Для однородного газа $m_i = m$ — массы всех молекул одинаковы, но скорости u_i различны (II.3.3.1°) и

$$W_k = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2.$$

Целесообразно ввести среднюю квадратичную скорость $v_{кв}$ поступательного движения молекул газа:

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2},$$

где N — общее число молекул в объеме V . Средняя квадратичная скорость характеризует всю совокупность молекул и не имеет смысла применительно к одной молекуле или небольшому числу молекул. Выражение для W_k при введении $v_{кв}$ имеет вид

$$W_k = \frac{1}{2} N m v_{кв}^2 \quad \text{и} \quad pV = \frac{1}{3} N m v_{кв}^2 = \frac{1}{3} M v_{кв}^2,$$

где $M = Nm$ — масса газа.

Основное уравнение для давления газа:

$$p = \frac{2}{3} W_{к0} = \frac{1}{3} n_0 m v_{кв}^2 = \frac{1}{3} \rho v_{кв}^2,$$

где $W_{к0} = \frac{W_k}{V}$; $n_0 = \frac{N}{V}$ — число молекул в единице объема, $\rho = n_0 m$ — плотность газа;

4°. Из сравнения уравнения Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°) с основным уравнением (п. 3°) $RT = \frac{1}{3} \mu v_{\text{кв}}^2$ следует, что

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,73\sqrt{pv},$$

где k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), m — масса молекулы, N_A — постоянная Авогадро (IX), p — давление газа, v — его удельный объем.

5°. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа:

$$\langle w_{\text{к}} \rangle = \frac{W_{\text{к}}}{N} = \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Средняя энергия $\langle w_{\text{к}} \rangle$ прямо пропорциональна абсолютной температуре и больше ни от чего не зависит (рис. II.3.1). Абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа. Этот результат кинетической теории газов не справедлив в области сверхнизких температур, близких к абсолютному нулю (VII.2.3.3°).

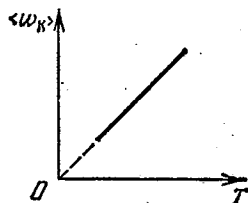


Рис. II.3.1

§ II.3.3. Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям и энергиям (Максвелловский закон распределения молекул по скоростям и энергиям)

1°. Закон распределения молекул идеального газа по скоростям, теоретически установленный Максвеллом, определяет, какое число dn молекул однородного одноатомного идеального газа из общего числа n_0 его молекул в единице объема имеет при данной температуре скорости, заключенные в интервале от u до $u+du$. Закон применим для газов в состоянии термодинамического равновесия (II.1.3.3°). Распределение молекул такого газа по скоростям является стационарным. Максвелловское распределение устанавливается в результате парных столкновений хаотически движущихся молекул газа. При этом распределение молекул по объему сосуда является равномерным — плотность газа постоянна.

2°. Наиболее употребительная форма закона распределения молекул по модулям скоростей

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right) 4\pi u^2 du.$$

Здесь u — модуль скорости молекулы, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

На рис. II.3.2 изображены кривые распределения молекул по скоростям при различных температурах $T_1 < T_2 < T_3$. Из кривых видно, что с повышением температуры наиболее вероятная скорость молекул (п. 4°) возрастает, а доля молекул, обладающих этой скоростью, уменьшается.

3°. Распределение Максвелла применяется также в форме:

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right) du_x du_y du_z.$$

где u_x , u_y и u_z — проекции скорости молекулы по осям координат. Ввиду хаотичности теплового движения молекул (II.1.1.1°) распределения молекул по проекциям скоростей u_i на оси координат ($i=x, y, z$) взаимно независимы, и поэтому

$$dn = n_0 f(u_x) f(u_y) f(u_z) du_x du_y du_z,$$

где

$$f(u_i) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mu_i^2}{2kT} \right) \quad (i=x, y, z)$$

есть функция распределения молекул по проекциям скоростей.

Распределение Максвелла изотропно. Это проявляется в том, что функция $f(u_x, u_y, u_z)$ зависит только от модуля скорости, а функция $f(u_i)$ одинакова по всем осям.

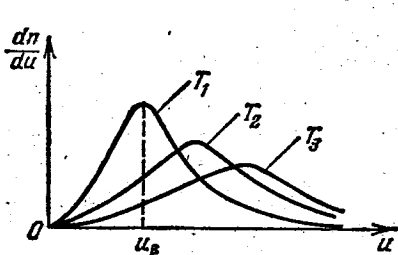


Рис. II.3.2

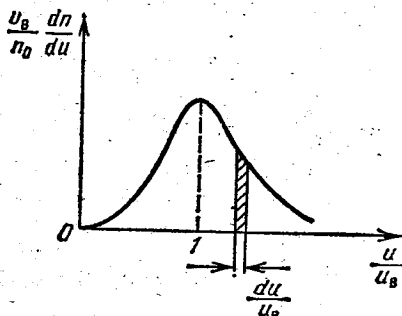


Рис. II.3.3

4°. Из закона распределения молекул по скоростям (п. 2°) можно определить наиболее вероятную скорость молекул u_B , соответствующую максимуму функции

$$f(u) = \frac{dn}{du} = 4\pi n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right).$$

Условие $\left[\frac{d}{du} \left(\exp \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right) u^2 \right) \right]_{u=u_B} = 0$ дает

$$u_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = v_{KB} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5°. Третий вид закона распределения молекул по скоростям:

$$dn = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2/u_B^2} \left(\frac{u}{u_B} \right)^2 \frac{du}{u_B}.$$

Доля молекул газа dn/n_0 , скорости которых лежат в интервале от u до $u+du$, численно равна площади dS заштрихованной криволинейной трапеции на рис. II.3.3,

где приведена кривая зависимости $\frac{u_B}{n_0} \frac{dn}{du}$ от $\frac{u}{u_B}$:

$$dS = \left(\frac{u_B}{n_0} \frac{dn}{du} \right) \frac{du}{u_B} = \frac{dn}{n_0}.$$

Площадь, ограниченная кривой рис. 11.3.3 и осью абсцисс, равна единице. Эта площадь характеризует доли молекул, имеющие всевозможные значения скоростей от 0 до ∞ .

6°. Средняя арифметическая скорость $\langle u \rangle$ поступательного движения молекул идеального газа, вычисленная с помощью закона распределения (п. 2°):

$$\langle u \rangle = v_{\text{кв}} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 1,60 \sqrt{v_{\text{рв}}}$$

7°. Распределение молекул идеального газа по энергиям определяет долю $\frac{dn_w}{n_0}$ молекул, которые из общего числа n_0 молекул имеют кинетические энергии $w_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$, заключенные в интервале от $w_{\text{к}}$ до $w_{\text{к}} + dw_{\text{к}}$:

$$dn_w = \frac{2n_0}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \exp\left(-\frac{w_{\text{к}}}{kT}\right) \sqrt{w_{\text{к}}} dw_{\text{к}}$$

Здесь $\frac{dn_w}{n_0} = f(w_{\text{к}}) dw_{\text{к}}$, где $f(w_{\text{к}})$ — функция распределения молекул идеального газа по энергиям.

Пример. Средняя кинетическая энергия $\langle w_{\text{к}} \rangle$ молекулы идеального газа

$$\langle w_{\text{к}} \rangle = \int_0^{\infty} w_{\text{к}} f(w_{\text{к}}) dw_{\text{к}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} w_{\text{к}} \exp\left(-\frac{w_{\text{к}}}{kT}\right) \sqrt{w_{\text{к}}} dw_{\text{к}} = \frac{3}{2} kT$$

(ср. 11.3.2.4°).

8°. Относительное движение (1.7.1.2°) двух частиц с массами m_1 и m_2 эквивалентно движению одной частицы с приведенной массой $m_{\text{пр}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Для однородного газа $m_1 = m_2 = m$ и $m_{\text{пр}} = m/2$. Распределение молекул по их относительным скоростям устанавливает долю $\frac{dn_{u_{\text{отн}}}}{n_0}$ молекул из общего их числа n_0 , относительные скорости $u_{\text{отн}}$ которых лежат в пределах от $u_{\text{отн}}$ до $u_{\text{отн}} + du_{\text{отн}}$,

$$dn_{u_{\text{отн}}} = n_0 \left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m u_{\text{отн}}^2}{4kT}\right) 4\pi u_{\text{отн}}^2 du_{\text{отн}}$$

Здесь $\frac{dn_{u_{\text{отн}}}}{n_0} = f(u_{\text{отн}}) du_{\text{отн}}$; $f(u_{\text{отн}}) = 4\pi \left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m u_{\text{отн}}^2}{4kT}\right) u_{\text{отн}}^2$ — функция распределения молекул идеального газа по относительным скоростям.

Пример. Средняя относительная скорость молекул $\langle u_{\text{отн}} \rangle$:

$$\langle u_{\text{отн}} \rangle = \int_0^{\infty} u_{\text{отн}} f(u_{\text{отн}}) du_{\text{отн}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{2} \langle u \rangle,$$

где $\langle u \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул (п. 6°).

§ II.3.4. Распределение частиц в потенциальном силовом поле (распределение Больцмана)

1°. Обычно газ находится всегда в потенциальном поле тяготения Земли (I.6.2.1°). Если бы этого поля не было, атмосферный воздух рассеялся бы во Вселенной. С другой стороны, если бы не было теплового движения, то молекулы атмосферного воздуха упали бы на Землю. Тяготение и тепловое движение приводят к стационарному состоянию газа, при котором происходит убыль концентрации и давления газа с возрастанием высоты над Землей.

2°. Если газ (или другая система частиц) находится во внешнем потенциальном силовом поле (I.3.1.6°), то распределение частиц по объему описывается законом Больцмана. Закон Больцмана устанавливает число частиц $dn(x, y, z)$, координаты которых находятся в интервалах от x до $x+dx$, от y до $y+dy$, от z до $z+dz$. Другими словами, $dn(x, y, z)$ есть число молекул, находящихся в элементарном объеме $dV=dx dy dz$. Закон Больцмана имеет вид:

$$dn(x, y, z) = \text{const} \exp\left(-\frac{w_n(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz,$$

где $w_n(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Значение const определяется из условия нормировки: $\int dn = n_0$, где n_0 — общее число частиц в единице объема.

Пример. Для частиц с массой m , находящихся в поле тяжести Земли, $w_n = mgh$ (I.3.3.3°), где g — ускорение силы тяжести (I.7.3.3°), h — высота. На любой высоте имеется максвелловское распределение молекулы по скоростям (II.3.3.1°). Число молекул, находящихся в объеме dV :

$$dn(x, y, z) = \text{const} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dV.$$

Плотность газа $\rho = m \frac{dn}{dV}$ убывает с возрастанием высоты по экспоненциальному закону: $\rho = \text{const} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$. Значение const можно определить из условия: $\rho = \rho_0 = \text{const}$ при $h=0$. Плотность газа или его давление изменяется по *барометрической формуле*:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) \quad \text{и} \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

3°. Распределение молекул газа по координатам и скоростям при наличии произвольного потенциального поля описывается *законом (распределением) Максвелла — Больцмана*:

$$dn = \text{const} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}\right) dp_x dp_y dp_z \exp\left(-\frac{w_n(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz,$$

где dn — число молекул, находящихся в шестимерном пространстве в элементе объема $d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$, $w_n(x, y, z)$ — потенциальная энергия молекулы во внешнем силовом поле в точке с координатами x, y, z и проекциями импульса

по осям p_x, p_y, p_z . Закон Максвелла — Больцмана представляет собой произведение двух функций распределения. Одна из них описывает распределения по координатам, а другая — по импульсам (или скоростям).

§ II.3.5. Средняя длина свободного пробега молекул

1°. Молекулы газа имеют конечные размеры (II.1.4.1°) и при тепловом движении непрерывно соударяются друг с другом. Между двумя последовательными соударениями молекулы, двигаясь равномерно и прямолинейно, проходят некоторые расстояния, называемые длинами свободных пробегов λ . *Средней длиной свободного пробега* (λ) называется среднее расстояние, которое молекула проходит без столкновения. Средняя длина свободного пробега является характеристикой всей совокупности молекул газа при данных p и T .

2°. За единицу времени каждая молекула испытывает *среднее число соударений* $\langle z \rangle$, равное

$$\langle z \rangle = \pi d^2 n_0 \langle u_{отн} \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n_0 \langle u \rangle.$$

Здесь d — эффективный диаметр молекулы (II.1.4.1°), n_0 — число молекул в единице объема газа, $\langle u_{отн} \rangle$ — средняя относительная скорость (II.3.3.8°), $\langle u \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекулы (II.3.3.6°).

3°. Среднее расстояние, которое молекула проходит за единицу времени, численно равно $\langle u \rangle$. Поэтому $\langle u \rangle = \langle \lambda \rangle \langle z \rangle$. Средняя длина свободного пробега (λ):

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}.$$

При постоянной температуре n_0 пропорционально давлению газа p (II.1.4.5°), и поэтому для данного газа средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению:

$$p_1 \langle \lambda_1 \rangle = p_2 \langle \lambda_2 \rangle = \text{const.}$$

Индексы 1 и 2 относятся к двум состояниям газа.

4°. Если из некоторого источника частиц («молекулярная печь») вырываются молекулы и с помощью диафрагмы образуется пучок молекул, то справедлив *закон распределения свободных пробегов* молекул в пучке:

$$N = N_0 e^{-x/\langle \lambda \rangle},$$

где N — число молекул в пучке, прошедших без соударений расстояние x , N_0 — число молекул в пучке при $x=0$, т. е. на выходе из диафрагмы.

§ II.3.6. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Внутренняя энергия идеального газа

1°. *Числом степеней свободы тела* называется наименьшее число координат (число независимых координат), которые нужно задать для того, чтобы полностью определить положение тела в пространстве.

Например, материальная точка, движущаяся вдоль одной из осей координат, имеет одну степень свободы. Та же точка, движущаяся на плоскости, обладает двумя степенями свободы. Положение материальной точки, свободно движущейся в пространстве, определяется тремя степенями свободы — координатами x, y и z . Абсолютно твердое тело (I.1.1.4°) имеет шесть степеней свободы: его положение в

пространстве определяется тремя координатами центра масс тела (I.2.3.3°), двумя углами θ и ϕ , определяющими направление некоторой оси, связанной с телом и проходящей через его центр масс (рис. II.3.4), и, кроме того, углом ψ , определяющим направление второй оси, связанной с телом и перпендикулярной к первой. Изменения трех координат центра масс при заданных углах θ , ϕ и ψ соответствуют поступательному движению абсолютно твердого тела. Координаты центра масс являются тремя степенями свободы поступательного движения. Изменения углов θ , ϕ или ψ при неизменном положении центра масс приводят к вращению абсолютно твердого тела. Поэтому соответствующие степени свободы называются вращательными. Для определения положения в пространстве не абсолютно твердого тела, различные части которого могут смещаться друг относительно друга, вводятся дополнительные степени свободы колебательного движения (п. 5°).

2°. В ряде задач молекула одноатомного газа может рассматриваться как материальная точка (ср. II.1.4.1°). Основанием для этого является то, что масса такого атома сосредоточена практически целиком в ядре (VIII.1.1.1°), имеющем весьма малые размеры. Молекула одноатомного газа имеет три степени свободы поступательного движения. Ее средняя кинетическая энергия $\langle w_k \rangle$ равна кинетической энергии молекулы, движущейся со скоростью, равной средней квадратичной скорости $v_{кв}$ (II. 3.2.4°):

$$\langle w_k \rangle = 3kT/2.$$

Эта энергия, ввиду хаотичности теплового движения молекул, равномерно распределяется между тремя степенями свободы, так что в среднем на каждую степень свободы поступательного движения одноатомной молекулы приходится одинаковая кинетическая энергия $\langle w_{к0} \rangle = \langle w_k \rangle / 3 = kT/2$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

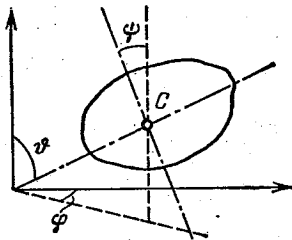


Рис. II.3.4

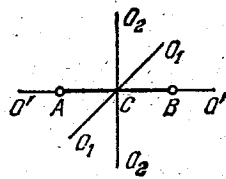


Рис. II.3.5

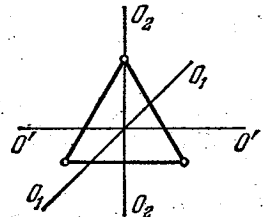


Рис. II.3.6

3°. Молекула двухатомного газа в первом приближении представляет собой два атома A и B , жестко связанных между собой (рис. II.3.5). Кроме трех степеней свободы поступательного движения со скоростью центра инерции C (I.2.3.3°) такая молекула имеет еще две степени свободы вращательного движения вокруг осей O_1-O_1 и O_2-O_2 . Вращение вокруг третьей оси $O'-O'$ не вносит вклада в энергию молекулы, ибо ее момент инерции относительно этой оси ничтожно мал (II.3.7.5°). Таким образом, двухатомная молекула имеет пять степеней свободы. Молекулы, состоящие из трех и более атомов, имеют 6 степеней свободы: три поступательных и три вращательных (рис. II.3.6).

4°. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы: на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $kT/2$. Если молекула имеет i степеней свободы, то ее средняя кинетическая энергия $\langle w_k \rangle$ равна $\langle w_k \rangle = i \frac{kT}{2}$.

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы приводит к выводу о равноправности всех степеней свободы молекулы — все они вносят одинаковый вклад в ее среднюю энергию. Этот вывод в действительности имеет ограниченную область применимости и пересмотрен в квантовой статистике (VII.2.1.1°).

5°. Для реальных, не абсолютно твердых молекул колебательные степени свободы вносят вклад в энергию молекулы в соответствии с законом пункта 4°. На каждую колебательную степень свободы приходится не только кинетическая w_k , но и потенциальная энергия w_p . Для гармонических колебаний (IV.1.1.3°) $\langle w_{k0} \rangle = \langle w_{p0} \rangle$. По закону п. 4°:

$$\langle w_{k0} \rangle = \langle w_{p0} \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где $\langle w_{k0} \rangle$ и $\langle w_{p0} \rangle$ — средние кинетическая и потенциальная энергии на одну степень свободы колебательного движения.

Среднее значение $\langle w_0 \rangle$ полной энергии, приходящейся на одну степень свободы колебательного движения:

$$\langle w_0 \rangle = \langle w_{k0} \rangle + \langle w_{p0} \rangle = 2 \langle w_{k0} \rangle = kT.$$

Это справедливо при гармонических колебаниях частиц (атомов, молекул или ионов), колеблющихся в узлах кристаллических решеток твердых тел (II.1.1.4°).

6°. Внутренняя энергия (II.2.1.2°) многоатомного газа представляет собой кинетическую энергию всех видов движения его частиц. Для одного моля такого газа:

$$U = \langle w_k \rangle N_A = \frac{i}{2} k N_A T = i \frac{RT}{2},$$

где N_A — постоянная Авогадро (IX), i — число степеней свободы молекулы (п. 4°), R — универсальная газовая постоянная (II.1.4.4°).

§ 11.3.7. Теплоемкости одноатомных, двухатомных и многоатомных газов

1°. Молекулы одноатомного газа имеют три степени свободы (II.3.6.2°), и согласно (II.3.6.6°) внутренняя энергия одного моля газа $U = \frac{3}{2} k N_A T$.

Молярная теплоемкость такого газа при постоянном объеме (II.2.5.4°):

$$C_{V\mu} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R = 1246,5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \approx 3 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

ибо

$$R \approx 2 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Для многоатомного газа, молекула которого имеет i степеней свободы,

$$C_{V\mu} = \frac{iR}{2} = 4,16i \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \approx i \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

2°. Молярная теплоемкость $C_{p\mu}$ при постоянном давлении (II.2.5.7°—8°) газа, молекула которого имеет i степеней свободы,

$$C_{p\mu} = \frac{(i+2)R}{2} = 4,16(i+2) \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \approx (i+2) \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.4°) приводит к выводу, что теплоемкости газа зависят от числа степеней свободы молекул и не зависят от температуры. Экспериментальные данные опровергают эти выводы классической теории теплоемкостей. Опыты показывают, что с увеличением температуры теплоемкости газов возрастают, а при понижении температуры — убывают.

3°. Теоретическое объяснение экспериментальных данных о зависимости теплоемкости от температуры в широком интервале температур дано в *квантовой теории теплоемкостей*. В этой теории принимаются во внимание следующие результаты квантовомеханического описания свойств двух- и многоатомных молекул:

а) Из четырех частей, составляющих энергию ω молекулы *) (VI.2.5.2°)

$$\omega = \omega_{\text{пост}} + \omega_{\text{эд}} + \omega_{\text{кол}} + \omega_{\text{вращ}},$$

лишь $\omega_{\text{пост}}$ — энергия поступательного движения центра масс молекулы (I.2.3.3°) изменяется непрерывно. Энергии всех видов внутренних движений молекулы квантованы и принимают лишь дискретные значения (VI.2.4.5°). Речь идет о следующих энергиях: $\omega_{\text{эд}}$ — энергия движения ее электронов, $\omega_{\text{кол}}$ — энергия колебательного движения ядер в молекуле и $\omega_{\text{вращ}}$ — энергия вращательного движения молекулы.

б) Внутренние движения молекулы в первом приближении могут рассматриваться как независимые. Так, при малых амплитудах колебаний ядер можно не учитывать изменений моментов инерции (I.4.2.1°) молекулы за счет колебаний и пренебрегать влиянием колебательного движения в молекуле на ее вращения.

в) При нагревании вещества на один градус при обычных температурах не происходит изменений энергии электронных движений в молекуле. Соседние энергетические уровни электронов в молекуле раздвинуты на энергии порядка нескольких эВ, что соответствует температурам в несколько десятков тысяч градусов (п. 6°). Поэтому при решении вопроса о теплоемкостях одноатомных и многоатомных газов вплоть до самых высоких температур можно пренебрегать энергией электронных движений в молекуле.

4°. Колебательное движение ядер в молекуле в первом приближении описывается как колебания гармонического осциллятора (VI.1.5.4°), масса m которого равна приведенной массе системы колеблющихся атомов $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (m_1 и m_2 — массы атомов). Энергия колебательного движения молекулы при этом равна

$$\omega_{\text{кол}} = h\nu_0 \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

*) При этом не учитывается внутриядерная энергия молекулы, которая не влияет на теплоемкость молекул.

где n — квантовое число, принимающее целочисленные значения: $n=0, 1, 2, \dots$; ν_0 — собственная частота колебаний (VI.1.5.5°), h — постоянная Планка (IX). Энергия гармонического осциллятора, при $n=0$ равная $h\nu_0/2$, сохраняется при сколь угодно глубоком охлаждении, в том числе и при $T \rightarrow 0$ (VI.1.5.6°). Разность $\Delta w_{\text{кол}}$ энергий двух соседних колебательных энергетических уровней $\Delta w_{\text{кол}} = h\nu_0$ не зависит от квантового числа. При комнатных и более низких температурах справедливо условие: $\Delta w_{\text{кол}} \gg kT$. Изменений энергии колебательного движения молекул при таких температурах не наблюдается. При расчетах теплоемкостей газов в этих условиях колебательные степени свободы молекул можно не учитывать. В общем случае колебательные движения вносят вклад во внутреннюю энергию $U_{\text{кол}}$ (II.2.1.2°) и теплоемкость $C_{V\mu}$ (II.2.5.2°). Для одного моля

$$U_{\text{кол}} = \frac{N_A h\nu}{2} \left[\frac{\exp\left(\frac{h\nu}{2kT}\right) + \exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)}{\exp\left(\frac{h\nu}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)} \right],$$

$$C_{V\mu\text{кол}} = \frac{N_A k}{4} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \left[\frac{\exp\left(\frac{h\nu}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)}{2} \right]^{-2},$$

где T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), N_A — постоянная Авогадро (IX). При высоких температурах ($T \gg \frac{h\nu}{k}$)

$$U_{\text{кол}} \approx N_A kT = RT, \quad C_{V\mu\text{кол}} \approx N_A k = R.$$

Результаты совпадают с классическими, которые получаются из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.5°). Энергию осциллятора в этих условиях можно считать изменяющейся непрерывно, ибо $\Delta w_{\text{кол}} \ll kT$. При достаточно низких температурах

$$\left(T \ll \frac{h\nu}{k}\right)$$

$$U_{\text{кол}} \approx \frac{N_A h\nu}{2} + N_A h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right),$$

$$C_{V\mu\text{кол}} \approx N_A k \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

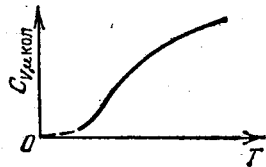


Рис. 11.3.7

При $T \rightarrow 0$ энергия $U_{\text{кол}} \rightarrow \frac{N_A h\nu}{2}$. Эта величина называется *нулевой энергией колебаний системы* (VI.1.5.6°). При $T \rightarrow 0$ теплоемкость $C_{V\mu\text{кол}} \rightarrow 0$ в соответствии с третьим началом термодинамики (II.4.8.4°). На рис. 11.3.7 изображена зависимость $C_{V\mu\text{кол}} = f(T)$ для двухатомных газов.

5°. Вращательное движение двухатомной молекулы в первом приближении можно рассматривать как движение жесткой гантели, которая вращается вокруг

центра инерции с моментом инерции $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$, где $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса молекулы (m_1 и m_2 — массы атомов), r_0 — расстояние между

атомами в молекуле. Энергия такой системы

$$\omega_{\text{вращ}} = \frac{h^2}{8\pi I} J(J+1),$$

где J — квантовое число, которое принимает целочисленные значения $J=0, 1, 2, \dots$. Разность $\Delta\omega_{\text{вращ}}$ энергий двух соседних вращательных энергетических уровней

$$\Delta\omega_{\text{вращ}} = \frac{2h^2}{8\pi^2 I} (J+1).$$

Величина $\Delta\omega_{\text{вращ}}$ в 800—1000 раз меньше $\Delta\omega_{\text{кол}}$.

При обычных температурах для двухатомных и некоторых многоатомных газов (пары воды, метан и др.) $\Delta\omega_{\text{вращ}} \ll kT$ и можно пренебречь квантованием энергии вращательного движения молекул. В этих условиях можно пользоваться при вычислении вклада в теплоемкость вращательного движения законом равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.4°).

Вклад вращательного движения двухатомных молекул во внутреннюю энергию и теплоемкость одного моля равен:

а) При высоких температурах ($T \gg \frac{h^2}{8\pi^2 kI}$)

$$U_{\text{вращ}} \approx N_A kT \left(1 - \frac{h^2}{24\pi^2 I kT}\right), \quad C_{V\mu\text{вращ}} \approx N_A k = R.$$

Теплоемкость $C_{V\mu\text{вращ}}$ при высоких температурах имеет значение, вытекающее из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.4°).

б) При низких температурах ($T \ll \frac{h^2}{8\pi^2 I k}$)

$$U_{\text{вращ}} \approx \frac{3h^2 N_A}{4\pi^2 I} \exp\left(-\frac{h^2}{4\pi^2 I kT}\right), \quad C_{V\mu\text{вращ}} \approx 3 \left(\frac{h^2}{4\pi^2 I}\right)^2 \frac{N_A}{kT^2} \exp\left(-\frac{h^2}{4\pi^2 I kT}\right),$$

при $T \rightarrow 0$ теплоемкость $C_{V\mu\text{вращ}} \rightarrow 0$ (п. 4°). Общий ход зависимости $C_{V\mu\text{вращ}} = f(T)$ такой же, как изображен на рис. II.3.7.

По мере охлаждения газа уменьшение энергии его молекул приводит к тому, что уменьшается число молекул, переходящих на более высокие вращательные энергетические уровни. При достаточно низких температурах газа вращение его молекул практически не может быть возбуждено, и вращательные степени свободы не вносят вклада в теплоемкость газа. Теплоемкость всех газов при низких температурах становится такой же, как и для одноатомных газов, у которых молекулы не имеют вращательных степеней свободы.

б°. При весьма высоких температурах порядка десятков тысяч градусов происходит увеличение теплоемкости, связанное с тем, что значения kT при этих условиях по порядку величины сравнимы с $\Delta\omega_{\text{эл}}$ — изменением энергии электронов при их переходах с более низких энергетических уровней на более высокие. Кроме того, при высоких температурах вклад в теплоемкость вносят процессы диссоциации и ионизации газов.

§ 11.3.8. Явления переноса в газах

1°. Явления переноса объединяют группу процессов, связанных с неоднородностями плотности, температуры или скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев вещества. Выравнивание неоднородностей приводит к возникновению явлений переноса. К явлениям переноса относятся диффузия, внутреннее трение и теплопроводность.

2°. Явления переноса в газах и жидкостях состоят в том, что в этих веществах возникает упорядоченный, направленный перенос массы (диффузия), импульса (внутреннее трение) и внутренней энергии (теплопроводность). При этом в газах нарушаются полная хаотичность движения молекул и максвелловское распределение молекул по скоростям (11.3.3.2°). Отклонениями от закона Максвелла объясняется направленный перенос физических характеристик вещества в явлениях переноса. В простейших случаях одномерных явлений переноса физические величины, определяющие эти явления, зависят только от одной декартовой координаты.

3°. Явлением диффузии называется самопроизвольное взаимное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей или твердых тел. В химически чистых газах при постоянной температуре диффузия возникает вследствие неодинаковой плотности в различных частях объема газа. Для смеси газов диффузия вызывается различием в плотностях отдельных газов в разных частях объема смеси.

В химически однородном газе явление диффузии заключается в переносе массы газа из мест с большей плотностью газа в места с меньшей плотностью и подчиняется закону Фика:

$$m_{\text{сек}} = -D \frac{d\rho}{dx}.$$

Здесь $m_{\text{сек}}$ — удельный поток массы, численно равный массе вещества, которое диффундирует за единицу времени через плоскую поверхность с площадью равной единице, перпендикулярную к направлению переноса вещества, ρ — плотность газа, D — коэффициент диффузии. Производная $\frac{d\rho}{dx}$ численно равна градиенту плотности, изменению плотности на единицу длины. Коэффициент диффузии численно равен удельному потоку массы при единичном градиенте плотности. Знак минус в законе Фика показывает, что перенос массы осуществляется в направлении убывания плотности.

Другая форма закона Фика:

$$j = -D \frac{dn_0}{dx},$$

где $j = \frac{m_{\text{сек}}}{m}$ — плотность потока молекул при диффузии, т. е. число молекул, диффундирующих за единицу времени через поверхность, указанную в п. 3°, n_0 — концентрация молекул, равная числу их в единице объема, m — масса одной молекулы, так что $\rho = n_0 m$.

Выражение для коэффициента диффузии D , которое получается в кинетической теории газов:

$$D = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle,$$

где $\langle u \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения молекул (II.3.3.6°), $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега (II.3.5.1°).

4°. Явлением *внутреннего трения (вязкости)* называется появление сил трения между слоями газа или жидкости, движущимися друг относительно друга параллельно и с разными по величине скоростями. Слой, движущийся быстрее,

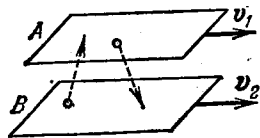


Рис. II.3.8

действует с ускоряющей силой на более медленно движущийся слой. Наоборот, медленно движущийся слой тормозит более быстро движущийся слой газа. Силы внутреннего трения, которые возникают при этом, направлены по касательной к поверхности соприкосновения слоев. Причиной вязкости является наложение упорядоченного движения слоев газа с различными скоростями v и теплового хаотического движения молекул со скоростями, зависящими от температуры. Хаотическое движение молекул переносит их из слоя B , движущегося со скоростью v_2 , в слой A , движущийся со скоростью v_1 (рис. II.3.8). При этом происходит перенос импульсов mv упорядоченного движения молекул. Если $v_1 > v_2$, то молекулы, ранее бывшие в слое B , оказавшись в слое A , при столкновениях с его молекулами ускоряют свое упорядоченное движение, а упорядоченно движущиеся молекулы слоя A замедляются. Наоборот, при переходе молекул из быстрее движущегося слоя A в слой B они переносят большие импульсы mv_1 , и межмолекулярные соударения в слое B ускоряют движение молекул этого слоя.

Явление внутреннего трения описывается *законом Ньютона*:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dn},$$

где τ — *напряжение трения*, т. е. физическая величина, численно равная силе внутреннего трения действующей на единицу площади поверхности слоя, $\frac{dv}{dn}$ — градиент скорости — изменение скорости движения слоев на единицу длины в направлении внутренней нормали n к поверхности слоя. Сила внутреннего трения противоположна по направлению производной по n от вектора v скорости движения газа.

Величина η называется *коэффициентом внутреннего трения* или *динамическим коэффициентом вязкости*. Коэффициент внутреннего трения численно равен напряжению трения при градиенте скорости, равном единице.

Кинематическим коэффициентом вязкости называется величина, равная $\nu = \eta/\rho$, где ρ — плотность вещества.

Коэффициент внутреннего трения вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle \rho,$$

где $\langle u \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения молекул (II.3.3.6°), $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега (II.3.5.1°). Коэффициент внутреннего трения не зависит от давления (или плотности) газа, поскольку $\langle \lambda \rangle \sim 1/\rho$. Объясняется это тем, что при изотермическом увеличении плотности газа, например, в два раза, вдвое увеличивается число переносчиков импульса, но каж-

дая молекула (атом) проходит без столкновения вдвое меньшее расстояние и переносит вдвое меньший импульс. Поэтому в целом перенос импульса не меняется.

б°. Третье явление переноса — *теплопроводность* — осуществляется при условии наличия разности температур, созданной в теле в некотором направлении. Например, две противоположные стенки сосуда с газом могут иметь разные температуры, поддерживаемые внешними источниками. Тогда молекулы газа в разных местах его объема будут иметь различные средние кинетические энергии (II.3.2.4°). В этих условиях хаотическое тепловое движение молекул приведет к направленному переносу энергии в форме теплоты (II.2.2.6°). Молекулы, перешедшие из нагретых частей объема газа в более холодные, в процессе молекулярных соударений отдают часть своей средней кинетической энергии окружающим молекулам. Наоборот, медленно движущиеся молекулы, переходя из менее нагретых частей объема газа в более нагретые, увеличивают свою среднюю кинетическую энергию за счет соударений с молекулами, имеющими большие скорости.

При одномерной теплопроводности, когда температура газа зависит только от одной координаты $T=T(x)$, перенос энергии в форме теплоты происходит вдоль оси Ox , причем справедлив закон Фурье:

$$q_{\text{сек}} = -K \frac{dT}{dx},$$

где $q_{\text{сек}}$ — *удельный тепловой поток* — физическая величина, численно равная энергии, передаваемой в форме теплоты за единицу времени через плоскую поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно к направлению переноса энергии. Величина K называется *коэффициентом теплопроводности*.

Он численно равен удельному тепловому потоку при градиенте температуры $\frac{dT}{dx}$ — изменению температуры на единицу длины — равном единице. Знак минус в законе Фурье указывает на то, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убыли температуры.

Согласно кинетической теории газов коэффициент теплопроводности равен

$$K = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle c_v \rho,$$

где c_v — удельная теплоемкость газа в изохорическом процессе (II.2.5.4°). Остальные обозначения указаны в п. 4°. Из формулы следует независимость коэффициента теплопроводности от плотности газа. Объясняется это подобно тому, как в п. 4° выяснена причина независимости η от плотности.

б°. Законы явлений переноса, приведенные в пп. 3°—5°, могут быть записаны в другом виде:

$$dM = -D \frac{dp}{dx} dS dt, \quad dF = -\eta \frac{dv}{dn} dS, \quad dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt.$$

Здесь dM — масса, которая переносится при диффузии за время dt через элементарную площадку dS , расположенную перпендикулярно к направлению, вдоль которого происходит диффузия; dQ — количество энергии, которая в форме теплоты переносится при теплопроводности за время dt через ту же площадку dS , расположенную перпендикулярно к оси Ox ; dF — сила внутреннего трения, действующая на элемент поверхности слоя с площадью dS . Обозначения остальных величин в формулах приведены в пп. 3°—5°.

7°. Между коэффициентами явлений переноса имеются простые зависимости:

$$\eta = \rho D \quad \text{и} \quad \frac{K}{\eta c_V} = 1.$$

Из этих формул по одному из коэффициентов переноса могут быть найдены все остальные (при известных значениях ρ и c_V). В свою очередь, по известным коэффициентам переноса можно определить такие важнейшие характеристики газа, как средняя длина свободного пробега его молекул (II.3.5.1°) и эффективный диаметр молекулы (II.1.4.1°).

В таблице II.3.1 приведены сводные данные о явлениях переноса.

Таблица II.3.1

Явление	Переносимая физическая величина	Уравнение переноса	Формула для коэффициента переноса
Диффузия	Масса	$dM = -D \frac{dp}{dx} dS dt$	$D = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle$
Внутреннее трение (вязкость)	Импульс	$dF = -\eta \frac{dv}{dn} dS$	$\eta = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle \rho$
Теплопроводность	Энергия в форме теплоты	$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt$	$K = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle c_V \rho$

§ II.3.9. Понятие о свойствах разреженных газов

1°. Газ называется *разреженным (разреженный газ)*, если его плотность столь мала, что средняя длина свободного пробега молекул $\langle \lambda \rangle$ может быть сравнима с линейными размерами d сосуда, в котором находится газ. Такое состояние газа называется также *вакуумом*. Различаются следующие степени разрежения газа: сверхвысокий ($\langle \lambda \rangle \gg d$), высокий ($\langle \lambda \rangle > d$), средний ($\langle \lambda \rangle \approx d$) и низкий ($\langle \lambda \rangle < d$) вакуум. В трех первых степенях вакуума свойства разреженных газов отличаются от свойств неразреженных газов. Это видно из таблицы II.3.2, где приведены некоторые характеристики различных степеней вакуума.

2°. В состоянии **высокого вакуума** (п. 1°) уменьшение плотности разреженного газа приводит к соответствующей убыли числа частиц без изменения $\langle \lambda \rangle$. Следовательно, уменьшается число носителей импульса или внутренней энергии в явлениях вязкости и теплопроводности. Коэффициенты переноса в этих явлениях прямо пропорциональны плотности газа (ср. II.3.8.4° и II.3.8.5°). В сильно разреженных газах внутреннее трение по существу отсутствует. Вместо него возникает внешнее трение движущегося газа о стенки сосуда, связанное с тем, что молекулы изменяют свои импульсы только при взаимодействии со стенками сосуда. В этих условиях напряжение трения в первом приближении пропорционально плотности газа и скорости его движения (ср. II.3.8.4°).

Таблица II.3.2

Характеристика	Вакуум			
	Низкий	Средний	Высокий	Сверхвысокий
Давление в мм.рт.ст.	760—1	1—10 ⁻³	10 ⁻³ —10 ⁻⁷	10 ⁻⁸ и менее
Число молекул в единице объема (в м ⁻³)	10 ²⁵ —10 ²²	10 ²² —10 ¹⁹	10 ¹⁹ —10 ¹³	10 ¹³ и менее
Зависимость от давления коэффициентов K и η	Не зависят от давления	Зависимость от p определяется параметром $\langle \lambda \rangle / d$	Прямо пропорциональны давлению	Теплопроводность и вязкость практически отсутствуют

Удельный тепловой поток в сильно разреженных газах пропорционален разности температур и плотности газа (ср. II.3.8.5°).

3°. Стационарное состояние разреженного газа, находящегося в двух сосудах, соединенных узкой трубкой, возможно при условии равенства встречных потоков частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой: $n_1 \langle u_1 \rangle = n_2 \langle u_2 \rangle$, где n_1 и n_2 — числа молекул в 1 см³ в обоих сосудах, $\langle u_1 \rangle$ и $\langle u_2 \rangle$ — их средние арифметические скорости (II.3.3.6°).

Если T_1 и T_2 — температуры газа в сосудах, то предыдущее условие стационарности можно переписать в виде уравнения, выражающего эффект Кнудсена:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

где p_1 и p_2 — давления разреженного газа в обоих сосудах.

Глава II.4. ВТОРОЙ ЗАКОН (ВТОРОЕ НАЧАЛО) ТЕРМОДИНАМИКИ

§ II.4.1. Круговые процессы (циклы). Цикл Карно

1°. *Круговым процессом* или *циклом* называется такая совокупность термодинамических процессов (II.1.3.7°), в результате которых система возвращается в исходное состояние. В диаграммах состояния $p - V$, $p - T$ и других круговые равновесные процессы (II.1.3.7°) изображаются замкнутыми кривыми, ибо двум тождественным состояниям — началу и концу кругового процесса — соответствует на диаграмме одна и та же точка.

Термодинамическая система, совершающая круговой процесс и обменивающаяся энергией с другими телами, называется *рабочим телом*. Обычно таким телом является газ.

2°. Произвольный круговой, равновесный процесс $C_1 a C_2 b C_1$ (рис. II.4.1), совершаемый идеальным газом, можно разбить на процесс расширения газа из состояния C_1 в состояние C_2 (кривая $C_1 a C_2$) и процесс сжатия газа из состояния

C_2 в состояние C_1 (процесс C_2bC_1). При расширении газа он совершает положительную работу A_1 , измеряемую площадью фигуры $V_1C_1aC_2V_2$ (II.2.4.2). Сжатие газа происходит под действием внешних сил, которые совершают положительную работу $A_2' = -A_2$, которая измеряется площадью фигуры $V_1C_1bC_2V_2$. Поскольку $A_1 > A_2'$ (рис. II.4.1), то газ за цикл совершает положительную работу $A = A_1 + A_2 = A_1 - A_2'$, измеряемую площадью, ограниченной кривой процесса $C_1aC_2bC_1$. Эта площадь заштрихована на рис. II.4.1.

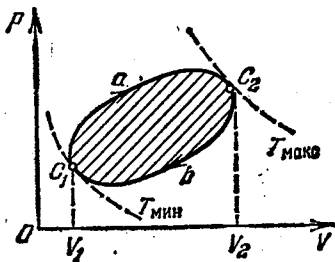


Рис. II.4.1

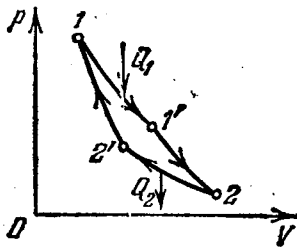


Рис. II.4.2

3°. *Прямым циклом* называется круговой процесс, в котором система совершает положительную работу $A = \oint p dV > 0$. Замкнутая кривая на диаграмме $p-V$, изображающая прямой цикл, описывается по часовой стрелке (рис. II.4.1). Примером прямого цикла является цикл, совершаемый рабочим телом в тепловом двигателе. В таком двигателе рабочее тело (п. 1°) получает энергию в форме теплоты (II.2.2.1°) от внешних источников и часть ее отдает в форме работы (II.2.2.1°) (см. п. 5°).

4°. *Обратным циклом* называется круговой процесс, в котором система совершает отрицательную работу $A = \oint p dV < 0$. В диаграмме $p-V$ обратный цикл изображается замкнутой кривой, проходимой против часовой стрелки. Примером обратного цикла является цикл рабочего тела в холодильной установке. В такой установке рабочее тело получает энергию в форме работы и передает энергию в форме теплоты от холодного тела к более нагретому телу (см. п. 5°).

5°. В связи с тем, что полное изменение внутренней энергии газа в результате кругового процесса равно нулю (II.2.1.3°), первый закон термодинамики (II.2.3.1°) для такого процесса имеет вид:

$$Q = \Delta U + A = A,$$

где Q — общее количество теплоты, сообщенной газу в круговом процессе, A — работа газа в таком процессе.

В прямом цикле (п. 3°) $Q > 0$ и $A > 0$ — газ совершает работу за счет сообщенной ему теплоты. В обратном цикле (п. 4°) над газом совершается работа $A' = -A$ ($A > 0$), и от газа отводится эквивалентное этой работе количество теплоты.

6°. *Циклом Карно* называется круговой процесс, изображенный на рис. II.4.2. *Прямой цикл Карно* состоит из четырех последовательных процессов: изотерми-

ческого расширения $1-1'$ при температуре T_1 ($T_1'=T_1$), адиабатического расширения $1'-2$, изотермического сжатия $2-2'$ при температуре T_2 ($T_2'=T_2$) и адиабатического сжатия $2'-1$.

7°. Практически прямой цикл Карно осуществляется газом, заключенным в сосуде с подвижным поршнем. В процессе $1-1'$ газ находится в тепловом контакте и равновесии с *нагревателем (теплотдатчиком)*, имеющим постоянную температуру T_1^* . От нагревателя газ получает некоторое количество теплоты Q_1 ($Q_1 > 0$). Считается, что температура нагревателя при этом не изменяется, что, строго говоря, возможно при бесконечной теплоемкости нагревателя. В процессе $1'-2$ газ теплоизолируется и расширение его происходит адиабатически **) (II.2.5.10°). На участке $2-2'$ газ приводится в тепловой контакт с *холодильником (теплоприемником)*, имеющим постоянную температуру T_2 ($T_2 < T_1$). При этом газ изотермически сжимается и передает холодильнику некоторое количество теплоты $-Q_2$ (если считать, что Q_2 есть количество теплоты, получаемой газом от холодильника). Теплоемкость холодильника считается бесконечно большой. В состоянии $2'$ газ вновь теплоизолируется и адиабатически сжимается до первоначального состояния 1 .

8°. Работа, которую совершает газ в равновесном (II.1.3.7°) прямом цикле Карно:

$$A = Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|.$$

Из формулы видно, что $A < Q_1$, т. е. работа, совершаемая рабочим телом (п. 1°) в цикле Карно, меньше энергии, полученной от нагревателя на величину энергии, переданной холодильнику в форме теплоты. Это справедливо для произвольного процесса: работа A , совершаемая за цикл, всегда меньше суммы $Q_{\text{подв}}$ всех количеств теплоты, переданных рабочему телу нагревателями.

Прямой цикл Карно лежит в основе работы тепловых машин.

9°. *Термическим коэффициентом полезного действия* (к. п. д.) η называется отношение работы A , совершенной рабочим телом в прямом круговом процессе, к сумме $Q_{\text{подв}}$ всех количеств теплоты, подведенных в этом процессе рабочему телу нагревателями:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{подв}}}.$$

Величина η характеризует степень экономичности теплового двигателя.

10°. Термический к. п. д. прямого равновесного цикла Карно, совершаемого идеальным газом,

$$\eta_{\text{К}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Величина $\eta_{\text{К}}$ зависит только от отношения температур холодильника T_2 и нагревателя T_1 .

11°. *Обратный цикл Карно* изображен на рис. II.4.3. При изотермическом сжатии, происходящем в процессе $1'-1$, от газа отводится количество теплоты Q_1 при температуре T_1 , которая остается постоянной. В процессе $2'-2$ изотермического расширения при температуре $T_2 < T_1$ к газу подводится количество теплоты

*) Например, большим резервуаром с водой.

**) Например, цилиндр с газом покрывают толстым слоем войлока.

Q_2 . В обратном цикле Карно $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ и работа A , совершаемая газом за один цикл, отрицательна: $A = (Q_1 + Q_2) < 0$. Этот вывод справедлив для любого обратного цикла. Если рабочее тело совершает обратный цикл, то при этом можно

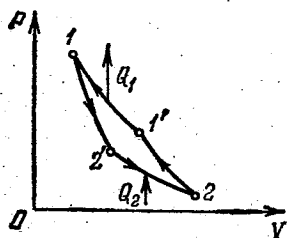


Рис. II.4.3

переносить энергию в форме теплоты (II.2.2.1°) от холодного тела к горячему за счет совершения внешними силами соответствующей работы. Это лежит в основе работы холодильных устройств. Экономичность холодильной машины тем больше, чем меньше работа $A' = -A$, затрачиваемая внешними силами на отвод от холодного тела количества теплоты Q_2 :

$$Q_2 = A - Q_1 = A - \frac{A}{\eta} = \frac{(1-\eta)}{\eta} A',$$

где η — термический к. п. д. прямого цикла между теми же температурами T_1 и T_2 (пп. 3°, 4°).

§ II.4.2. Обратимые и необратимые процессы

1°. Термодинамический процесс называется *обратимым* (*обратимый процесс*), если при совершении его термодинамической системой (II.1.3.1°) сначала в прямом, а затем в обратном направлении как сама система, так и все внешние тела, с которыми система взаимодействовала, возвращаются в исходные состояния. Другими словами, при обратимом процессе термодинамическая система может возвратиться в исходное состояние так, что в окружающей ее среде не останется никаких изменений. Необходимым условием обратимости термодинамического процесса является равновесность (II.1.3.3°) всех последовательных состояний в процессе. Однако равновесность процесса еще не обязательно означает его обратимость.

Пример 1. Обратимым процессом является механическое движение тела в вакууме при полном отсутствии сил трения. Пусть, например, тело в этих условиях брошено с некоторой начальной скоростью в поле силы тяжести (I.6.2.1°) под определенным углом к горизонту. Оно, описав параболическую траекторию, упадет на Землю в некотором месте. Если теперь бросить тело из этого места под тем же углом, с той же начальной скоростью, но противоположно направленной, то тело опишет ту же траекторию в обратном направлении и упадет в первоначальном месте. Любые промежуточные состояния движущегося тела в прямом и обратном движениях будут совершенно тождественны. *Обратимость механических движений* означает их симметричность по отношению к замене будущего прошедшим, т. е. по отношению к изменению знака времени. Обратимость механических движений вытекает из дифференциальных уравнений движения (I.2.4.4°). При замене знака времени меняет знак и скорость тела, но ускорение, которое входит в уравнения движения, сохраняет свой знак.

Пример 2. Обратимым процессом являются незатухающие колебания, которые совершает в вакууме тело, подвешенное на абсолютно упругой пружине (IV.1.2.3°). Система «тело — пружина» является консервативной (I.3.1.7°). Ее механические колебания не вызывают изменения энергии теплового хаотического

движения частиц системы. Только изменения конфигурации и скорости движения системы приведут к изменению ее состояния. Но эти изменения полностью повторяются по истечении периода колебаний T (IV.1.1.2°), и условия обратимости процесса (п. 1°) оказываются выполненными.

2°. Любой процесс, не удовлетворяющий условиям обратимости (п. 1°), называется *необратимым* (*необратимый процесс*).

Пример 1. Необратимым процессом является прямой процесс торможения тела под действием сил трения. Если эти силы являются единственными, действующими на тело, то скорость тела уменьшается, и оно останавливается. Энергия механического движения тела как целого уменьшается и расходуется на увеличение энергии хаотического движения частиц тела и окружающей среды. Внутренняя энергия (II.2.1.2°) тела и среды возрастает, происходит их нагревание за счет действия сил трения. Рассмотренный в п. 2° прямой процесс протекает самопроизвольно: он осуществляется без каких-либо процессов, происходящих с окружающими телами. Для того чтобы произошел обратный процесс и система возвратилась в исходное состояние, необходимо, чтобы остановившееся тело вновь пришло в движение за счет охлаждения его и окружающей среды. Как показывают опыты, тепловое хаотичное движение частиц тела не может самопроизвольно привести к возникновению упорядоченного движения всех частиц тела, как целого. Для осуществления такого движения необходим дополнительный *компенсирующий процесс* охлаждения тела и среды до первоначальной температуры. При этом будет отдано холодильнику количество теплоты Q , и над телом будет совершена работа $A' = Q$.

Таким образом, последовательное проведение таких прямого и обратного процессов возвращает систему «тело — среда» в исходное состояние, однако состояние внешних тел изменяется. Поэтому все процессы, сопровождающиеся трением, являются *необратимыми*.

Пример 2. Прямой процесс теплообмена (II.2.2.4°) между контактирующими телами с различной температурой происходит самопроизвольно. Обратный процесс — нагревание одного тела за счет охлаждения другого, имевшего вначале такую же температуру, что и первое, самопроизвольно происходить не может. Для осуществления такого процесса используется холодильное устройство (II.4.1.11°). Процесс теплообмена при конечной разности температур является *необратимым процессом*.

§ 11.4.3. Второй закон (второе начало) термодинамики

1°. Обращение к результатам опытов для доказательства необратимости процессов теплообмена и движения с трением (II.4.2.2°) не случайно. Первое начало термодинамики (II.2.3.1°) не может исчерпывающим образом описывать термодинамические процессы. Существенной ограниченностью первого начала является невозможность с его помощью предсказать направление протекания термодинамического процесса. Любой процесс, при котором не нарушается закон сохранения энергии, возможен с точки зрения первого начала термодинамики. В частности, возможен процесс самопроизвольной передачи энергии в форме теплоты от менее нагретого тела к более нагретому телу. Возможен также процесс, единственным результатом которого было бы получение некоторого количества теплоты от тела

и превращение ее в эквивалентную работу. Периодически действующее устройство, основанное на первом законе термодинамики, которое совершает работу за счет охлаждения одного источника теплоты (например, внутренней энергии больших водоемов), называется *вечным двигателем второго рода*.

2°. *Вторым началом (законом) термодинамики* называется полученное опытным путем утверждение о невозможности построения вечного двигателя второго рода (п. 1°). Второе начало имеет две наиболее распространенные формулировки, которые эквивалентны друг другу:

а) невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от некоторого тела, в эквивалентную ей работу;

б) невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от тела менее нагретого к телу более нагретому.

3°. Из второго закона термодинамики следует неравноценность работы и теплоты как двух форм передачи энергии. Переход упорядоченного движения тела как целого в хаотическое движение его частиц является необратимым процессом, происходящим без компенсирующих процессов (II.4.2.3°). Переход неупорядоченного движения частиц тела в упорядоченное движение тела как целого требует, чтобы одновременно происходил какой-либо компенсирующий процесс*).

Пример 1. При изотермическом расширении идеального газа совершается работа, полностью эквивалентная тому количеству теплоты, которое сообщено газу (II.2.5.9°). Теплота, полученная газом, целиком превращается в эквивалентную работу. Но газ при этом не возвращается в исходное состояние. Он расширяется, и его удельный объем возрастает. Превращение теплоты в работу*) не является единственным результатом изотермического расширения идеального газа.

Пример 2. В тепловой машине, работающей по прямому циклу Карно (II.4.1.8°), работа совершается за счет теплоты, подводимой от нагревателя. Однако часть полученного количества теплоты передается холодильнику (II.4.1.7°), поэтому работа, которая совершается за цикл, не эквивалентна всему количеству теплоты, подведенной к рабочему телу.

Пример 3. В холодильных устройствах, работающих по обратному циклу Карно (II.4.1.11°), от холодного тела к более нагретому передается некоторое количество теплоты. Но при этом внешние силы совершают работу, и, следовательно, происходит компенсирующий процесс.

4°. *Теорема Карно:* термический коэффициент полезного действия (II.4.1.9°) обратного цикла Карно не зависит от состава рабочего тела и всегда выражается формулой (II.4.1.10°):

$$\eta_K = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Термический к. п. д. необратимого цикла Карно $\eta_{K \text{ необр}}$ всегда меньше термического к. п. д. $\eta_{K \text{ обрат}}$ обратимого цикла Карно, осуществляемого между теми же температурами T_1 и T_2 :

$$\eta_{K \text{ необр}} < \eta_{K \text{ обрат}}.$$

*) Иногда подобный переход не вполне корректно называется «переходом теплоты в работу».

Термический коэффициент полезного действия любого обратимого цикла не превышает термического коэффициента полезного действия η_K обратимого цикла Карно, осуществляемого с помощью нагревателя и холодильника с температурами T_1 и T_2 ,

$$\eta_{\text{обр}} \leq \eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

5°. С помощью теоремы Карно (п. 4°) устанавливается *термодинамическая шкала температуры*. Из формулы п. 4° следует, что $T_2/T_1 = -Q_2/Q_1$ или, так как $Q_2 < 0$, то $T_2/T_1 = |Q_2|/Q_1$.

Для того чтобы сравнивать температуры T_1 и T_2 двух тел, необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором эти тела были бы нагревателем и холодильником. Тогда по отношению численных значений отданных (полученных) ими количеств теплоты определяется отношение температур тела. Результат сравнения температур не зависит от химического состава рабочего тела в цикле (п. 4°). Поэтому термодинамическая шкала температуры не зависит от свойств термометрического тела (11.1.3.4°) и в этом смысле обладает большой общностью. Так как все реальные термодинамические процессы необратимы, сравнение температур тел с помощью указанной выше процедуры практически неосуществимо и имеет лишь принципиальное теоретическое значение.

§ 11.4.4. Энтродия и свободная энергия

1°. Отношение количества теплоты Q , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела называется *приведенным количеством теплоты* Q^* , т. е. $Q^* = \frac{Q}{T}$. При нагревании тела ($Q > 0$) Q^* положительно, при охлаждении ($Q < 0$) Q^* отрицательно.

Приведенное количество теплоты, сообщенное телу на бесконечно малом участке произвольного процесса, равно $\frac{\delta Q}{T}$, где T — температура соответствующего теплоотдающего тела*). Приведенное количество теплоты Q_{1-2}^* для произвольного участка $1 \rightarrow 2$ процесса C_1C_2 :

$$Q_{1-2}^* = \int_{C_1}^{C_2} \frac{\delta Q}{T}.$$

2°. Приведенное количество теплоты $Q_{\text{обр}}^*$, которое сообщается телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:

$$Q_{\text{обр}}^* = \oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Здесь T — температура, при которой телу сообщается элементарное количество теплоты δQ . Из предыдущего выражения следует, что функция $\frac{\delta Q}{T}$ является пол-

*) В случае обратимого процесса T совпадает с температурой самого тела, совершающего этот процесс.

ным дифференциалом некоторой функции S [в отличие от δQ , которое не является полным дифференциалом (II.2.4.3°)]

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр.}}$$

Однозначная функция состояния S (II.2.1.3°), полный дифференциал которой определяется последней формулой, называется *энтропией* тела. Из формулы видно, что dS и δQ имеют одинаковые знаки. Следовательно, по характеру изменения энтропии можно судить о том, в каком направлении происходит теплообмен (II.2.2.4°). При нагревании тела ($\delta Q > 0$) его энтропия возрастает ($dS > 0$). Если тело охлаждается ($\delta Q < 0$), то его энтропия убывает ($dS < 0$).

Пример. Полный дифференциал энтропии идеального газа выражается формулой:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр.}} = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} \frac{dT}{T} + \frac{M}{\mu} R \frac{dV}{V},$$

где M — масса газа, μ — его молярная масса (II.1.4.3°), $C_{V\mu}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (II.2.5.4°), R — универсальная газовая постоянная (II.1.4.4°), T — температура газа, V — его объем. Этот результат получается при использовании первого начала термодинамики (II.2.3.1°) для δQ с учетом уравнения Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°).

Изменение $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ энтропии идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода 1 \rightarrow 2:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu} \left(C_{V\mu} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

3°. Некоторые важнейшие свойства энтропии замкнутых систем (II.2.1.7°):

а) Энтропия замкнутой системы, совершающей обратимый цикл Карно (II.4.1.6°), не изменяется:

$$\Delta S_{\text{обр.}} = 0, \quad S = \text{const.}$$

б) Энтропия замкнутой системы, совершающей необратимый цикл Карно, возрастает:

$$\Delta S_{\text{необр.}} > 0.$$

в) Энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не убывает:

$$\Delta S \geq 0.$$

При элементарном изменении состояния замкнутой системы энтропия не убывает: $dS \geq 0$.

Знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства к необратимым. Пункт в) является одной из формулировок второго закона (начала) термодинамики.

4°. Для произвольного процесса, происходящего в термодинамической системе (II.1.3.1°), справедливо соотношение:

$$\delta Q \leq T dS,$$

где T — температура того тела, которое сообщает термодинамической системе энергию δQ в процессе бесконечно малого изменения состояния системы. Используя для δQ первое начало термодинамики (II.2.3.1°), предыдущее неравенство

можно переписать в форме, объединяющей первое и второе начала термодинамики:

$$T dS \geq dU + \delta A.$$

5°. Для обратимого процесса

$$\delta A = - (dU - T dS),$$

или

$$\delta A = - d(U - TS) - S dT = - dF - S dT,$$

где

$$F = U - TS$$

называется *свободной энергией*. Свободная энергия является разностью двух функций состояния (II.1.3.8°) и поэтому тоже является функцией состояния термодинамической системы.

Если система совершает обратимый изотермический процесс, то $dT=0$ и $\delta A_{\text{изот}} = -dF$. При переходе системы из состояния 1 в состояние 2 в обратимом изотермическом процессе

$$A_{\text{изот}} = F_1 - F_2.$$

Убыль свободной энергии является мерой работы, которую совершает система (тело) в обратимом изотермическом процессе.

6°. Из формулы: $U = F + TS$ следует, что внутренняя энергия тела (системы) равна сумме свободной энергии F и *связанной энергии* TS . Связанная энергия представляет собой ту часть внутренней энергии тела (системы), которая не может быть передана в форме работы в изотермическом процессе. В этом смысле эта часть внутренней энергии является «обесцененной». Связанная энергия тем больше, чем больше энтропия тела (системы). Поэтому энтропия тела (системы) служит мерой «обесцененности» его энергии.

§ 11.4.5. Статистическое истолкование второго закона термодинамики

1°. Утверждение второго закона (начала) термодинамики о невозможности убывания энтропии в изолированной системе (II.4.4.3°) может быть истолковано статистически, на основе молекулярно-кинетической теории строения вещества, с помощью *формулы Больцмана*:

$$S = k \ln P + \text{const},$$

где S — энтропия системы, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), P — термодинамическая вероятность состояния.

2°. *Термодинамическая вероятность состояния* P тела (системы) равна числу всевозможных распределений частиц по координатам и скоростям, соответствующих данному термодинамическому состоянию (II.1.3.3°). По определению, P есть целое число не меньшее единицы ($P \geq 1$). Из формулы Больцмана (п. 1°) вытекает следующее статистическое истолкование второго закона термодинамики: термодинамическая вероятность состояния замкнутой системы при всех происходящих в ней процессах не может убывать.

При любом процессе, который протекает в замкнутой системе и переводит ее из состояния 1 в состояние 2, изменение ΔP термодинамической вероятности P положительно или равно нулю: $\Delta P = P_2 - P_1 \geq 0$.

В случае обратимого процесса $\Delta P=0$, т. е. термодинамическая вероятность P постоянна. Если происходит необратимый процесс, то $\Delta P > 0$ и P возрастает. Это означает, что необратимый процесс переводит систему из менее вероятного состояния в более вероятное, в пределе — равновесное состояние (II.1.3.3°).

3°. Второе начало термодинамики, будучи статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему. В системах, состоящих из небольшого числа частиц, наблюдаются флуктуации (II.4.6.1°), которые являются отклонениями от второго закона термодинамики.

4°. Второе начало термодинамики, установленное для замкнутых систем на Земле, не может быть распространено на всю бесконечную Вселенную. Такое распространение приводит к неправильному с философской и физической точек зрения выводу о том, что температура всех тел во Вселенной должна выравниваться. При этом все формы движения, кроме хаотического теплового движения, должны прекратиться — должна наступить так называемая «тепловая смерть» Вселенной. В действительности, в связи с бесконечностью Вселенной в некоторых ее частях неизбежны флуктуации (II.4.6.1°), которые нарушают тепловое равновесие. Продолжительность и величина этих флуктуаций могут быть весьма значительными. Доказано, что для бесконечной Вселенной не может быть равновесного состояния, соответствующего «тепловой смерти».

§ II.4.6. Флуктуации

1°. В системах, состоящих из сравнительно небольшого числа частиц, возможны значительные отклонения некоторых физических величин, характеризующих системы, от их средних значений. Такие отклонения называются *флуктуациями* физических величин. Например, в сильно разреженных газах плотность в различных местах объема газа может отличаться от средней плотности, соответствующей равновесному состоянию при определенных p и T . Точно так же могут наблюдаться случайные отклонения температуры T , давления p и других физических величин.

2°. Если M есть истинное значение физической величины, а $\langle M \rangle$ — ее среднее значение, то величина ΔM , равная $\Delta M = M - \langle M \rangle$ и ее среднее значение $\langle \Delta M \rangle = \langle M - \langle M \rangle \rangle$ не могут быть мерами флуктуаций величины M . Величина ΔM не постоянна во времени, а величина

$$\langle \Delta M \rangle = \langle M \rangle - \langle M \rangle = 0^*.$$

Последнее равенство вытекает из того, что отклонения величины M от $\langle M \rangle$ происходят в обе стороны — в сторону значений больших среднего и меньших среднего — одинаково часто.

3°. Мерой флуктуации физической величины M является средняя величина квадрата разности ΔM , которая называется *квадратичной флуктуацией*,

$$\langle (\Delta M)^2 \rangle = \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle = \langle M^2 \rangle - \langle \langle M \rangle \rangle^2 **.$$

*) Здесь использовано утверждение, что среднее значение от постоянной величины $\langle M \rangle$ совпадает с самой величиной.

**) Последнее равенство, вытекающее из правил алгебраических действий со средними величинами, подчеркивает, что среднее значение квадрата величины $\langle M^2 \rangle$ не следует смешивать с квадратом среднего значения величины $(\langle M \rangle)^2$.

Квадратичная флуктуация существенно положительна либо равна нулю: $\langle(\Delta M)^2\rangle \geq 0$.

Абсолютной флуктуацией называется величина $\sqrt{\langle(\Delta M)^2\rangle}$, также характеризующая отклонения M от $\langle M \rangle$. Малость абсолютной флуктуации означает, что большие отклонения M от $\langle M \rangle$ происходят весьма редко.

Относительной флуктуацией δ_M называется отношение абсолютной флуктуации к среднему значению $\langle M \rangle$ физической величины:

$$\delta_M = \frac{\sqrt{\langle(\Delta M)^2\rangle}}{\langle M \rangle}.$$

Относительные флуктуации концентрации частиц (или плотности) газа, его давления и температуры тем меньше, чем большее число N молекул газа находится в сосуде:

$$\delta_\rho = \frac{\sqrt{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}}{\langle\rho\rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_p = \frac{\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}}{\langle p \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_T = \frac{\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}}{\langle T \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

При $N = N_A$ — постоянной Авогадро (IX) — δ_ρ , δ_p и δ_T имеют величины порядка 10^{-14} .

Если имеется система, состоящая из N независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния (II.2.1.3°) системы обратно пропорциональна корню квадратному из N :

$$\delta_M \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

4°. Примеры флуктуаций физических величин.

Пример 1. При измерении температуры с помощью газового термометра, наполненного идеальным газом (II.1.4.1°), показания термометра не остаются постоянными вследствие флуктуаций температуры. Измеряемые термометром изменения температуры не могут быть меньше, чем абсолютная флуктуация показания прибора, равная $\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}$, т. е.

$$\Delta t \geq \sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}.$$

Абсолютную флуктуацию можно найти по формуле п. 3°:

$$\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle} \sim \frac{\langle T \rangle}{\sqrt{N}}.$$

Таким образом,

$$\Delta t \geq \sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle} \sim \frac{\langle T \rangle}{\sqrt{N}}.$$

Если в газовом термометре содержится 10^{-8} моля, т. е. $N = 6,02 \cdot 10^{15}$, то минимальное изменение температуры Δt , которое может быть обнаружено прибором, составит по порядку величины $\Delta t \approx 10^{-10} \langle T \rangle$. Эта величина и указывает предел чувствительности газового термометра.

Реальные изменения температур, которые обычно встречаются в эксперименте, несоизмеримо больше, чем Δt .

Пример 2. Электрические флуктуации в цепях ограничивают пределы чувствительности приемной радиоаппаратуры. В частности, флуктуации числа электронов, вылетающих из раскаленного катода, вызывают флуктуации тока, проходящего в электронной лампе, — так называемый *дробовой эффект*. Мерой дробового эффекта является квадратичная флуктуация тока:

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle \approx \frac{e I_0}{t},$$

где e — заряд электрона, I_0 — средняя сила тока за время t , в течение которого измеряется ток, причем $t \gg \tau$, где τ — время пролета электрона в лампе.

§ II.4.7. Броуновское движение

1°. *Броуновским движением* называется наблюдаемое под микроскопом непрерывное хаотическое движение мелких частиц, взвешенных в газе или жидкости. Броуновское движение обусловлено флуктуациями давления (II.4.6.1°), которые оказывают молекулы газа или жидкости на взвешенные частицы. В результате флуктуаций давления броуновские частицы испытывают со всех сторон действие неуравновешенных сил, которые приводят к видимому сложному движению этих частиц.

2°. При постоянных внешних условиях в движении броуновских частиц не наблюдается никаких изменений, и оно продолжается как угодно долго. Это свидетельствует о непрерывности теплового, хаотического движения молекул, вызывающего перемещение броуновских частиц. Скорости v и энергии w движения броуновских частиц зависят от размеров частиц, а не от их химической природы; величины v и w растут с повышением температуры и уменьшением вязкости жидкости или газа.

3°. Опытами установлено, что при своем движении броуновские частицы могут перемещаться вверх, как бы «всплывая» в газе или жидкости. Это может происходить в том случае, если броуновская частица получит со стороны молекул газа (или жидкости) нескомпенсированный импульс, направленный снизу вверх. При этом потенциальная энергия частицы возрастает за счет кинетической энергии окружающих ее молекул, и происходит местное охлаждение газа или жидкости. Механическая энергия броуновской частицы возрастает за счет охлаждения одного источника теплоты — жидкости или газа, что противоречит второму началу термодинамики (II.4.3.2°). Таким образом, броуновское движение доказывает ограниченность второго закона термодинамики, его статистический характер (II.4.5.1°).

4°. Движение броуновской частицы является полностью хаотическим. Поэтому среднее смещение $\langle x \rangle$ частицы вдоль произвольного направления равно нулю. Средний квадрат смещения $\langle x^2 \rangle$ пропорционален времени t наблюдения над частицей и выражается *формулой Эйнштейна*:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt,$$

где D — коэффициент диффузии броуновских частиц. Для частицы сферической формы радиуса r

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta r N_A}.$$

Здесь T — абсолютная температура, R — универсальная газовая постоянная (II.1.4.4°), η — коэффициент вязкости жидкости или газа (II.3.8.4°), N_A — постоянная Авогадро (IX).

§ 11.4.8. Понятие о третьем законе термодинамики

1°. Энтропия как однозначная функция состояния системы вводится с помощью дифференциального соотношения (II.4.4.2°). Поэтому энтропия может быть определена лишь с точностью до произвольной постоянной, которая не может быть найдена из первого и второго законов термодинамики. В связи с этим оказывается невозможным определение абсолютного значения энтропии.

2°. Экспериментальное изучение свойств веществ при сверхнизких температурах привело к установлению *третьего закона термодинамики* или *принципа Нернста*: при любом изотермическом процессе, проведенном при абсолютном нуле температуры, изменение энтропии равно нулю:

$$\Delta S_{T=0} = 0 \quad \text{и} \quad S = S_0 = \text{const},$$

независимо от изменения любых других параметров состояния (например объема, давления, напряженности внешнего силового поля и др.).

Третье начало не позволяет находить абсолютное значение энтропии. Однако постоянство энтропии при $T=0$ позволяет выбрать эту постоянную за начало отсчета значений энтропии, т. е. принять $S_0=0$.

3°. Принцип Нернста в формулировке Планка: при абсолютном нуле температуры энтропия системы равна нулю. Если W_0, W_1, \dots, W_n — последовательность энергетических уровней системы (VI.1.2.5°), то при абсолютном нуле температуры равновесная система находится в наиниžшем состоянии с энергией W_0 , термодинамическая вероятность которого (II.4.5.2°) $P=1$. Поэтому константу в формуле Больцмана (II.4.5.1°) нужно положить равной нулю:

$$S = k \ln P = 0.$$

4°. Для всех тел при $T=0$ К обращаются в нуль теплоемкости при постоянном объеме $C_{V\mu}$ (II.2.5.4°). В самом деле, если температура системы достаточно низка, так что средняя кинетическая энергия частицы kT (II.3.6.4°) значительно меньше разности ΔW между нижним и первым энергетическими уровнями ($\Delta W \gg kT$), то тепловые возбуждения системы недостаточны, чтобы перевести систему из состояния с энергией W_0 в состояние с энергией W_1 . Поэтому при сверхнизких температурах система должна находиться в состоянии с наименьшей энергией W_0 . Внутренняя энергия U_0 системы (II.2.1.2°) равна W_0 , т. е. $U_0=W_0$. Поэтому теплоемкость системы при постоянном объеме

$$C_{V\mu} = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \left(\frac{dW_0}{dT} \right)_V = 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0.$$

При абсолютном нуле температуры обращается в нуль также коэффициент объемного расширения (VII.1.2.3°).

Из третьего начала следует, что невозможен такой процесс, в результате которого тело могло бы быть охлаждено до температуры абсолютного нуля (*принцип недостижимости абсолютного нуля температуры*).

Г л а в а II.5. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ПАРЫ

§ II.5.1. Силы межмолекулярного взаимодействия

1°. Свойства не сильно разреженных газов отличаются от свойств идеальных газов, подчиняющихся уравнению Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°). Опыты показывают, что удельные [теплоемкости (II.2.5.2°), коэффициенты вязкости (II.3.8.4°) и другие величины у реальных газов имеют значения, отличающиеся от значений соответствующих физических величин для идеальных газов.

2°. *Реальным газом* называется газ, между молекулами которого действуют силы межмолекулярного взаимодействия.

Паром называется реальный газ, который находится в состояниях, близких к конденсации.

3°. Силы межмолекулярных взаимодействий очень быстро убывают при увеличении расстояния между молекулами (*короткодействующие силы*). На расстояниях между молекулами, превышающих 10^{-9} м, силами межмолекулярного взаимодействия можно пренебречь. Силы взаимодействия между молекулами подразделяются на *силы притяжения* и *силы отталкивания*. Оба типа сил действуют одновременно. В противном случае были бы невозможны определенные объемы жидких и твердых тел: образующие их частицы либо разлетались бы в разные стороны, либо слипались бы до наименьшего возможного объема.

4°. Силы взаимного притяжения и отталкивания различно зависят от расстояния r между молекулами. На расстояниях, сравнимых с линейными размерами атомов и малых неорганических молекул (10^{-10} м), преобладают силы отталкивания F_1 ; на расстояниях r порядка 10^{-9} м — силы взаимного притяжения F_2 . Если r — радиус-вектор, проведенный в точку, где находится молекула A , из другой точки, где находится молекула B , действующая на первую с силами F_1 и F_2 , то:

$$F_1 = F_{1r} \frac{r}{r} \quad \text{и} \quad F_2 = F_{2r} \frac{r}{r}.$$

Проекции F_{1r} и F_{2r} сил F_1 и F_2 на направление r зависят от r следующим образом:

$$F_{1r} = b/r^{13}, \quad F_{2r} = -a/r^2,$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от строения молекул и типа сил межмолекулярного взаимодействия. На рис. II.5.1 показаны зависимости F_{1r} и F_{2r} от r . При этом силы отталкивания условлено считать положительными, а силы притяжения — отрицательными (рис. II.5.1).

Результирующая сила

$$F = F_1 + F_2 = F_r \frac{r}{r},$$

причем: $F_1 = F_{1r} + F_{2r}$. На рис. II.5.1 показана зависимость F_r от r .

5°. При $r = r_0$ силы F_1 и F_2 уравновешиваются и $F = 0$. При $r > r_0$ сила $F_2 > F_1$, при $r < r_0$ сила $F_2 < F_1$. Таким образом, r_0 есть равновесное расстояние между молекулами, на котором они находились бы, если бы не было теплового движения.

6°. Элементарная работа δA , которая совершается результирующей силой F при увеличении на dr расстояния между молекулами, равна убыли *взаимной*

потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ двух молекул (I.3.3.1°):

$$\delta A = F dr = F_r dr = -dW_{\text{п}}$$

Интегрируя по r от r до ∞ :

$$\int_{W_{\text{п}}}^{W_{\text{п}\infty}} dW_{\text{п}} = - \int_r^{\infty} F_r dr, \text{ и } W_{\text{п}} - W_{\text{п}\infty} = \int_r^{\infty} F_r dr.$$

При $r = \infty$ молекулы не взаимодействуют и $W_{\text{п}\infty} = 0$, поэтому

$$W_{\text{п}} = \int_r^{\infty} F_r dr.$$

Интеграл может быть вычислен графически по известной зависимости F_r от r (рис. II.5.1). Он пропорционален площади, ограниченной кривой $F_r = F_r(r)$, осью

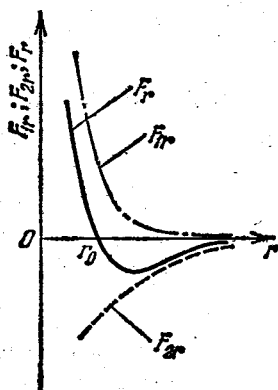


Рис. II.5.1

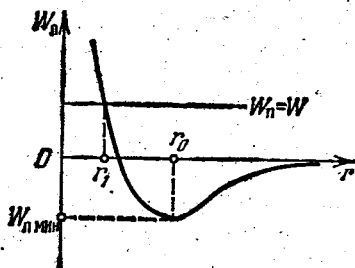


Рис. II.5.2

r и значением r ($r = \text{const}$), для которого вычисляется $W_{\text{п}}$. При $r > r_0$ энергия $W_{\text{п}} < 0$, ибо $F_r < 0$; при $r = r_0$ энергия $W_{\text{п}}$ достигает минимума: $W_{\text{п}} = W_{\text{мин}}$. Это следует из уравнения

$$\left(\frac{dW_{\text{п}}}{dr} \right)_{r=r_0} = -F_r(r_0) = 0.$$

Система, состоящая из двух взаимодействующих молекул, в состоянии устойчивого равновесия ($r = r_0$) обладает наименьшей потенциальной энергией. При $r < r_0$ энергия $W_{\text{п}}$ начинает возрастать, становится положительной и затем резко возрастает в связи с быстрым увеличением сил отталкивания при уменьшении r (рис. II.5.2).

7°. Величина $W = W_{\text{п мин}}$ наименьшей потенциальной энергии взаимодействия молекул является критерием для различных агрегатных состояний вещества.

Если $|W_{\text{п мин}}| \ll kT$, то вещество находится в газообразном состоянии. При $|W_{\text{п мин}}| > kT$ осуществляется твердое состояние. Условие $|W_{\text{п мин}}| \approx kT$ соответствует пребыванию вещества в жидком состоянии. Здесь kT — удвоенная средняя

энергия, приходящаяся на одну степень свободы теплового движения молекулы (II.3.6.4°).

8°. *Силы Ван дер Ваальса (ван-дер-ваальсовы силы)* называются слабыми силами *) притяжения, действующие между молекулами на расстояниях порядка 10^{-9} м (п. 4°). Эти силы являются причиной поправки на внутреннее давление в уравнении состояния реального газа Ван' дер Ваальса (II.5.2.4°). Существуют три типа ван-дер-ваальсовых сил притяжения, причем все они имеют электрическую природу.

а) *Ориентационные силы притяжения* полярных молекул (III.4.1.4°). Эти силы обусловлены преимущественной ориентацией дипольного электрического момента p_e (III.2.2.4°) одной полярной молекулы в электрическом поле другой полярной молекулы. Указанной ориентации молекул препятствует их тепловое движение, Ориентационная сила притяжения двух однородных молекул

$$F_{\text{ор}} = 4 \frac{p_e^4}{kT} \frac{1}{r^2},$$

где r — расстояние между молекулами, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T — температура.

б) *Индукционные силы притяжения* двух полярных молекул (в случае разнородных молекул также полярной и неполярной молекул) связаны с изменением дипольных моментов молекул под влиянием электрических полей этих молекул, т. е. с деформационной поляризацией взаимодействующих молекул (III.4.2.2°). Для двух однородных молекул

$$F_{\text{инд}} = 12\alpha p_e^2 \frac{1}{r^2},$$

где α — поляризуемость молекулы (III.4.1.3°).

в) *Дисперсионные силы притяжения* действуют как между полярными, так и между неполярными молекулами. Эти силы имеют квантовомеханическое происхождение. Классическое истолкование дисперсионных сил состоит в следующем. Благодаря движению электронов их конфигурация в молекулах непрерывно изменяется. Поэтому неполярная молекула имеет нулевой дипольный электрический момент лишь в среднем. В каждый момент времени такая молекула обладает мгновенным электрическим моментом и вызывает соответствующую деформационную поляризацию соседней молекулы, благодаря чему молекулы притягиваются. Дисперсионная сила притяжения равна среднему значению мгновенной силы притяжения двух молекул для всевозможных конфигураций электронов в молекулах. Согласно простейшей модели Друде, в которой молекулы представляют собой трехмерные осцилляторы,

$$F_{\text{дисп}} = \frac{9}{2} \alpha^2 h\nu_0 \frac{1}{r^2},$$

где h — постоянная Планка, ν_0 — частота колебаний осциллятора (часто величина $h\nu_0$ близка к энергии ионизации молекулы).

*) Имеется в виду малая величина этих сил по сравнению с силами притяжения, обеспечивающими образование устойчивых молекул (п. 9°).

Как правило, определяющую роль во взаимном притяжении молекул играют именно дисперсионные силы. Для большинства веществ даже с полярными молекулами дисперсионные силы значительно превосходят по величине как ориентационные, так и индукционные силы притяжения.

Свое название дисперсионные силы получили в связи с аналогией возникновения этих сил и явления дисперсии при прохождении электромагнитных волн в веществе (V.3.4.1°).

9°. Сила притяжения между двумя молекулами F_r , изображенная на рис. II.5.1, является результирующей всех типов сил притяжения, перечисленных в п. 8°. Потенциальная энергия ван-дер-ваальсова притяжения составляет $(0,4 \div 4) \cdot 10^8$ Дж/моль.

На расстояниях $r < 10^{-10}$ м между молекулами возникает помимо электромагнитного взаимодействия особое квантовое взаимодействие, которое приводит либо к появлению сил отталкивания между молекулами (II.5.1.4°), либо к сильному притяжению соседних атомов (или их групп) и возникновению между ними химических связей — ионных и ковалентных (VI.2.4.4°, VI.2.4.5°). Результатом этих связей является образование устойчивых молекул. Потенциальная энергия химических связей превышает энергию ван-дер-ваальсового притяжения и имеет величину порядка $(0,4 \div 4) \cdot 10^4$ Дж/моль.

10°. В системе из двух молекул силы взаимодействия, являясь внутренними (I.2.2.4°), не могут изменить полную энергию W системы, складывающуюся из кинетической энергии W_k молекул и их взаимной потенциальной энергии W_n . Поэтому

$$dW = dW_k + dW_n = 0, \text{ или } dW_k = -dW_n = F_r dr.$$

Здесь использована формула п. 6°.

При сближении молекул ($dr < 0$) до расстояния r_0 (рис. II.5.1) W_n уменьшается, а W_k соответственно увеличивается. Это происходит за счет положительной работы, совершаемой результирующей силой взаимного притяжения между молекулами (п. 4°) ($F_r < 0$ при $r > r_0$). При дальнейшем сближении молекул ими совершается работа против результирующей силы взаимного отталкивания ($F_r > 0$ при $r < r_0$). При этом кинетическая энергия молекул уменьшается. К моменту наибольшего сближения молекул ($r = r_1$ на рис. II.5.2) вся кинетическая энергия молекул оказывается полностью израсходованной на совершение работы против сил отталкивания: $W_k = 0$ и полная энергия W равна потенциальной энергии W_n , т. е. $W = W_n$ (рис. II.5.2).

При сохранении неизменными всех параметров состояния реальных газов, кроме температуры, расстояние r_1 уменьшается при нагревании. Однако это уменьшение очень невелико даже при высоких температурах. Это связано с очень крутым возрастанием сил отталкивания F_1 при уменьшении r (рис. II.5.1). Расстояние r_1 является таким образом эффективным диаметром d молекулы (II.1.4.1°). Конечные размеры молекул реальных газов объясняются действием между молекулами сил отталкивания.

§ 11.5.2. Уравнение Ван дер Ваальса

1°. *Газом Ван дер Ваальса* называется такая модель реального газа, в которой молекулы рассматриваются как абсолютно твердые шарики с диаметром d (II.5.1.10°), между которыми действуют силы взаимного притяжения. Конечные

размеры шариков означают, что принимаются во внимание и силы отталкивания между молекулами реального газа.

2°. Молекулы реального газа, имеющие каждая объем $\bar{v} = \frac{1}{6} \pi d^3$, движутся в сосуде не так свободно, как «точечные» молекулы идеального газа. Поэтому в уравнении Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°) $pV_\mu = RT$ вместо полного объема V_μ сосуда, занимаемого молемами газа, следует учитывать «свободный» объем

$$V_\mu^* = V_\mu - b,$$

где b — поправка Ван дер Ваальса на собственный объем молекул. Поправка b равна учетверенному объему всех молекул, содержащихся в одном моле газа:

$$b = 4N_A \bar{v},$$

где N_A — постоянная Авогадро (IX), \bar{v} — объем одной молекулы.

3°. Силы взаимного притяжения между молекулами учитываются для газа Ван дер Ваальса введением поправки на давление газа в уравнении Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°). В связи с короткодействующим характером сил притяжения (II.5.1.3°) каждая молекула взаимодействует лишь с теми частицами, которые находятся от нее на расстояниях $r < R_M$, где R_M — радиус молекулярного действия, имеющий величину порядка 10^{-9} м. Сфера радиуса R_M , описанная из центра молекулы, называется сферой молекулярного действия.

Для молекулы, находящейся внутри объема газа, силы притяжения ее к другим молекулам взаимно уравновешиваются и не оказывают влияния на движение данной молекулы. Если молекула находится в слое газа, пограничном со стенкой сосуда, то она испытывает нескомпенсированную силу притяжения, направленную внутрь газа. Вследствие этого при соударении со стенкой такая молекула передает стенке меньший импульс (II.3.2.1°), и давление p , которое оказывает на стенки реальный газ, уменьшено по сравнению с давлением $p_{ид}$ идеального газа, имеющего ту же плотность при такой же температуре,

$$p = p_{ид} - p^*,$$

или

$$p_{ид} = p + p^*,$$

где p^* — поправка Ван дер Ваальса, обусловленная действием сил взаимного притяжения и называемая внутренним давлением. Внутреннее давление p^* обратно пропорционально квадрату объема V_μ сосуда, в котором находится моль газа,

$$p^* = \frac{a}{V_\mu^2},$$

где a — коэффициент Ван дер Ваальса, зависящий от химической природы газа.

4°. Уравнение Ван дер Ваальса, которое описывает состояние реального газа, отличается от уравнения Менделеева — Клапейрона (II.1.4.4°) введением поправок b и p^* (пп. 2° и 3°). Для одного моля газа оно имеет вид:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right) (V_\mu - b) = RT.$$

5°. Уравнение Ван дер Ваальса для произвольной массы реального газа, имеющего молярную массу μ (II.1.4.3°),

$$\left(p + \frac{M^2 a}{\mu^2 V^2}\right) \left(V - \frac{M}{\mu} b\right) = \frac{M}{\mu} RT.$$

Это уравнение справедливо для не очень сильно сжатых газов. Для сильно разреженных газов $V_\mu \gg b$, $p^* \ll p$ и уравнение Ван дер Ваальса не отличается от уравнения Менделеева — Клапейрона.

§ 11.5.3. Изотермы реальных газов. Понятие о фазовых переходах

1°. Зависимость молярного объема газа от давления при неизменной температуре называется *изотермой реального газа*. На рис. II.5.3 изображены изотермы для углекислого газа. При температурах T , меньших $T_K=340$ К, все изотермы имеют горизонтальные участки, на которых, кроме T , постоянно давление газа, а молярные объемы изменяются. Разность $V_C - V_B$ молярных объемов горизонтальных участков изотерм уменьшается с повышением температуры (рис. II.5.3). При $T=T_K$ эта разность обращается в нуль. Температура $T=T_K$, соответствующая условию $V_C - V_B=0$, называется *критической температурой*.

Изотерма реального газа при $T=T_K$ называется *критической изотермой*. На этой изотерме точки C и B сливаются в точку K , которая называется *критической точкой*. Параметры состояния газа (II.1.3.2°) в критической точке являются критическими параметрами $V_{\mu K}$, p_K и T_K .

Критическая точка K является точкой перегиба на критической изотерме. Следовательно, касательная к изотерме в этой точке параллельна оси OV_μ .

2°. Любая докритическая изотерма ($T < T_K$) является кривой непрерывного перехода вещества из газообразного состояния в жидкое. Она содержит три участка: TC , CB и BA , каждый из которых описывает различные состояния вещества. На участке TC вещество находится в газообразном состоянии, участок CB соответствует переходу вещества из газообразного состояния в жидкое. В области BA изотермы вещество жидкое. Участок BA кривой почти вертикален вследствие малой сжимаемости жидкости. Точки C и B горизонтальной части изотермы соответствуют началу и концу конденсации при изотермическом сжатии реального газа. Наоборот, при изотермическом расширении жидкости точки B и C соответствуют началу и концу кипения. Точка B соответствует состоянию *кипящей жидкости*, точка C — *сухого насыщенного пара*. Смесь кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, которая существует в любой точке M участка BC , называется *влажным паром* (рис. II.5.3).

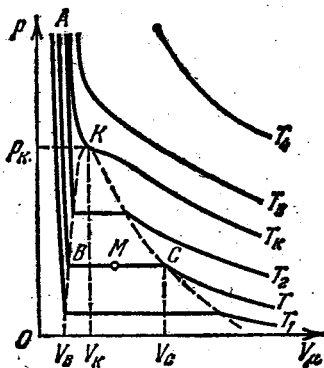


Рис. II.5.3

3°. *Фазой* в термодинамике называют совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом и находящихся в одинаковом состоя-

нии. Влажный пар является двухфазной системой и состоит из двух фаз — кипящей жидкости и сухого насыщенного пара.

На рис. II.5.4 приведены две пограничные кривые BK и CK , представляющие собой соединения точек B и C (рис. II.5.3) при различных температурах. Кривые BK и CK сходятся в критической точке K . Кривая BK кипения отделяет однофазную область I жидкости от двухфазной области II влажного пара. Кривая CK является кривой начала фазового перехода I рода из жидкого состояния вещества в газообразное. Пограничная кривая CK разделяет двухфазную область II и однофазную область III газообразного состояния вещества.

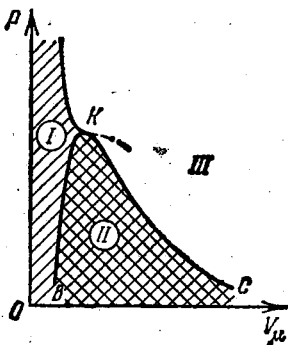


Рис. II.5.4

4°. Двухфазная область II не может существовать при давлениях больших критического p_K (п. 1°), когда вещество может находиться в одном из двух состояний — жидком или газообразном. Газ при температуре выше критической T_K никаким давлением не может быть переведен в жидкое состояние изотермическим сжатием. Критические температуры ряда газов очень низкие: у гелия $T_K \approx 5$ К, у водорода — 33 К. Это затрудняет сжижение таких газов.

5°. В критическом состоянии вещества, помимо разности молярных объемов кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, обращаются в нуль удельная теплота парообразования (II.6.6.4°) и коэффициент поверхностного натяжения жидкости (II.6.4.4°). В критическом состоянии вещества полностью исчезают различия между жидким и газообразным состояниями вещества.

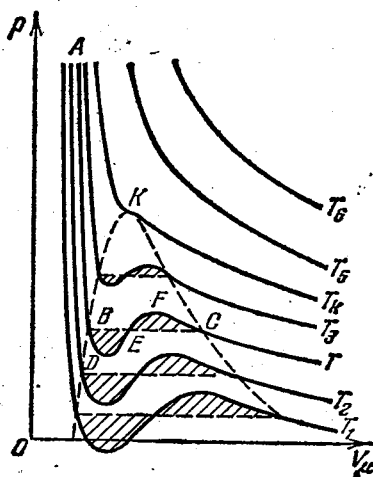


Рис. II.5.5

6°. Уравнение Ван дер Ваальса (II.5.2.4°) является уравнением третьей степени относительно молярного объема V_μ с коэффициентами, зависящими от давления, температуры и химической природы газа. Это уравнение имеет или один, или три действительных корня в зависимости от численных значений p и T . На рис. II.5.5 представлены изотермы реального газа, подчиняющегося уравнению Ван дер Ваальса при различных температурах ($T_1 < T_2 < T < T_K < T_5 < T_6$).

На всех докритических изотермах имеется заштрихованная область, где каждому давлению соответствуют три различных состояния, которым сопоставляются три точки изотермы — B , E и C . Волнообразные части $BDEF$ изотерм на рис. II.5.5 более точно описывают переход вещества из газообразного в жидкое состояние, чем горизонтальные участки экспериментальных изотерм (пунктирные

прямые BC). Участок BD изотермы соответствует *перегретой жидкости*, которую можно получить, если задержать начало кипения в точке B . Участок CF изотермы описывает состояние *пересыщенного пара*, возникающее при медленном изотермическом сжатии в отсутствие центров конденсации. Если такие центры (пылинки, ионы) вводятся в пересыщенный пар, то происходит быстрая конденсация пара. На участке DEF изотермы одновременно с увеличением (уменьшением) давления возрастает (уменьшается) молярный объем. Такие состояния вещества невозможны. Горизонтальные отрезки BC пересекают участки изотерм $BDEFC$ так, чтобы площади $BDEB$ и $EFCE$ на рис. II.5.5 были равны друг другу (*правило Максвелла*).

7°. Значения критических параметров p_K , $V_{\mu K}$ и T_K (п. 1°) выражаются через коэффициенты a и b в уравнении Ван дер Ваальса (II.5.2.4°) и универсальную газовую постоянную R (II.1.4.4°):

$$p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^3}, \quad V_{\mu K} = 3b, \quad T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}.$$

§ II.5.4. Понятие о сверхтекучести гелия

1°. Гелий является таким веществом, которое, переходя из газообразного в жидкое состояние при нормальном атмосферном давлении и температуре 4,22 К, остается жидким, если охлаждать его как угодно близко к абсолютному нулю (II.4.8.4°).

2°. При температуре 2,19 К в жидком гелии происходит фазовый переход II рода: жидкий гелий I, существующий при $T > 2,19$ К, переходит в жидкий гелий II, который существует при $T < 2,19$ К.

Фазовым переходом II рода называется такое превращение вещества, которое не связано с выделением или поглощением теплоты, как это происходит при фазовых переходах I рода. При фазовых переходах II рода скачкообразно изменяются теплоемкости, коэффициенты теплового расширения и некоторые другие характеристики вещества. Примеры фазовых переходов II рода: превращение железа в точке Кюри (III.12.5.2°) из ферромагнитного вещества в парамагнитное (III.13.2.5°), переход некоторых металлов и сплавов при весьма низких температурах в состояние сверхпроводимости (VII.2.6.1°).

3°. Обнаружено явление *сверхтекучести гелия II* — практически полное отсутствие вязкости при течении такого гелия через капилляры (II.6.5.5°). Коэффициент вязкости (II.3.8.4°) у гелия II меньше 10^{-12} Па·с, в то время как у гелия I вблизи температуры 4,22 К этот коэффициент имеет величину порядка 10^{-6} Па·с.

4°. Гелий II представляет собой смесь сверхтекучей и нормальной компонент (*двухжидкостная модель жидкого гелия*). Сверхтекучая компонента движется без трения и не участвует в переносе энергии в форме теплоты (II.2.2.1°). Нормальная компонента движется с трением и участвует в переносе энергии.

5°. Теория сверхтекучести основана на квантовой механике (VI.1.1.2°). Квантовая механика объяснила прежде всего, почему гелий является единственной незамерзающей жидкостью при сверхнизких температурах и нормальном давлении. Нулевые колебания (VI.1.5.6°) легких атомов гелия достаточно интенсивны и не позволяют слабым силам притяжения между атомами гелия при обычных давлениях образовать кристаллическую структуру.

В основе современной теории сверхтекучести лежит изучение энергетического спектра гелия при сверхнизких температурах. Непрерывный энергетический спектр в этих условиях может быть рассмотрен как совокупность элементарных возбуждений, или, так называемых, квазичастиц с энергиями $h\nu_i$, где h — постоянная Планка, ν_i — частоты фононов (VII.2.7.5°), соответствующих этим возбуждениям. Квазичастицы нельзя отождествлять с реальными атомами гелия. Они сопоставляются всему коллективу атомов гелия, и значения энергии элементарного возбуждения описывают энергетический спектр всей квантовой системы — жидкого гелия в целом. При низких температурах возбужденное состояние гелия представляет собой звуковые волны, являющиеся элементарными возбуждениями в нормальной части жидкого гелия II. С ними связан запас внутренней энергии в жидком гелии и наличие в нем трения. Но в гелии II возможны такие состояния, соответствующие сверхтекучей части гелия II, в которых «элементарные возбуждения» энергетически не выгодны и не возникают. В результате сильного взаимодействия между частицами сверхтекучей части гелия II образуется связанный коллектив, в котором не возникает тепловых возбуждений, и сверхтекучая часть гелия II не имеет запаса внутренней энергии и не обладает вязкостью. При абсолютном нуле температуры в гелии II не должно было бы быть нормальной части, он весь должен был бы быть сверхтекучим. По мере нагревания число фононов растет, и увеличивается доля нормальной компоненты гелия II. Но пока температура не достигнет 2,19 К, в гелии II сохраняется сверхтекучая компонента с присущими ей свойствами. При температуре 2,19 К гелий II превращается в гелий I, и все особые свойства гелия II исчезают.

Г л а в а II.6. ЖИДКОСТИ

§ II.6.1. Некоторые свойства жидкостей

1°. *Жидкостями* называются тела, которые, имея определенный объем, принимают форму сосуда, в котором они находятся. О тепловом движении в жидкостях см. II.1.1.5°. Характер теплового движения в жидкостях определяет сходство свойств жидкостей со свойствами как твердых тел, так и газов. Подобно твердым телам жидкости малосжимаемы. Это свойство связано с сильным межмолекулярным взаимодействием частиц в жидкостях. При сжатии жидкостей уменьшаются расстояния между молекулами и резко возрастают силы отталкивания, препятствующие сжатию (II.5.1.4°). Жидкости имеют относительно большие плотности, и, так же как твердые тела, сопротивляются не только сжатию, но и растяжению (VII.1.3.6°). Это проявляется в том, что изотермы Ван дер Ваальса заходят в область отрицательных давлений (изотерма при $T=T_1$ на рис. II.5.5). Сходство свойств жидкостей и реальных газов при высоких температурах и малых плотностях проявляется, например, в том, что с повышением температуры уменьшаются коэффициент поверхностного натяжения жидкостей (II.6.4.4°) и удельная теплота парообразования (II.6.6.4°). Кроме того, при повышении температуры сближаются значения плотностей сухого насыщенного пара (II.5.3.2°) и кипящей жидкости (II.5.3.2°).

2°. Сходство между жидкостями и твердыми телами подтверждается данными рентгеноструктурного анализа (V.2.4.1°). При температурах, близких к темпера-

туре кристаллизации, расположение частиц в жидкостях сходно с упорядоченным расположением частиц, характерным для закристаллизовавшихся жидкостей. Взаимное расположение соседних частиц в жидкостях сходно с упорядоченным расположением соседних частиц в кристаллах. Однако эта упорядоченность в жидкостях наблюдается лишь внутри малых объемов. При расстояниях $r > (3+4)a$ от некоторой выбранной «центральной» молекулы упорядоченность размывается (d — эффективный диаметр молекулы (II.1.4.1⁹)). Подобная упорядоченность в расположении частиц называется *ближним порядком в жидкостях*.

3°. Рентгенограммы жидкостей не отличаются от рентгенограмм поликристаллических тел (V.2.4.5⁹), состоящих из очень мелких кристалликов (с линейными размерами порядка 10^{-8} м), произвольно ориентированных друг относительно друга в так называемых *сиботаксических областях*. В пределах этих областей распределение частиц является упорядоченным, но характер упорядоченности изменяется от одной сиботаксической области к другой. Интенсивное тепловое движение при не слишком низких температурах быстро изменяет с течением времени расположение и структуру сиботаксических областей.

§ II.6.2. Дырочная теория жидкого состояния

1°. Важнейшим параметром, который определяет структуру и физические свойства жидкости, является удельный объем. При плавлении кристаллического тела удельный объем возрастает незначительно, приблизительно на 10%. Такой рост удельного объема происходит в твердом теле под действием отрицательного давления, равного теоретическому пределу прочности (VII.1.3.7⁹) твердого тела. Это дает возможность рассматривать жидкость как тело, в котором в различных местах нарушена целостность. При плавлении кристаллических тел частицы вещества приобретают большую подвижность. Этим обуславливается важное свойство *текучести жидкостей*, а также нарушение дальнего порядка в кристаллах и возникновение ближнего порядка в жидкостях (II.6.1.2⁹). Кроме того, в результате большей подвижности частиц в жидком теле возникают микроскопические разрывы, микрополости — *дырки*. Тепловое движение в жидкостях приводит к тому, что дырки самопроизвольно исчезают в одних местах и появляются одновременно в других. Это эквивалентно хаотическому перемещению дырок.

2°. Дырочная теория строения жидкостей неприменима к жидкостям, находящимся под большим внешним давлением порядка тысяч атмосфер, когда сжимаемость жидкостей сравнима со сжимаемостью твердых тел. При высоких температурах, близких к критической ^{*}, жидкость по своим свойствам и строению близка к газу, для которого не имеет смысла понятие дырки и дырочная теория строения жидкостей неприменима.

3°. Из характера теплового движения в жидкостях (II.1.1.5⁹) следует, что молекула колеблется около некоторого положения равновесия в течение времени τ , после чего это положение равновесия скачком смещается на расстояние, по порядку величины равное среднему расстоянию $\langle d \rangle$ между соседними молекулами:

$$\langle d \rangle \approx \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_{\text{ДР}}}}$$

^{*}) Вещества с весьма низкой критической температурой не рассматриваются.

где n_0 — число молекул в единице объема, N_A — постоянная Авогадро (IX), ρ — плотность жидкости, μ — ее молярная масса. Например, для воды $\rho=10^3$ кг/м³, $\mu=0,018$ кг/моль и $\langle d \rangle \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м.

4°. *Временем релаксации* называется среднее время $\langle \tau \rangle$ «оседлого» пребывания молекулы жидкости вблизи некоторого положения равновесия. С повышением температуры $\langle \tau \rangle$ быстро уменьшается (п. 5°). Этим объясняются большая подвижность молекул жидкости при высоких температурах и малая вязкость жидкостей в этих условиях.

5°. Для перехода молекулы от одного положения равновесия к другому (п. 4°) необходима затрата некоторой энергии активации W . Такой переход рассматривается как переход через потенциальный барьер высотой W (VI.1.7.1°), ибо для его осуществления потенциальная энергия молекулы должна возрасти на величину W , и только после этого молекула может перейти в новое положение равновесия. Весь процесс оказывается возможным потому, что в результате столкновений при тепловом движении на отдельных молекулах концентрируется большая энергия, переданная им другими молекулами. Зависимость времени релаксации (п. 4°) от W и абсолютной температуры имеет вид:

$$\langle \tau \rangle = \tau_0 e^{W/kT},$$

где k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), τ_0 — средний период колебаний молекулы около положения равновесия.

6°. Если на жидкость в течение времени $t > \langle \tau \rangle$ действует внешняя сила, то частицы жидкости смещаются главным образом в направлении этой силы и обнаруживается текучесть жидкости. Если $t < \langle \tau \rangle$, то за время действия силы частицы не успевают изменить свои положения равновесия и жидкость проявляет упругие свойства, сопротивляясь изменению и ее объема, и ее формы.

За время $\langle \tau \rangle$ частица жидкости перемещается в среднем на расстояние $\langle d \rangle$, и средняя скорость перемещения молекул $\langle v \rangle$ определяется по формуле:

$$\langle v \rangle = \frac{\langle d \rangle}{\langle \tau \rangle} \quad \text{или} \quad \langle v \rangle = \frac{\langle d \rangle}{\langle \tau_0 \rangle} e^{-W/kT}.$$

Средние скорости движения молекул жидкости, как правило, значительны, но тем не менее на порядок величины меньше средних скоростей молекул пара того же вещества при тех же температурах.

§ II.6.3. Явления диффузии и внутреннего трения в жидкостях

1°. Если в жидкостях возникают условия, необходимые для возникновения явлений переноса (II.3.8.1°), то в них происходят диффузия, теплопроводность и внутреннее трение. Отличия явлений переноса в жидкостях от аналогичных явлений в газах сказываются на величинах коэффициентов переноса и их зависимостях от характеристик свойств жидкостей.

2°. Для химически однородной жидкости коэффициент диффузии D (II.3.8.3°) вычисляется по формуле:

$$D = \frac{1}{6} \frac{\langle d \rangle^2}{\tau_0} e^{-W/kT}.$$

Смысл обозначений см. II.6.2 пп. 3°, 4°, 5°.

Коэффициент диффузии быстро возрастает с увеличением температуры, за счет, главным образом, резкого убывания времени релаксации $\langle \tau \rangle$ (II.6.2.4°). Кроме того, с ростом T несколько возрастает величина $\langle d \rangle$ (II.6.2.3°).

3°. Если температура приближается к критической (II.5.3.1°), то средняя скорость $\langle v \rangle$ частиц жидкости приближается к средней скорости молекул в реальном газе и значения коэффициента диффузии D жидкостей становятся близкими к величинам коэффициентов диффузии газов.

При температурах, много меньших критической, коэффициенты диффузии в жидкостях весьма малы по сравнению с коэффициентами диффузии в соответствующих парах или газах при обычных давлениях. Например, для воды при $T = 300$ К имеем $D \approx 1,5 \cdot 10^{-9}$ м²/с, а для паров воды в воздухе при той же температуре и атмосферном давлении $D \approx 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

4°. При температурах, близких к критической*), тепловое движение в жидкостях приобретает характер, отличный от описанного в (II.1.3.5°) и приближающийся к тепловому движению в газах. В этих условиях внутреннее трение в жидкостях имеет ту же природу, что и в газах (II.3.8.4°).

При температурах, близких к температуре плавления, вязкость жидкости не может быть объяснена так же, как для газов. Механизм возникновения внутреннего трения имеет сложный характер. Коэффициент внутреннего трения η (II.3.8.4°) жидкостей может быть связан с подвижностью молекулы u_0 , под которой понимается скорость u , приобретаемая молекулой под действием внешней

силы F равной единице: $u_0 = \frac{u}{F}$. Связь между η и u_0 оказывается обратно пропорциональной: $\eta \approx u_0^{-1}$. В свою очередь $u_0 \sim \frac{D}{kT}$, где D — коэффициент диффузии, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°).

Следовательно, $\eta \sim T/D$, или $\eta \sim Te^{W/kT}$, где W — энергия активации (II.6.2.5°). С ростом температуры, особенно в области низких температур, вязкость жидкостей быстро уменьшается. При больших давлениях вязкость жидкостей быстро растет с увеличением давления. Это происходит за счет увеличения энергии активации (II.6.2.5°) и соответствующего возрастания времени релаксации (II.6.2.4°).

§ II.6.4. Поверхностное натяжение жидкостей

1°. На молекулы жидкости, находящиеся в поверхностном слое, действуют нескомпенсированные, направленные внутрь силы притяжения со стороны остальной части жидкости. В результате этого поверхностный слой оказывает на всю жидкость большое внутреннее давление порядка десятков тысяч атмосфер.

2°. Частицы поверхностного слоя жидкости имеют большую потенциальную энергию, чем частицы, которые находятся внутри жидкости. Это связано с тем, что для изотермического перехода молекул изнутри жидкости на ее поверхность они должны совершить работу по преодолению направленных внутрь жидкости сил внутреннего давления (п. 1°). Эта работа увеличивает потенциальную энергию молекул, переходящих на поверхность.

*) См. сноску на стр. 139.

Работа A , которую необходимо совершить для изотермического увеличения поверхностного слоя жидкости, равна:

$$A = \langle (F_S - F_V) \rangle N,$$

где $\langle (F_S - F_V) \rangle$ — средняя разность свободных энергий (II.4.4.5°), приходящихся на одну молекулу на поверхности F_S и в объеме F_V , N — число молекул в поверхностном слое жидкости.

3°. Необходимый для устойчивого равновесия жидкости минимум ее потенциальной энергии реализуется в том случае, когда площадь свободной поверхности жидкости оказывается наименьшей. Состоянию устойчивого равновесия жидкого несжимаемого тела соответствует минимум отношения площади его поверхности к объему. Поэтому взвешенные в воздухе малые капли жидкости имеют сферическую форму. Жидкость стремится сократить площадь свободной поверхности, и вследствие этого поверхностный слой подобен растянутой упругой пленке — в нем действуют силы натяжения (см. также п. 5°).

4°. Работа изотермического образования единицы площади поверхности называется *поверхностным натяжением* (*коэффициентом поверхностного натяжения*) σ данной жидкости на границе с другой фазой (II.5.3.3°):

$$\sigma = \frac{A}{S} = \langle (F_S - F_V) \rangle \frac{N}{S} = \langle (F_S - F_V) \rangle n_1,$$

где $n_1 = \frac{N}{S}$ — число молекул на единице площади поверхностного слоя. Коэффициент поверхностного натяжения вычисляется также по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

где ΔF — изменение свободной энергии поверхностного слоя, ΔS — изменение площади поверхности.

Коэффициент поверхностного натяжения σ зависит от химического состава жидкости и ее температуры. С увеличением температуры σ уменьшается и обращается в нуль при критической температуре (II.5.3.1°). При введении в жидкости примесей *поверхностно-активных веществ* коэффициент поверхностного натяжения уменьшается. Это связано с тем, что такие вещества адсорбируются в поверхностном слое жидкости и уменьшают свободную энергию этого слоя (II.4.4.5°).

5°. Между поверхностным слоем жидкости и упругой пленкой (п. 3°) имеется существенное различие. Поверхностное натяжение жидкостей не зависит от размеров свободной поверхности и стремится сократить ее до нуля. Натяжение обычной упругой пленки прямо пропорционально ее деформации и равно нулю при определенной конечной площади поверхности пленки.

Своеобразие свойств жидких пленок связано с тем, что при изотермическом растяжении (сжатии) этих пленок изменяется число молекул в поверхностном слое, а средние расстояния между молекулами и определяемые этими расстояниями силы межмолекулярного взаимодействия не изменяются. Поэтому величина поверхностного натяжения не зависит от площади свободной поверхности жидкости.

6°. Если поверхность жидкости ограничена периметром смачивания (II.6.5.1°), то величина σ равна силе, действующей на единицу длины периметра смачивания и направленной перпендикулярно к ней. Эта сила лежит в плоскости, касательной к свободной поверхности жидкости.

§ II.6.5. Смачивание и капиллярные явления

1°. Свободная поверхность жидкости, искривленная около стенок сосуда, называется *мениском*. Линия, по которой мениск пересекается с твердым телом, называется *периметром смачивания*. Для характеристики мениска вводится *краевой угол* θ между смоченной поверхностью стенки и мениском в точках их пересечения. Если $\theta < \pi/2$ (рис. II.6.1, а), то жидкость считается *смачивающей* стенку, если $\theta > \pi/2$, то жидкость *не смачивает* стенку (рис. II.6.1, б).

Смачивание (несмачивание) считается идеальным, если $\theta = 0$ ($\theta = \pi$). Мениск имеет сферическую форму, вогнутую или выпуклую. Отсутствию смачивания и несмачивания соответствует условие $\theta = \pi/2$, при котором жидкость имеет плоскую свободную поверхность.

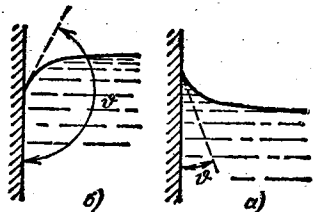


Рис. II.6.1

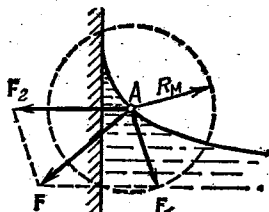


Рис. II.6.2

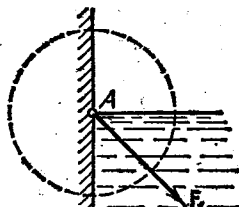


Рис. II.6.3

2°. Появление мениска связано с тем, что молекулы жидкости взаимодействуют друг с другом и с частицами твердого тела. Молекула A поверхностного слоя, находящаяся вблизи стенки сосуда и имеющая сферу молекулярного действия (II.5.2.3°) с радиусом R_m (рис. II.6.2), испытывает результирующие силы притяжения ее всеми остальными молекулами жидкости (F_1) и всеми частицами стенки (F_2). Сила F_2 направлена перпендикулярно к стенке. Это вытекает из соображений симметрии. Направление силы F_1 зависит от формы мениска и положения молекулы A относительно стенки. Например, если мениск плоский (п. 1°) и молекула A находится у самой стенки, то сила F_1 направлена под углом 45° к стенке (рис. II.6.3). Молекула A находится в равновесии только в том случае, если результирующая сила $F = F_1 + F_2$ направлена перпендикулярно к поверхности жидкости *). Иначе молекула A перемещалась бы вдоль этой поверхности.

3°. Форма мениска определяется возможными тремя направлениями силы F :
а) сила F параллельна поверхности стенки, поверхность жидкости плоская и $\theta = \pi/2$ (рис. II.6.4, а);

б) сила F направлена в сторону стенки; силы притяжения молекулы A стенкой превосходят силы ее притяжения молекулами жидкости. Жидкость имеет вогнутый мениск $\theta < \pi/2$, т. е. жидкость смачивает стенку (рис. II.6.4, б);

*) При этом мы пренебрегаем силой тяжести молекулы A , которая пренебрежимо мало по сравнению с силами F_1 и F_2 .

в) сила F направлена в сторону жидкости; силы притяжения молекулы A молекулами жидкости преобладают над силами притяжения ее частицами стенки. Мениск жидкости будет выпуклый, $\phi > \pi/2$, жидкость не смачивает стенку (рис. II.6.4, в).

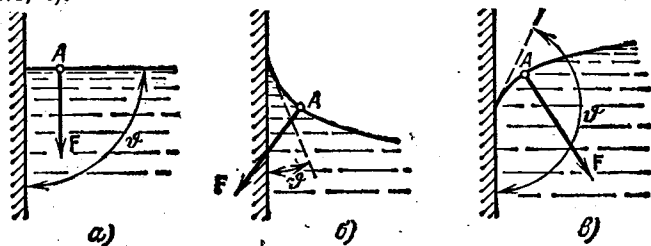


Рис. II.6.4

4°. Искривленный поверхностный слой производит на жидкость дополнительное к внешнему давлению Δp , вызванное силами поверхностного натяжения. Подобно этому растянутая упругая оболочка оказывает давление на заключенный внутри нее газ. Дополнительное давление, производимое на жидкость поверхностным слоем произвольной формы, вычисляется по формуле

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения (II.6.4.4°), R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений*) поверхности жидкости в точке, где находится молекула A . Радиус кривизны R_1 (или R_2) считается положительным, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости. В противном случае радиус кривизны считается отрицательным. Таким образом, $\Delta p > 0$, если мениск выпуклый, и $\Delta p < 0$, если он вогнутый. В случае плоской поверхности $R_1 = R_2 = \infty$, и дополнительное давление отсутствует ($\Delta p = 0$). Для сферической поверхности $R_1 = R_2 = R$ и $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$. Например, такое избыточное давление существует внутри пузырька газа радиуса R , находящегося внутри жидкости вблизи ее поверхности.

Избыточное давление внутри мыльного пузыря радиуса R вызывается действием обоих поверхностных слоев тонкой сферической мыльной пленки:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R}.$$

5°. Уровень жидкости в узких цилиндрических сосудах (*капиллярах*) радиуса r отличается от уровня жидкости в сообщающемся с ним широком сосуде. Уровень жидкости в капилляре выше (ниже), чем в сосуде, на величину h , если жидкость смачивает (не смачивает) стенки сосуда:

$$h = \frac{2\sigma \cos \phi}{r \rho g},$$

*) Нормальным сечением поверхности в точке A называется кривая, которая получается в результате пересечения поверхности с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в этой точке.

где ϕ — краевой угол (п. 1°), ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести (1.7.3.3°).

В том случае, когда капилляр имеет форму узкой щели с постоянной толщиной δ , мениск имеет цилиндрическую форму с радиусом $\delta/2$, и высота поднятия (смачивающей) и опускания (несмачивающей) жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma \cos \phi}{\delta g \rho}.$$

6°. Давление насыщенного пара (11.5.3.2°) над искривленной поверхностью жидкости зависит от формы мениска. Если мениск вогнутый (выпуклый), то давление насыщенного пара меньше (больше), чем над плоской поверхностью, на величину Δp :

$$\Delta p = \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} \Delta p_1,$$

где ρ — плотность насыщенного пара, ρ_1 — плотность жидкости, Δp — дополнительное давление, вызванное кривизной поверхности (п. 4°).

§ 11.6.6. Испарение и кипение жидкостей

1°. Процесс парообразования, происходящий со свободной поверхности жидкости, называется *испарением*. Испарение происходит при любой температуре и возрастает при ее повышении. В поверхностном слое жидкости имеются молекулы, обладающие большой скоростью и кинетической энергией теплового движения. Их вылетом с поверхности жидкости и объясняется испарение и связанное с ним уменьшение запаса внутренней энергии жидкости и ее охлаждение. Мерой процесса парообразования является *скорость испарения* u , измеряемая количеством жидкости, которое переходит в пар за единицу времени. Скорость u зависит от внешнего давления и движения газообразной фазы над свободной поверхностью жидкости

$$u = \frac{cS}{\rho_0} (\rho_{\text{п}} - p),$$

где c — постоянная, S — площадь свободной поверхности жидкости, $\rho_{\text{п}}$ — давление насыщенного пара, p — давление паров жидкости над ее свободной поверхностью, ρ_0 — внешнее барометрическое давление.

2°. *Кипением* называется интенсивное испарение жидкости, происходящее не только с ее свободной поверхности, но и во всем объеме жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара. Пузырьки пара в кипящей жидкости быстро увеличивают свои размеры, всплывают на поверхность и лопаются. С этим связано характерное бурление кипящей жидкости. Давление p внутри газового пузыря, находящегося в жидкости, складывается из внешнего давления ρ_0 , гидростатического давления $\rho_{\text{ж}}$ вышележащих слоев жидкости и добавочного давления Δp , которое вызывается поверхностным натяжением (11.6.5.4°),

$$p = \rho_0 + \rho_{\text{ж}} + \Delta p,$$

причем

$$\rho_{\text{ж}} = \rho g h, \quad \Delta p = \frac{2\sigma}{r},$$

где r — радиус пузырька пара, h — расстояние от его центра до поверхности жидкости, ρ и σ — плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Кипение жидкости начинается при такой температуре, при которой давление $p_{\text{п}}$ насыщенного пара внутри пузырька не меньше давления p (п. 2°):

$$p_{\text{п}} \geq p_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{r}.$$

Если это условие не выполнено, то происходит «захлопывание» пузырька и конденсация находящегося в нем пара.

3°. При малых размерах r пузырьков пара давление $p_{\text{п}}$ должно быть велико и для начала кипения жидкость необходимо нагреть до высокой температуры. При наличии в жидкости *центров парообразования* (пылинки, пузырьки растворенных газов и др.) кипение начинается при значительно более низкой температуре. Это связано с тем, что на центрах парообразования возникают пузырьки пара такого размера, что влиянием третьего члена в неравенстве п. 2° можно пренебречь. Кроме того, обычно $\rho gh \ll p_0$, и приближенное условие для начала кипения имеет вид:

$$p_{\text{п}} \approx p_0.$$

Температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению, называется *температурой (точкой) кипения*.

4°. При неизменном давлении температура кипящей жидкости также остается постоянной. Количество теплоты, которое подводится к кипящей жидкости, целиком расходуется на то, чтобы молекулы жидкости перевести в пар. Теплота $r_{\text{к}}$, необходимая для испарения единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называется *удельной теплотой парообразования*. Величина $r_{\text{к}}$ уменьшается при повышении температуры кипения и обращается в нуль при критической температуре (II.5.3.1°).

Изменение внутренней энергии жидкости (II.2.1.1°) при переходе единицы ее массы в пар при температуре кипения называется *внутренней удельной теплотой парообразования*.

5°. Кипение жидкости и конденсация пара являются примерами *фазовых переходов первого рода* (ср. II.5.4.2°). Для таких фазовых переходов характерно одновременное постоянство давления и температуры, но изменение соотношения между массами двух фаз (II.5.3.3°). Для того чтобы происходил фазовый переход I рода, к системе нужно подводить или отводить от нее *теплоту $r_{\text{к}}$ фазового перехода*. В расчете на единицу массы теплота $r_{\text{к}}$ вычисляется по *уравнению Клапейрона — Клаузиуса*:

$$r_{\text{к}} = (v_2 - v_1) T \frac{dp}{dT},$$

где v_1 и v_2 — соответственно удельные объемы вещества в исходной и конечной фазах, T и p — температура и давление фазового перехода.

6°. Из уравнения Клапейрона — Клаузиуса для кипения жидкости следует, что:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{(v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}) T}{r_{\text{к}}},$$

где $v_{\text{ж}}$ и $v_{\text{п}}$ — удельные объемы жидкости и пара при температуре кипения T .

Так как $v_{\text{п}} > v_{\text{ж}}$ и $r_{\text{к}} > 0$, то $\frac{dT}{dp} > 0$, т. е. при увеличении давления температура кипения возрастает.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава III.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ. ЗАКОН КУЛОНА

§ III.1.1. Введение

1°. *Электростатикой* называется раздел учения об электричестве, в котором изучаются взаимодействия и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчета (1.2.1.2°).

Существуют два рода электрических зарядов — *положительные* и *отрицательные*. Силы взаимодействия неподвижных тел или частиц, обусловленные электрическими зарядами этих тел или частиц, называются *электростатическими силами*. Разноименно заряженные тела притягиваются, а одноименно заряженные отталкиваются друг от друга. *Точечным электрическим зарядом* называется заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в данной задаче. Например, рассматривая электростатическое взаимодействие двух тел, их можно считать точечными электрическими зарядами, если размеры этих тел малы по сравнению с расстоянием между ними.

2°. Электрический заряд любой системы тел состоит из целого числа *элементарных зарядов*, приблизительно равных $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (IX). Наименьшей по массе покая (1.5.6.1°) устойчивой частицей, имеющей отрицательный элементарный заряд, является *электрон*. Масса покая электрона приблизительно равна $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг (IX). Наименьшая по массе покая устойчивая античастица (VIII.2.1.7°) с положительным элементарным зарядом — *позитрон* — имеет такую же массу покая, как и электрон *). Кроме того, существует устойчивая частица с положительным элементарным зарядом — *протон*. Масса покая протона приблизительно равна $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг (IX). Электроны и протоны входят в состав атомов всех химических элементов.

3°. *Закон сохранения электрического заряда*: алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

В системе могут образовываться новые электрически заряженные частицы, например электроны вследствие явления ионизации атомов или молекул (III.9.4.1°), ионы за счет явления ионизации или электролитической диссоциации (III.9.1.5°) и др. Однако если система электрически изолирована, то алгебраическая сумма зарядов всех частиц, вновь появившихся в такой системе, всегда равна нулю. Закон сохранения электрического заряда является одним из фундаментальных законов природы.

4°. В результате соприкосновения при трении двух электрически нейтральных тел заряды переходят от одного тела к другому. В каждом из них нарушается равенство сумм положительных и отрицательных зарядов — тела заряжаются разноименно.

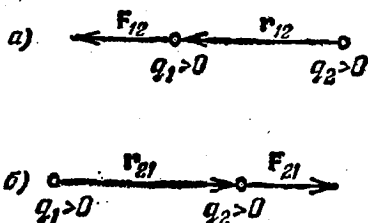
*) Неустойчивость позитрона, связанная с аннигиляцией электрон-позитронной пары (VIII.2.1.7°), при этом не учитывается.

При электризации тела через влияние в нем нарушается равномерное распределение положительных и отрицательных зарядов. Они перераспределяются так, что в одной части тела возникает избыток положительных зарядов, а в другой — отрицательных.

§ III.1.2. Закон Кулона

1°. Силы электростатического взаимодействия заряженных тел (III.1.1.1°) подчиняются экспериментально установленному закону Кулона. Поэтому их часто называют *кулоновскими силами*.

Закон Кулона: сила электростатического взаимодействия двух точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению $q_1 q_2$ этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между зарядами и направлена вдоль соединяющей их прямой, т. е.



$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r_{12}}{r} \quad \text{и} \quad F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r_{21}}{r}.$$

Здесь F_{12} — сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , r_{12} — радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 , $r = |r_{12}|$ (рис. III.1.1, а), а k — коэффициент

пропорциональности ($k > 0$); F_{21} — сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , а $r_{21} = -r_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий заряд q_1 с зарядом q_2 (рис. III.1.1, б).

2°. В СИ (IX) коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — *электрическая постоянная* (IX). Соответственно закон Кулона можно записать в виде

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} r_{12} \quad \text{и} \quad F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} r_{21}.$$

Такая форма записи закона Кулона и всех вытекающих из него законов и формул называется *рационализованной*.

3°. В системах единиц СГСЭ и гауссовой (СГС) (IX) коэффициент пропорциональности k в законе Кулона полагается безразмерным и равным единице. Поэтому здесь закон Кулона имеет вид

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{r^3} r_{12} \quad \text{и} \quad F_{21} = \frac{q_1 q_2}{r^3} r_{21}.$$

4°. Всякое заряженное тело можно рассматривать как систему точечных зарядов. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна геометрической сумме сил, приложенных ко всем точечным электрическим зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела.

В частности, если заряженные тела имеют шарообразную форму, а их заряды q_1 и q_2 распределены равномерно по поверхностям тел, то силу электростатического взаимодействия таких тел в вакууме можно вычислить по формулам п. 1°, полагая в них r равным расстоянию между центрами тел. При этом радиусы тел R_1 и R_2 могут быть соизмеримы с r ($r > (R_1 + R_2)$).

Г л а в а III.2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ III.2.1. Электрическое поле. Напряженность поля

1°. Взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами, движущимися произвольным образом относительно инерциальной системы отсчета, осуществляется посредством *электромагнитного поля*, которое представляет собой совокупность двух взаимосвязанных полей — *электрического поля* и *магнитного поля*. Характерная особенность электрического поля, отличающая его от других физических полей (I.2.2.1°), состоит в том, что оно действует на электрический заряд (заряженную частицу или тело) с силой, которая не зависит от скорости движения заряда. Характерная особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует на движущиеся электрические заряды с силами, пропорциональными скоростям зарядов и направленными перпендикулярно к этим скоростям.

2°. Основной количественной характеристикой электрического поля служит *вектор E напряженности электрического поля*, являющийся его силовой характеристикой. Он равен отношению силы F , которая действует со стороны электрического поля на точечный пробный заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к величине q этого заряда

$$E = \frac{F}{q}.$$

Пробный электрический заряд должен быть столь малым, чтобы его внесение в поле не вызывало перераспределения в пространстве электрических зарядов, создающих это поле. Другими словами, пробный заряд не должен искажать исследуемое с его помощью поле.

Электрическое поле называется *однородным*, если во всех его точках значения вектора напряженности E одинаковы, т. е. совпадают как по модулю, так и по направлению.

3°. Сила F , действующая со стороны электрического поля на помещенный в него произвольный («непробный») точечный электрический заряд q , равна $F = qE$. Однако, в отличие от соотношения п. 2°, здесь E — напряженность в месте нахождения заряда q для поля, искаженного этим зарядом, т. е., в общем случае, отличного от того поля, которое было до внесения в него заряда q .

4°. Кулоновское взаимодействие (III.1.2.1°) между неподвижными электрически заряженными частицами или телами осуществляется посредством создаваемого ими *электростатического поля*. Электростатическое поле представляет собой *стационарное* (не изменяющееся с течением времени) *электрическое поле*.

Напряженность электростатического поля в вакууме, создаваемого точечным зарядом q , можно найти из закона Кулона (III.1.2.2°) и (III.1.2.3°):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{в СГС}),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий заряд q с точкой, где вычисляется напряженность поля. Во всех точках поля векторы E направлены от заряда q , если $q > 0$, и направлены к нему, если $q < 0$. Проекция E_r вектора E на направление радиуса-вектора \mathbf{r} равна

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{q}{r^2} \quad (\text{в СГС}).$$

5°. Для графического изображения электростатических полей применяют метод силовых линий. *Силовыми линиями (линиями напряженности)* называются линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности поля в этой точке. Силовые линии считаются направленными так же, как вектор напряженности. Они нигде не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор E имеет лишь одно направление.

Силовые линии не тождественны с траекториями движения легких заряженных частиц в электростатическом поле. В каждой точке траектории частицы по касательной к траектории направлена скорость. По касательной к силовой линии направлена сила, действующая на заряженную частицу, а следовательно, и ускорение частицы.

§ III.2.2. Принцип суперпозиции электрических полей

1°. Основная задача электростатики формулируется следующим образом: по заданному распределению в пространстве и величине источников поля — электрических зарядов — найти значения вектора напряженности E во всех точках поля. Эта задача может быть решена на основе *принципа суперпозиции электрических полей (принципа независимости действия электрических полей)*: напряженность электрического поля системы зарядов равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

2°. Заряды, создающие электростатическое поле, могут быть распределены в пространстве либо дискретно, либо непрерывно. В первом случае напряженность поля

$$E = \sum_{i=1}^n E_i,$$

где E_i — напряженность в рассматриваемой точке пространства поля, создаваемого одним i -м зарядом системы, а n — общее число дискретных зарядов, которые входят в состав системы.

3°. **Пример 1.** Напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме неподвижными точечными зарядами q_1, q_2, \dots, q_n :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (\text{в СГС}),$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор, проведенный из точечного заряда q_i в рассматриваемую точку поля.

4°. **Пример 2.** Напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме электрическим диполем.

Электрическим диполем называется система из двух равных по абсолютной величине и противоположных по знаку электрических зарядов $q > 0$ и $-q$, расстояние l между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых

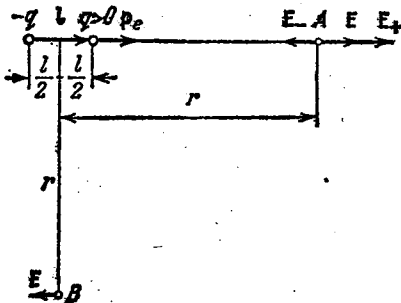


Рис. III.2.1

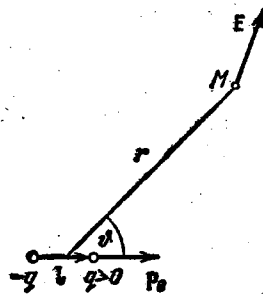


Рис. III.2.2

точек поля. *Плечом диполя* называется вектор \mathbf{l} , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию l между ними (рис. III.2.1). Вектор

$$p_e = ql$$

называется *электрическим моментом диполя (дипольным электрическим моментом)*.

Напряженность E поля диполя в произвольной точке

$$E = E_+ + E_-$$

где E_+ и E_- — напряженности полей зарядов q и $-q$ (рис. III.2.1).

В точке A , расположенной на оси диполя на расстоянии r от его центра ($r \gg l$), напряженность поля диполя в вакууме равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{2p_e}{r^3} \quad (\text{в СГС}).$$

В точке B , расположенной на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины, на расстоянии r от центра ($r \gg l$),

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = -\frac{p_e}{r^3} \quad (\text{в СГС}).$$

В произвольной точке M , достаточно удаленной от диполя ($r \gg l$) (рис. III.2.2), модуль напряженности его поля равен

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{p_e}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (\text{в СГС}).$$

5°. Для характеристики непрерывного распределения электрических зарядов вдоль некоторой линии, по некоторой поверхности или по некоторому объему вводится понятие о плотности зарядов. Если электрические заряды непрерывно распределены вдоль линии, то вводится *линейная плотность зарядов* τ :

$$\tau = \frac{dq}{dl},$$

где dq — заряд малого участка линии длиной dl .

Если электрические заряды непрерывно распределены по некоторой поверхности, то вводится *поверхностная плотность зарядов* σ :

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

где dq — заряд, расположенный на малом участке поверхности площадью dS .

При непрерывном распределении зарядов в каком-либо объеме вводится *объемная плотность зарядов* ρ :

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

где dq — заряд, находящийся в малом элементе объема dV .

6°. Согласно принципу суперпозиции (п. 1°) напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме непрерывно распределенными зарядами, равна

$$E = \int_{(q)} dE,$$

где dE — напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме малым зарядом dq , а интегрирование проводится по всем непрерывно распределенным зарядам. Малый заряд dq можно считать точечным электрическим зарядом (III.1.1.1°). Следовательно,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(q)} \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \int_{(q)} \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{в СГС}),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из места нахождения заряда dq в рассматриваемую точку поля.

§ III.2.3. Поток напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля в вакууме

1°. *Элементарным потоком напряженности электрического поля* сквозь малый участок площадью dS поверхности, проведенной в поле, называется физическая величина

$$dN = E dS = E dS \cos(\widehat{E, n}) = E_n dS = E dS_{\perp},$$

где E — вектор напряженности электрического поля в точках площадки dS , n — единичный вектор, нормальный к площадке dS , $dS = dS n$ — вектор площадки, $E_n = E \cos(\widehat{E, n})$ — проекция вектора E на направление вектора n , $dS_{\perp} = dS \cos(\widehat{E, n})$ — площадь проекции элемента dS поверхности на плоскость, перпендикулярную вектору E (рис. III.2.3).

Например, для электростатического поля точечного заряда q в вакууме

$$dN = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega \quad (\text{в СИ}),$$

$$dN = q d\omega \quad (\text{в СГС}),$$

где $d\omega = dS_{\perp}/r^2$ — телесный угол, под которым площадка dS видна из точки нахождения заряда q , r — расстояние от заряда до площадки, ϵ_0 — электрическая постоянная (IX).

2°. Поток напряженности электрического поля N сквозь поверхность S равен алгебраической сумме потоков сквозь все малые участки этой поверхности:

$$N = \int_{(S)} E dS = \int_{(S)} E dS \cos(\widehat{E, n}) = \int_{(S)} E_n dS = \int_{(S)} E dS_{\perp}.$$

При этом все векторы n нормалей к площадкам dS должны быть направлены в одну и ту же сторону относительно поверхности S . Например, в случае замкнутой поверхности S (рис. III.2.3) все векторы n нормалей должны быть либо внешними, либо внутренними. В дальнейшем используются только внешние нормали.

3°. *Теорема Остроградского — Гаусса:* поток напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность, проведенную в поле, пропорционален алгебраической сумме $q_{\text{охв}}$ электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_{(S)} E dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{охв}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(S)} E dS = 4\pi q_{\text{охв}} \quad (\text{в СГС}),$$

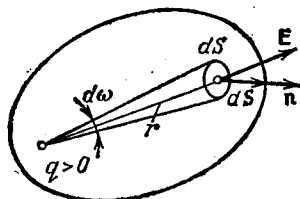


Рис. III.2.3

где ϵ_0 — электрическая постоянная (IX), а все векторы dS направлены вдоль внешних нормалей к замкнутой поверхности интегрирования S , которую часто называют *гауссовой поверхностью*.

О теореме Остроградского — Гаусса для электростатического поля в веществе см. III.4.3.6°.

4°. Теорема Остроградского — Гаусса (п. 3°) применяется, наряду с принципом суперпозиции полей (III.2.2.1°), для расчета электростатических полей в вакууме. Использование теоремы Остроградского — Гаусса особенно удобно в случае полей, которые обладают равнее известной симметрией, обусловленной симметрией в конфигурации зарядов — источников рассматриваемого поля. При этом удается так выбрать гауссову поверхность (п. 3°), что поток напряженности сквозь нее можно выразить через искомую напряженность поля, не выполняя трудоемкого интегрирования. (Примеры расчета полей см. III.3.3.)

5°. С помощью теоремы Остроградского — Гаусса легко доказать одну из основных теорем электростатики — *теорему Ирншоу*, которая утверждает, что система неподвижных точечных электрических зарядов, находящихся на конечных расстояниях друг от друга, не может быть устойчивой. Произвольный точечный заряд q системы находится в положении устойчивого равновесия, если при любом малом смещении заряда q из этого положения на него действует со стороны электростатического поля E остальных зарядов системы сила $F=qE$, направленная к положению равновесия. Пусть S — замкнутая поверхность, охватывающая заряд q и соответствующая столь малым его смещениям из положения равновесия во всевозможных направлениях, что все другие заряды системы находятся вне этой поверхности. Тогда в случае устойчивого равновесия заряда q должно выполняться условие: $\oint_{(S)} F dS = q \oint_{(S)} E dS < 0$. Однако это соотношение противоречит теореме Остроградского — Гаусса: замкнутая поверхность S не охватывает заряды, создающие поле E , и согласно теореме Остроградского — Гаусса $\oint_{(S)} E dS = 0$.

Глава III.3. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ III.3.1. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении в нем электрического заряда

1°. Работа δA , совершаемая кулоновскими силами (III.1.2.1°) при малом перемещении dl точечного заряда q в электростатическом поле, равна

$$\delta A = F dl = qE dl = qE dl \cos(\widehat{E, dl}),$$

где E — напряженность поля в месте нахождения заряда q , $dl = |dl|$ и $(\widehat{E, dl})$ — угол между векторами E и dl .

Работа кулоновских сил при конечном перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{1-2} = q \int_1^2 E dl = q \int_1^2 E dl \cos(\widehat{E, dl}).$$

2°. Если поле создано в вакууме одним точечным зарядом q_i , то в СИ

$$E = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} r_i, \quad dl = dr_i \quad \text{и} \quad E dl = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr_i}{r_i^2},$$

где r_i — радиус-вектор, соединяющий заряд q_i с q , а $r_i = |r_i|$ — расстояние между этими зарядами.

Работа, совершаемая силами поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2, равна

$$A_{1-2} = \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{i1}}^{r_{i2}} \frac{dr_i}{r_i^2} = \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right),$$

где r_{i1} и r_{i2} — расстояния от точек 1 и 2 до заряда q_i .

В СГС

$$A_{1-2} = qq_i \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right).$$

Для одноименных зарядов q и q_i работа кулоновских сил отталкивания положительна, если заряды удаляются друг от друга, и отрицательна, если они сближаются. Работа кулоновских сил притяжения разноименных зарядов положительна при сближении зарядов и отрицательна при их удалении друг от друга.

3°. В произвольном электростатическом поле, созданном в вакууме системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , на точечный заряд q действует сила

$$\mathbf{F} = q \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{r}_i \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i \quad (\text{в СГС}).$$

Работа A_{1-2} этой силы при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 не зависит от формы траектории заряда q :

$$A_{1-2} = \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) \quad (\text{в СИ}),$$

$$A_{1-2} = \sum_{i=1}^n qq_i \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) \quad (\text{в СГС}).$$

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда q вдоль любого замкнутого контура \mathcal{L} равна нулю, так как в этом случае $r_{i2} = r_{i1}$:

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{F} d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом, электростатическое поле является потенциальным полем (I.3.1.6°).

4°. Циркуляцией напряженности \mathbf{E} электрического поля вдоль замкнутого контура \mathcal{L} , проведенного в поле, называется линейный интеграл

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_{(\mathcal{L})} E d\mathbf{l} \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}),$$

где E — напряженность поля в точках малого элемента контура длиной dl , а вектор dl проведен в направлении обхода контура по касательной к нему.

Из соотношений п. 3°, где $F=qE$, следует, что циркуляция напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура \mathcal{L} равна нулю:

$$\oint_{(\mathcal{L})} E \, dl = 0.$$

Это соотношение, выражающее потенциальный характер электростатического поля (I.3.1.6°), справедливо для поля как в вакууме, так и в веществе.

5°. Электростатическое поле является *безвихревым полем*, так как его напряженность E удовлетворяет условию

$$\operatorname{rot} E = 0,$$

которое вытекает, согласно теореме Стокса (III.14.2.2°), из интегрального соотношения для циркуляции вектора E вдоль замкнутого контура (п. 4°).

§ III.3.2. Потенциал электростатического поля

1°. Работа δA , совершаемая силами электростатического поля при малом перемещении точечного заряда q в электростатическом поле (III.3.1.1°), равна убыли потенциальной энергии этого заряда в поле (I.3.3.1°):

$$\delta A = -dW_{\text{п}} \quad \text{и} \quad A_{1-2} = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}},$$

где $W_{\text{п1}}$ и $W_{\text{п2}}$ — значения потенциальной энергии заряда q в точках 1 и 2 поля.

2°. Для поля, созданного в вакууме системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n (III.3.1.3°),

$$W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = q \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) \quad (\text{в СГС}).$$

Абсолютное значение потенциальной энергии заряда q в поле может быть найдено только с точностью до произвольной постоянной интегрирования C :

$$W_{\text{п}} = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + C \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_{\text{п}} = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + C \quad (\text{в СГС}),$$

где r_i — расстояние от заряда q_i до рассматриваемой точки поля, в которой находится заряд q . Обычно полагают $W_{\text{п}} \rightarrow 0$ при $r_i \rightarrow \infty$, так что $C=0$ и

$$W_{\text{п}} = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_{\text{п}} = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{в СГС}).$$

3°. Энергетической характеристикой электростатического поля служит его потенциал. *Потенциалом электростатического поля* называется физическая величина Φ , равная отношению потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ пробного точечного электрического заряда (III.2.1.2°), помещенного в рассматриваемую точку поля, к величине q этого заряда:

$$\Phi = \frac{W_{\text{п}}}{q}.$$

Из соотношений п. 2° следует, что потенциал поля точечного заряда q_i в вакууме

$$\Phi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Phi_i = \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{в СГС}).$$

Таким образом,

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i,$$

т. е., в согласии с принципом суперпозиции электрических полей (III.2.2.1°), при наложении электростатических полей их потенциалы складываются алгебраически.

Примечание. Предполагается при этом одинаковый для всех накладываемых полей выбор точки, в которой потенциал считается равным нулю. Например, в приведенных выше формулах Φ и все Φ_i обращаются в нуль в бесконечно удаленной точке.

Если заряды, создающие поле, распределены в пространстве непрерывно, то потенциал Φ их поля в вакууме (при вышеуказанном выборе точки, где $\Phi=0$) равен

$$\Phi = \int_{(q)} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Phi = \int_{(q)} \frac{dq}{r} \quad (\text{в СГС}),$$

где интегрирование проводится по всем зарядам, участвующим в создании поля.

4°. Работа A_{1-2} , совершаемая силами электростатического поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 поля (потенциал Φ_1) в точку 2 (потенциал Φ_2), равна

$$A_{1-2} = q(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Если $\Phi_2=0$, то

$$\Phi_1 = \frac{A_{1-2}}{q}.$$

Потенциал в какой-либо точке электростатического поля численно равен работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из этой точки поля в ту точку, где потенциал поля принят равным нулю.

При изучении электростатических полей нужно знать разность потенциалов в каких-либо точках поля, а не абсолютные значения потенциалов в этих точках.

Поэтому выбор точки с нулевым потенциалом определяется только удобством решения данной задачи.

5°. Работа сил поля при малом перемещении $d\mathbf{l}$ заряда q в электростатическом поле равна

$$\delta A = -dW_{\text{п}} = -q d\varphi = -q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right),$$

где x, y, z — декартовы координаты точки поля.

С другой стороны, согласно (III.3.1.1°),

$$\delta A = qE d\mathbf{l} = qE_t d\mathbf{l} = q(E_x dx + E_y dy + E_z dz),$$

где $E_t = E \cos(\widehat{E, d\mathbf{l}})$ — проекция вектора E напряженности поля на направление вектора перемещения $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, а $d\mathbf{l} = |d\mathbf{l}|$.

Из сопоставления этих выражений для δA видно, что связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля имеет вид

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{и} \quad E = -\text{grad } \varphi,$$

т. е. напряженность электростатического поля равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциала.

С другой стороны,

$$E_t = -\frac{d\varphi}{dl},$$

т. е. проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстрой убывания потенциала поля на единицу длины в этом направлении. Вдоль силовой линии (III.2.1.5°) E_t и $\left| \frac{d\varphi}{dl} \right|$ достигают максимального значения, равного $|E|$.

6°. Геометрическое место точек электростатического поля, в которых значения потенциала одинаковы, называется *эквипотенциальной поверхностью*. Если вектор $d\mathbf{l}$ направлен по касательной к эквипотенциальной поверхности, то

$$\frac{d\varphi}{dl} = 0 \quad \text{и} \quad E_t = 0, \quad \text{т. е.} \quad d\mathbf{l} \perp E.$$

Следовательно, эквипотенциальные поверхности ортогональны к силовым линиям.

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении электрического заряда по одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю.

7°. Существуют два способа графического изображения электростатических полей: при помощи силовых линий (III.2.1.5°) и при помощи эквипотенциальных поверхностей. Эквипотенциальные поверхности обычно строят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними поверхностями были одинаковы. Зная расположение этих поверхностей, можно построить силовые линии и найти значения напряженности поля. Наоборот, по известному расположению силовых линий электростатического поля можно построить эквипотенциальные поверхности.

§ III.3.3. Примеры применения теоремы Остроградского — Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме

1° Поле заряда q , равномерно распределенного по поверхности сферы радиуса R с поверхностной плотностью $\sigma = q/4\pi R^2$.

Система зарядов, создающих поле, и, следовательно, само поле центрально симметричны относительно центра O сферы. Поэтому расчет поля удобно провести, воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса (III.2.3.3°). Для

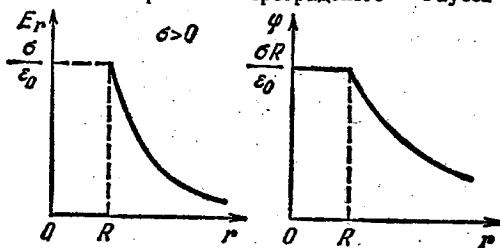


Рис. III.3.1

нахождения напряженности поля E на расстоянии r от точки O следует взять за гауссову поверхность S (III.2.3.3°) сферу радиуса r с центром в точке O . Тогда

$$\oint_{(S)} E \, dS = E_r 4\pi r^2,$$

где E_r — проекция вектора E на радиус-вектор r , проведенный из точки O в рассматриваемую точку поля, а $E = E_r = E_r \frac{r}{r}$.

Если $r \geq R$, то $q_{\text{охв}} = q$ и

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{q}{r^2} \quad (\text{в СГС}).$$

Если $r < R$, то $q_{\text{охв}} = 0$ и $E_r = 0$ (внутри сферы поля нет).

Из связи между потенциалом и напряженностью поля (III.3.2.5°) следует, что $d\phi/dr = -E_r$. Полагая $\phi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, получим для потенциала поля вне сферы ($r \geq R$)

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\phi = \frac{q}{r} \quad (\text{в СГС}).$$

Внутри сферы ($r < R$) потенциал всюду одинаков:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\phi = \frac{q}{R} = 4\pi\sigma R \quad (\text{в СГС}).$$

Графики зависимостей E_r и ϕ от r (в СИ) показаны на рис. III.3.1.

2°. Поле заряда q , равномерно распределенного в вакууме по объему шара радиуса R с объемной плотностью $\rho = 3q/4\pi R^3$.

Центр шара O является центром симметрии поля. Поэтому для гауссовой поверхности S в виде сферы радиуса r с центром в точке O

$$\oint_{(S)} \mathbf{E} dS = E_r 4\pi r^2,$$

где E_r — проекция вектора \mathbf{E} на радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный из точки O в рассматриваемую точку поля, а $\mathbf{E} = E_r = E_r \frac{\mathbf{r}}{r}$. Связь потенциала φ с \mathbf{E} имеет

$$\text{вид: } \frac{d\varphi}{dr} = -E_r.$$

Если $r \geq R$, то $q_{\text{охв}} = q$ и

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{q}{r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{r} \quad (\text{в СГС}).$$

Если $r < R$, то $q_{\text{охв}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = q (r^3/R^3)$ и

$$E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{qr}{R^3} = \frac{4}{3}\pi\rho r \quad (\text{в СГС}).$$

Из связи между φ и \mathbf{E} следует, что для $r < R$

$$\varphi = \varphi(R) - \int_R^r E_r dr,$$

так что

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} \rho R^2 + \frac{2\pi\rho}{3} (R^2 - r^2) \quad (\text{в СГС}).$$

Графики зависимостей E_r и φ от r (в СИ) показаны на рис. III.3.2.

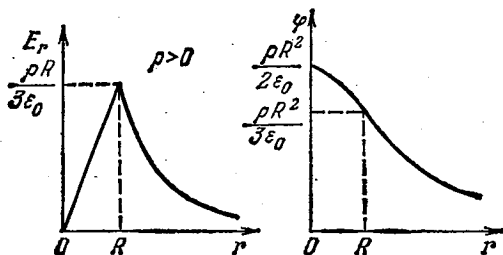


Рис. III.3.2

3°. Поле заряда, равномерно распределенного в вакууме с поверхностной плотностью σ по круговой цилиндрической поверхности, радиус R которой во много раз меньше длины l образующей.

Вдали от концов заряженной поверхности и на расстояниях r от ее оси OO' , малых по сравнению с l , поле можно считать осесимметричным — векторы E направлены перпендикулярно к оси OO' и радиально от нее (при $\sigma > 0$) или к ней (при $\sigma < 0$). Если за гауссову поверхность S взять поверхность кругового цилиндра радиуса r и высоты $H \ll l$, ось которого совпадает с OO' , то

$$\oint_{(S)} E dS = E_r 2\pi r H,$$

где E_r — проекция вектора E на радиус-вектор r , проведенный от оси OO' в рассматриваемую точку поля и направленный перпендикулярно к OO' . Потенциал поля зависит от r и удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E_r.$$

Если $r < R$, то $q_{\text{охв}} = 0$ и $E_r = 0$, а $\varphi = \text{const}$ (внутри цилиндра радиуса R поля нет). Удобно принять эту константу равной нулю, т. е. принять $\varphi = 0$ в точках оси OO' .

Если $r \geq R$, то $q_{\text{охв}} = \sigma 2\pi R H$ и

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}, \quad \varphi = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{4\pi\sigma R}{r}, \quad \varphi = -4\pi\sigma R \ln \frac{r}{R} \quad (\text{в СГС}).$$

Графики зависимостей E_r и φ от r (в СИ) показаны на рис. III.3.3.

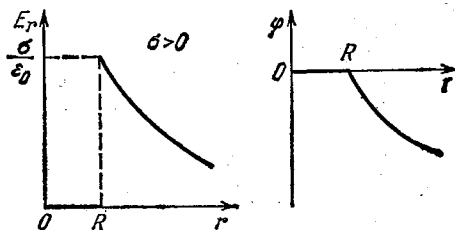


Рис. III.3.3

4°. Поле заряда, равномерно распределенного в вакууме с объемной плотностью ρ по объему кругового цилиндра, радиус R которого во много раз меньше длины l образующей.

Вдали от концов заряженного цилиндра и на расстояниях $r \ll l$ от его оси OO' поле можно считать осесимметричным — векторы E направлены перпендикулярно оси OO' и радиально от нее (если $\rho > 0$) или к ней (если $\rho < 0$). Выбирая гауссову поверхность S так же, как в п. 3°, получим, что в области поля, где $r < R$,

$$E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = 2\pi\rho r \quad \text{и} \quad \varphi = -\pi\rho r^2 \quad (\text{в СГС}).$$

В области поля, где $r \geq R$,

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R}\right) \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{2\pi\rho R^2}{r} \quad \text{и} \quad \varphi = -\pi\rho R^2 \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R}\right) \quad (\text{в СГС}).$$

Графики зависимостей E_r и φ от r (в СИ) показаны на рис. III.3.4.

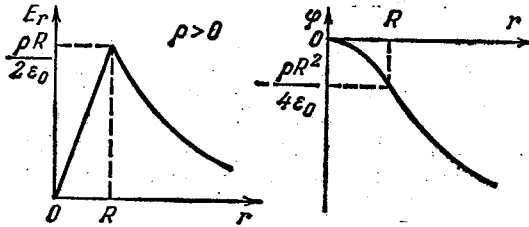


Рис. III.3.4

б) Поле заряда, равномерно распределенного в вакууме с поверхностной плотностью σ по плоскости.

Эта плоскость ($x=0$) является плоскостью симметрии поля, векторы напряженности E которого направлены перпендикулярно к плоскости от нее (если $\sigma > 0$) или к ней (если $\sigma < 0$). За гауссову поверхность S удобно принять поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны к плоскости, а основания площадью ΔS параллельны ей и лежат по разные стороны от нее на одинаковых расстояниях. Так как векторы E направлены вдоль оси OX ($E = E_x i$) и $E_x(x) = -E_x(-x)$, то

$$\oint_{(S)} E \, dS = 2E_x \Delta S, \quad \text{а} \quad q_{\text{охв}} = \sigma \Delta S,$$

где E_x — проекция вектора E на ось OX в точках с координатами $x > 0$. Таким образом, для точек поля с координатами $x > 0$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_x = 2\pi\sigma \quad (\text{в СГС}),$$

а для точек поля с координатами $x < 0$

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_x = -2\pi\sigma \quad (\text{в СГС}).$$

Общая формула для напряженности в любой точке поля

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_x = 2\pi\sigma \frac{x}{|x|} \quad (\text{в СГС}).$$

Так как $\frac{d\varphi}{dx} = -E_x$, то, полагая потенциал поля равным нулю в точках заряженной плоскости $x=0$, получим

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = -2\pi\sigma |x| \quad (\text{в СГС}).$$

Графики зависимостей E_x и φ от x (в СИ) показаны на рис. III.3.5.

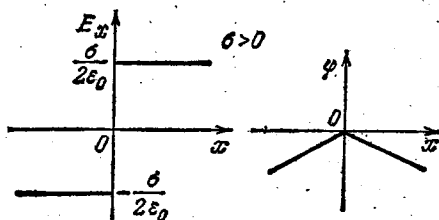


Рис. III.3.5

6°. Рассмотренные примеры электростатических полей подтверждают справедливость следующих двух общих выводов:

- 1) напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность;
- 2) потенциал поля всегда является непрерывной функцией координат.

Глава III.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

§ III.4.1. Дипольные моменты молекул диэлектрика

1°. Вещества, которые не проводят электрический ток, называются *диэлектриками*. В диэлектриках, в отличие от проводников, нет свободных носителей заряда — заряженных частиц, которые могли бы прийти под действием электрического поля в упорядоченное движение и образовать ток проводимости (III.7.1.2°).

2°. Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер, входящих в состав молекулы, равен нулю. Тем не менее молекулы обладают электрическими свойствами. В первом приближении молекулу можно рассматривать как электрический диполь (III.2.2.4°) с дипольным электрическим моментом $p_e = ql$. Здесь q — суммарный положительный заряд всех атомных ядер в молекуле, а l — вектор, проведенный из «центра тяжести» электронов в молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомных ядер. Как всякий электрический диполь, молекула создает электрическое поле (III.2.2.4°).

3°. Диэлектрик называется *неполярным* (диэлектриком с *неполярными молекулами*), если в отсутствие внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах этого диэлектрика совпадают ($l=0$) и дипольные моменты молекул равны нулю. Таковы, например, молекулы H_2 , N_2 , O_2 , CCl_4 и др. Во внешнем электрическом поле происходит дефор-

мация электронных оболочек атомов и молекул, «Центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов смещаются друг относительно друга ($I \neq 0$). Соответственно неполярная молекула диэлектрика приобретает во внешнем электрическом поле *индуцированный (наведенный) дипольный электрический момент*, пропорциональный напряженности E поля:

$$p_e = \epsilon_0 \alpha E \quad (\text{в СИ}),$$

$$p_e = \alpha E \quad (\text{в СГС}),$$

где α — *полярizуемость молекулы*, зависящая только от объема молекулы. Неполярная молекула подобна *квазиупругому диполю*, длина плеча которого пропорциональна растягивающей силе, т. е. пропорциональна напряженности внешнего электрического поля.

Тепловое движение неполярных молекул никак не влияет на возникновение у них индуцированных дипольных электрических моментов: векторы p_e всегда совпадают по направлению с вектором E , а полярizуемость α не зависит от температуры. Это связано с малой инертностью электронов, которые смещаются в молекуле всегда в направлении силы $-eE$, действующей на них со стороны внешнего электрического поля.

4°. *Полярным диэлектриком* (диэлектриком с *полярными молекулами*) называется такой диэлектрик, молекулы (атомы) которого имеют электроны, расположенные несимметрично относительно атомных ядер (H_2O , HCl , NH_3 , CH_3Cl и др.). В таких молекулах «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают даже в отсутствие внешнего электрического поля. В первом приближении можно считать, что молекулы полярных диэлектриков по своим электрическим свойствам подобны *жестким диполям*, у которых имеется *постоянный* (по модулю) *электрический дипольный момент* ($p_e = \text{const}$).

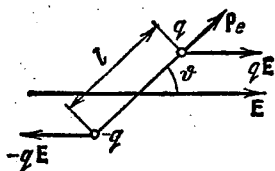


Рис. III.4.1

5°. В однородном внешнем электрическом поле на жесткий диполь действует пара сил (I.4.1.6°), момент которой равен

$$M = [p_e E].$$

Момент пары M направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы p_e и E , причем из конца M вращение от p_e к E по кратчайшему пути видно происходящим против часовой стрелки. На рис. III.4.1 момент M направлен за чертеж и стремится развернуть диполь так, чтобы вектор p_e совпал по направлению с E .

В действительности внешнее электрическое поле вызывает в полярных диэлектриках не только поворот осей диполей по полю, но также и деформацию молекул, т. е. появление у них дополнительного индуцированного дипольного момента (п. 3°).

6°. Жесткий диполь, находящийся в электростатическом поле, обладает потенциальной энергией W_n . При повороте диполя на малый угол $d\theta$ силы поля совершают работу δA за счет соответствующего уменьшения потенциальной энергии диполя:

$$\delta A = - p_e E \sin \theta d\theta = - dW_n,$$

где ϕ — угол между векторами \mathbf{p}_e и \mathbf{E} (рис. III.4.1). Полагая $W_n=0$ при $\phi=\pi/2$, получаем

$$W_n = -\mathbf{p}_e \mathbf{E} = -p_e E \cos \phi.$$

В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия диполя достигает минимального значения (I.3.4.5°). В этом положении $\phi=0$ и вращающий момент (п. 5°) $M=0$.

7°. Если диполь находится в неоднородном поле, напряженность \mathbf{E} которого изменяется на длине диполя l , то на него действует не только вращающий момент $M=[\mathbf{p}_e \mathbf{E}]$, но также еще и результирующая сила

$$\mathbf{F} = p_e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = p_{ex} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_{ey} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_{ez} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z},$$

где p_{ex} , p_{ey} , p_{ez} — проекции вектора \mathbf{p}_e на оси декартовых координат, а $\partial \mathbf{E}/\partial l$, $\partial \mathbf{E}/\partial x$, $\partial \mathbf{E}/\partial y$, $\partial \mathbf{E}/\partial z$ — производные вектора \mathbf{E} по соответствующим направлениям (вдоль оси диполя и вдоль координатных осей).

Из выражения для потенциальной энергии диполя в электростатическом поле (п. 6°) и (I.3.3.1°) следует, что силу, действующую на диполь в неоднородном поле, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{p}_e \mathbf{E}).$$

§ III.4.2. Поляризация диэлектриков

1°. Если полярный диэлектрик (III.4.1.4°) не находится во внешнем электрическом поле, то в результате теплового движения молекул векторы их дипольных электрических моментов ориентированы хаотически. Поэтому сумма дипольных моментов всех молекул, содержащихся в любом макроскопически малом объеме *) ΔV диэлектрика, равна нулю.

В неполярном диэлектрике (III.4.1.3°), не находящемся во внешнем электрическом поле, равны нулю дипольные моменты каждой отдельной молекулы.

2°. При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит *поляризация диэлектрика*, состоящая в том, что в любом малом его объеме ΔV возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул. Диэлектрик в таком состоянии называется *поляризованным*. В зависимости от строения молекул (атомов) диэлектрика различают три типа поляризации:

а) *ориентационная поляризация* полярных диэлектриков (III.4.1.4°). Внешнее электрическое поле стремится ориентировать дипольные моменты полярных молекул — жестких диполей по направлению поля (III.4.1.5°). Этому препятствует хаотическое тепловое движение молекул, стремящееся произвольно «разбросать» диполи. В итоге совместного действия поля и теплового движения возникает преимущественная ориентация дипольных электрических моментов молекул вдоль поля, возрастающая с увеличением напряженности электрического поля и с уменьшением температуры;

б) *электронная (деформационная) поляризация* неполярных диэлектриков (III.4.1.3°). Под действием внешнего электрического поля в молекулах диэлектриков этого типа возникают индуцированные дипольные моменты (III.4.1.3°),

*) Предполагается, что ΔV во много раз больше объема одной молекулы, так что в объеме ΔV содержится еще очень много молекул.

направленные вдоль поля. Тепловое движение молекул не оказывает влияния на электронную поляризацию. В газообразных и жидких полярных диэлектриках электронная поляризация происходит одновременно с ориентационной;

в) *ионная поляризация* в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку (VII.1.1.3°). Внешнее электрическое поле вызывает смещение в таких диэлектриках всех положительных ионов в направлении напряженности поля E , а всех отрицательных ионов — в противоположную сторону.

3°. Количественной мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризованности P_e . *Поляризованностью* (вектором поляризации) называется отношение электрического дипольного момента малого объема диэлектрика к величине ΔV этого объема:

$$P_e = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n p_{ei},$$

где p_{ei} — электрический дипольный момент i -й молекулы, n — общее число молекул в объеме ΔV . Этот объем должен быть столь малым, чтобы в его пределах электрическое поле можно было считать однородным (III.2.1.2°). В то же время число n молекул в объеме ΔV должно быть достаточно велико, для того чтобы к ним можно было применять статистические методы исследования (II.1.2.2°).

4°. Поляризованность неполярного диэлектрика (III.4.1.3°) в электрическом поле напряженности E равна

$$P_e = n_0 p_e,$$

где n_0 — число молекул в единице объема, p_e — индуцированный дипольный момент одной молекулы. Используя (III.4.1.3°), получим

$$P_e = n_0 \epsilon_0 \alpha E = \epsilon_0 \kappa E \quad (\text{в СИ}),$$

$$P_e = n_0 \alpha E = \kappa E \quad (\text{в СГС}),$$

где $\kappa = n_0 \alpha$ — *диэлектрическая восприимчивость* вещества.

5°. Если полярный диэлектрик (III.4.1.4°) находится в электрическом поле, то его поляризованность

$$P_e = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n p_{ei} = \frac{n}{\Delta V} \langle p_e \rangle = n_0 \langle p_e \rangle,$$

где $\langle p_e \rangle$ — среднее значение вектора дипольного момента для всех n молекул, содержащихся в малом объеме ΔV диэлектрика. Векторы p_{ei} молекул — жестких диполей одинаковы по модулю и различаются только ориентациями в поле. Для случая поляризации полярных диэлектриков в слабых электрических полях, напряженность E которых удовлетворяет условию: $E \ll kT/p_e$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура), поляризованность равна

$$P_e = \epsilon_0 \kappa E \quad (\text{в СИ}),$$

$$P_e = \kappa E \quad (\text{в СГС}),$$

причем диэлектрическая восприимчивость κ полярного диэлектрика вычисляется по формуле Дебая — Ланжевена

$$\kappa = \frac{n_0 p_e^2}{3\epsilon_0 kT} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\kappa = \frac{n_0 p_e^2}{3kT} \quad (\text{в СГС}).$$

На рис. III.4.2 показана зависимость κ от $1/T$ для полярных (а) и неполярных (б) диэлектриков. Прямая (а) не проходит через начало координат ввиду того, что в полярных диэлектриках обычно происходит и ориентационная, и электронная поляризации (п. 1°). Соответственно диэлектрическая восприимчивость $\kappa = \kappa' + \kappa''$, где κ' и κ'' выражаются формулами пп. 4° и 5°.

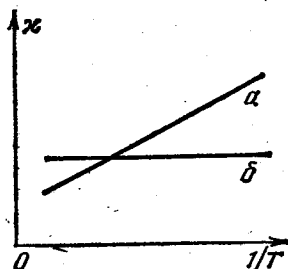


Рис. III.4.2

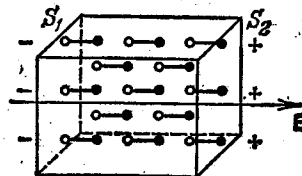


Рис. III.4.3

6°. В пп. 4° и 5° рассмотрена поляризация электрически изотропных диэлектриков (IV.3.1.6°), диэлектрическая восприимчивость κ которых — величина скалярная, так что вектор поляризованности P_e совпадает по направлению с вектором напряженности поля E . Если диэлектрик не изотропен (анизотропен), то его диэлектрическая восприимчивость κ — величина тензорная. В такой среде векторы P_e и E коллинеарны лишь при некоторых определенных направлениях поля в среде. Для всех остальных направлений поля вектор P_e не коллинеарен E и, следовательно, не пропорционален E .

7°. В результате поляризации диэлектрика в тонких слоях у ограничивающих его поверхностей S_1 и S_2 (рис. III.4.3) возникают некомпенсированные связанные заряды, называемые *поверхностными поляризационными зарядами*. У поверхности S_1 , в которую входят силовые линии поля (III.2.1.5°), возникает избыток отрицательных зарядов молекул — диполей, а у противоположной поверхности S_2 — избыток положительных зарядов. Поверхностная плотность (III.2.2.5°) σ_p поляризационных зарядов равна проекции вектора поляризованности P_e на внешнюю нормаль n к рассматриваемой поверхности диэлектрика:

$$\sigma_p = P_{en}$$

В неоднородном электрическом поле поляризация диэлектрика также неоднородна: его поляризованность P_e зависит от координат. Поэтому, кроме поверхностных поляризационных зарядов, могут возникать еще и *объемные поляризационные заряды*, распределенные с объемной плотностью (III.2.2.5°) ρ_p , равной

$$\rho_p = -\operatorname{div} P_e$$

где $\operatorname{div} P_e = \frac{\partial P_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial P_{ey}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ez}}{\partial z}$ — дивергенция вектора поляризованности,

В случае однородного изотропного диэлектрика $\kappa = \operatorname{const}$ и $\rho_p = -\frac{\kappa}{\kappa + 1} \rho$, где ρ — объемная плотность свободных зарядов (III.4.3.1°).

§ III.4.3. Теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля в среде

1°. При рассмотрении электрических полей в различных средах различают два типа электрических зарядов — свободные и связанные. *Связанными зарядами* называются заряды, которые входят в состав атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой (VII.1.1.3°). Заряды, не связанные с перечисленными выше частицами вещества, называются свободными. *Свободными зарядами* являются:

а) заряды носители тока в проводящих средах: электроны проводимости в металлах и полупроводниках (III.5.1.1°) и (VII.2.10.2°), дырки в полупроводниках (VII.2.10.3°), ионы в электролитах и газах и т. п.;

б) избыточные заряды, сообщенные телу и нарушающие его электрическую нейтральность, например заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектрика.

2°. Электрическое поле в диэлектрической среде создается как свободными, так и связанными зарядами. Вектор напряженности E характеризует результирующее поле. Однако первичным источником электрического поля в диэлектрике являются свободные заряды, так как поле связанных зарядов возникает в результате поляризации диэлектрика при помещении его в электрическое поле, созданное системой свободных электрических зарядов. В свою очередь поле связанных зарядов может вызвать перераспределение свободных зарядов (например, если они находятся на проводниках) и соответственно изменить поле этих зарядов.

3°. Согласно принципу суперпозиции полей (III.2.2.1°) напряженность E поля в среде равна геометрической сумме напряженностей полей свободных ($E^{\text{своб}}$) и связанных ($E^{\text{связ}}$) зарядов:

$$E = E^{\text{своб}} + E^{\text{связ}}$$

Соответственно теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля в вакууме (III.2.3.3°) может быть распространена на электростатическое поле в среде, если под $q_{\text{охв}}$ понимать алгебраическую сумму всех свободных и связанных зарядов, охватываемых замкнутой гауссовой поверхностью S :

$$\oint_{(S)} E dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q_{\text{охв}}^{\text{своб}} + q_{\text{охв}}^{\text{связ}}) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(S)} E dS = 4\pi (q_{\text{охв}}^{\text{своб}} + q_{\text{охв}}^{\text{связ}}) \quad (\text{в СГС}).$$

4°. Молекулы — диполи электрически нейтральны. Поэтому вклад в $q_{\text{охв}}^{\text{связ}}$ дают только те диполи, которые перерезаются гауссовой поверхностью S . Величину $q_{\text{охв}}^{\text{связ}}$ легко найти на примере поля в неполярном диэлектрике, электрические моменты p_e молекул которого коллинеарны вектору E . На рис. III.4.4 показан малый участок dS гауссовой поверхности S . Вектор E в пределах площадки dS всюду одинаков и составляет угол α с внешней нормалью (и вектором dS). Площадка dS перерезает только те dn диполей, центры которых находятся внутри показанного на рис. III.4.4 штриховой линией косоугольного цилиндра с основанием площадью dS и образующей, равной длине l молекулы — диполя (рис. III.4.1):

$$dn = n_0 l dS \cos \alpha,$$

где n_0 — число молекул в единице объема диэлектрика. Заряд $dq_{\text{связ}}$, соответствующий этим диполям, равен

$$dq_{\text{связ}} = -q \, dn = -n_0 p_e \, dS \cos \alpha = -P_e \, dS \cos \alpha = -P_e \, dS.$$

Таким образом,

$$q_{\text{связ}} = - \oint_{(S)} P_e \, dS.$$

5°. *Электрическим смещением (электрической индукцией)* называется векторная величина \mathbf{D} , характеризующая электрическое поле и равная

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad (\text{в СГС}).$$

Из соотношений (III.4.2.4°) и (III.4.2.5°) для поляризованности изотропного диэлектрика следует, что

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \text{где} \quad \epsilon = 1 + \kappa \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{где} \quad \epsilon = 1 + 4\pi \kappa \quad (\text{в СГС}).$$

Безразмерная величина ϵ называется *относительной диэлектрической проницаемостью среды*. Для одной и той же среды значения ϵ в СИ и СГС одинаковы, так как значения диэлектрической восприимчивости κ этой среды в СИ и в СГС отличаются в 4π раз. Для вакуума $\kappa=0$ и $\epsilon=1$.

6°. На основании соотношений пп. 3°—5° можно записать *теорему [Остроградского — Гаусса для электростатического поля в среде]* в форме

$$\oint_{(S)} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = q_{\text{своб}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(S)} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = 4\pi q_{\text{своб}} \quad (\text{в СГС}).$$

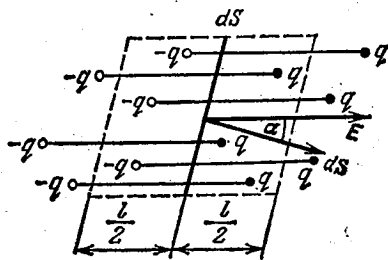


Рис. III.4.4

Согласно этой теореме поток *электрического смещения (поток смещения)* электростатического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность, проведенную в поле, пропорционален алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью. Коэффициент пропорциональности равен 1 в СИ и 4π в СГС.

Примечание. При вычислении потока смещения сквозь замкнутую поверхность S векторы $d\mathbf{S}$ следует направлять вдоль внешних нормалей к соответствующим малым участкам поверхности S .

§ III.4.4. Условия для электростатического поля на границе раздела изотропных диэлектрических сред

1°. Из условия *потенциальности* электростатического поля (III.3.1.4°) следует, что на границе раздела двух изотропных диэлектрических сред с *относительными диэлектрическими проницаемостями* ϵ_1 и ϵ_2 (III.4.3.5°) векторы напря-

женности поля E и электрического смещения D связаны соотношениями

$$E_{2\tau} = E_{1\tau} \quad \text{и} \quad \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1}.$$

Здесь E_τ и D_τ — проекции векторов E и D на единичный вектор τ , касательный к границе раздела сред.

2°. Вторая пара соотношений для проекций векторов E и D на единичный вектор n , проведенный из среды 2 в среду 1 по нормали к поверхности их раздела, вытекает из теоремы Остроградского — Гаусса (III.4.3.6°) и имеет вид

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = 4\pi\sigma \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь σ — поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела сред. Если эта поверхность специально не наэлектризована, то на ней находятся только поверхностные поляризационные заряды (III.4.2.7°), так что $\sigma = 0$ и

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \quad \text{и} \quad D_{2n} = D_{1n}.$$

В частности, если первая среда — вакуум, то $\varepsilon_1 = 1$ и $E_{2n} = E_{1n}/\varepsilon_2$.

Таким образом, относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает, во сколько раз уменьшается нормальная составляющая напряженности электростатического поля при переходе из вакуума в данную среду.

3°. При переходе через границу раздела двух диэлектрических сред силовые линии электростатического поля преломляются (рис. III.4.5). Если $\sigma = 0$ (см. п. 2°), то закон преломления силовых линий электростатического поля имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

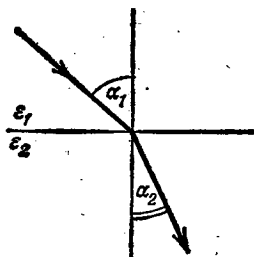


Рис. III.4.5

где α_1 и α_2 — углы, образуемые силовыми линиями в 1-й и 2-й средах с нормалью к границе раздела сред.

4°. Вектор напряженности поля не изменяется при переходе из одной диэлектрической среды в другую в тех точках поверхности раздела сред, где он касается силовых линий поля, так что $E_1 = E_{1\tau}$, $E_2 = E_{2\tau}$ и $E_2 = E_1$. Соответственно для вектора электрического смещения в этих точках выполняется соотношение

$$D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_1.$$

Если поверхность раздела двух сред совпадает с эквипотенциальной поверхностью электростатического поля (III.3.2.6°), то векторы напряженности поля и электрического смещения ортогональны к этой поверхности, т. е. $E_1 = E_{1n}$, $E_2 = E_{2n}$, $D_1 = D_{1n}$ и $D_2 = D_{2n}$. Поэтому при переходе через такую границу не изменяется вектор электрического смещения:

$$D_2 = D_1, \quad \text{а} \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1.$$

5°. Если однородный изотропный диэлектрик *) с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ заполняет весь объем электростатического поля или часть его, ограниченную эквипотенциальными поверхностями, то напряженность поля в диэлектрике E в ϵ раз меньше, чем напряженность поля $E^{\text{вак}}$ в той же точке поля, создаваемого теми же свободными зарядами (III.4.3.1°) в вакууме:

$$E = \frac{1}{\epsilon} E^{\text{вак}}.$$

Пример 1. Напряженность и потенциал поля точечного заряда q в однородном изотропном диэлектрике, заполняющем все поле (сравните с (III.2.1.3°) и (III.3.2.3°)):

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{q}{\epsilon r^2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{\epsilon r} \quad (\text{в СГС}).$$

Пример 2. Поле равномерно заряженного с объемной плотностью ρ шара радиуса R из однородного изотропного диэлектрика (ϵ_1), окруженного другим однородным изотропным диэлектриком (ϵ_2).

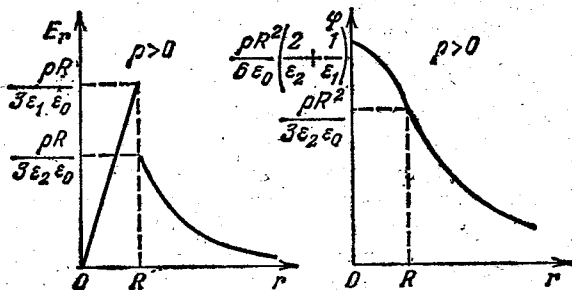


Рис. III.4.6

Поверхность раздела сред является эквипотенциальной поверхностью. Поэтому вне заряженного шара $E_r = E_r^{\text{вак}}/\epsilon_2$, а внутри него $E_r = E_r^{\text{вак}}/\epsilon_1$, где $E_r^{\text{вак}}$ определяется по формулам (III.3.3.2°), в которых $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$:

а) в области $r \geq R$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 r^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{q}{\epsilon_2 r^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{\epsilon_2 r} \quad (\text{в СГС});$$

*) Предполагается, что диэлектрик не обладает сегнетоэлектрическими свойствами (III.4.5.4°), так что его относительная диэлектрическая проницаемость ϵ не зависит от E .

б) в области $r < R$

$$E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_1\epsilon_0} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_2\epsilon_0} + \frac{\rho}{6\epsilon_1\epsilon_0} (R^2 - r^2) \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{4\pi\rho r}{3\epsilon_1} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{4\pi\rho R^2}{3\epsilon_2} + \frac{2\pi\rho}{3\epsilon_1} (R^2 - r^2) \quad (\text{в СГС}).$$

Графики зависимостей E_r и φ от r (в СИ) для случая $\rho > 0$ и $\epsilon_2 > \epsilon_1$ показаны на рис. III.4.6.

§ III.4.5. Сегнетоэлектрики

1°. *Сегнетоэлектриками* называется группа кристаллических диэлектриков, обладающих в определенном интервале температур самопроизвольной (спонтанной) поляризацией, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий — электрического поля, деформации, изменения температуры. Примерами сегнетоэлектриков могут служить сегнетова соль ($\text{Na K C}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), титанат бария (Ba Ti O_3). Сегнетоэлектрики иногда называют также *ферроэлектриками*, так как их электрические свойства подобны магнитным свойствам ферромагнетиков (III.12.5.1°).

2°. В отсутствие внешнего электрического поля весь объем сегнетоэлектрика самопроизвольно разбит на небольшие области, которые поляризованы до насыщения и называются *доменами (диэлектрическими доменами)*. Возможные направления электрических моментов доменов определяются симметрией кристалла. Однако в отсутствие внешнего поля суммарный электрический момент кристалла сегнетоэлектрика равен нулю.

Поляризация сегнетоэлектрического образца во внешнем электрическом поле состоит, во-первых, в смещении границ доменов и росте размеров тех доменов, векторы электрических моментов которых близки по направлению к напряженности поля E , и, во-вторых, в повороте электрических моментов доменов по полю. В достаточно сильном поле достигается *состояние насыщения*, когда весь образец поляризован по полю и его поляризованность P_e не изменяется при дальнейшем увеличении E .

3°. Для сегнетоэлектриков характерно явление *диэлектрического гистерезиса (запаздывания)*, состоящее в различии значений поляризованности сегнетоэлектрического образца при одной и той же напряженности электрического поля в зависимости от значения предварительной поляризованности этого образца (рис. III.4.7). С увеличением напряженности поля поляризованность первоначально неполяризованного образца возрастает от значения $P_e = 0$ при $E = 0$ до значения P_{en} в точке *a*, соответствующей состоянию насыщения. При дальнейшем уменьшении E до нуля поляризованность образца уменьшается до значения P_{e0} , называемого *остаточной поляризованностью*. Поляризация образца исчезает полностью лишь под действием электрического поля противоположного направления с напряженностью $-E_x$. Величина E_x называется *коэрцитивной силой*.

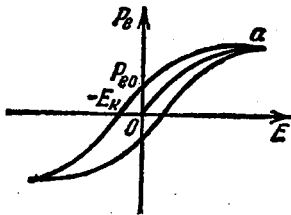


Рис. III.4.7

Периодическое изменение поляризации сегнетоэлектрика связано с затратой энергии, расходуемой на нагревание вещества. Площадь петли гистерезиса пропорциональна электрической энергии, которая преобразуется во внутреннюю энергию в единице объема сегнетоэлектрика за один цикл.

4°. Диэлектрическая восприимчивость ϵ и относительная диэлектрическая проницаемость ϵ сегнетоэлектрика зависят не только от химической природы вещества, но также от температуры, напряженности электрического поля и предельной поляризации (п. 3°). Максимальные значения ϵ очень велики (порядка $10^3 \div 10^6$). У каждого сегнетоэлектрика есть такая температура θ , называемая *точкой Кюри* (*температурой Кюри*), выше которой это вещество теряет свои особые электрические свойства и ведет себя как обычный полярный диэлектрик (III.4.1.4). Сегнетова соль и некоторые другие сегнетоэлектрики имеют две точки Кюри — верхнюю θ_B и нижнюю θ_H — и обладают сегнетоэлектрическими свойствами лишь в интервале температур от θ_H до θ_B . В точке Кюри происходит фазовое превращение вещества. Оно переходит из спонтанно поляризованной фазы (II.5.3.3°) в неполяризованную либо, наоборот, из неполяризованной в спонтанно поляризованную.

Глава III.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

§ III.5.1. Проводники в электростатическом поле

1°. В металлических проводниках имеются носители тока — электроны проводимости (свободные электроны), которые могут под действием электрического поля перемещаться по всему проводнику. Они возникают, когда металл переходит из газообразного состояния в жидкое, а затем в твердое. При конденсации металла происходит обобществление валентных электронов (VI.2.3.9°), которые отделяются от «своих» атомов и образуют так называемый *электронный газ в металле*.

2°. Электрические свойства проводников в условиях электростатики определяются поведением электронов проводимости во внешнем электростатическом поле. В отсутствие внешнего поля электрические поля электронов проводимости и «атомных остатков» — положительных ионов металла (VII.1.1.3°) — взаимно компенсируются. Если металлический проводник внесен во внешнее электростатическое поле, то под действием этого поля электроны проводимости перераспределяются в проводнике таким образом, чтобы в любой точке внутри проводника электрическое поле электронов проводимости и положительных ионов компенсировало внешнее поле.

Перераспределение зарядов в проводнике под влиянием внешнего электростатического поля называется явлением *электростатической индукции*. Возникающие при этом на проводнике заряды, численно равные друг другу, но противоположные по знакам, называются *индуцированными зарядами* (*наведенными зарядами*). Индуцированные заряды исчезают как только проводник удаляется из электрического поля.

3°. Вектор E напряженности поля у поверхности проводника направлен по нормали к поверхности, так как касательная составляющая вектора E вызвала

бы перемещение носителей тока по поверхности проводника, что противоречит условию равновесия зарядов в проводнике.

Итак, для проводников, находящихся в электростатическом поле, выполняются следующие условия:

а) всюду внутри проводника напряженность поля $E=0$, а у его поверхности $E=E_n$ ($E_\tau=0$);

б) весь объем проводника эквипотенциален, так как, согласно III.3.2.5°, в любой точке внутри проводника

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_t = -E \cos(\widehat{E, dl}) = 0;$$

в) поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью (III.3.2.6°), так как для любой линии на поверхности

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_\tau = 0;$$

г) некомпенсированные заряды располагаются в проводнике только на его поверхности, так как, согласно теореме Остроградского — Гаусса (III.4.3.3°), заряд q , охватываемый произвольной замкнутой поверхностью S , проведенной внутри проводника, равен нулю:

$$q = \oint_{(S)} \varepsilon_0 E dS = 0 \quad (\text{в СИ}),$$

так как во всех точках поверхности S , проходящей внутри проводника, $E=0$.

4°. Напряженность E и электрическое смещение D электростатического поля вблизи поверхности проводника связаны с поверхностной плотностью σ (III.2.2.5°) зарядов на проводнике следующими соотношениями, вытекающими из теоремы Остроградского — Гаусса (III.4.3.6°):

$$D_n = \sigma, \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$D_n = 4\pi\sigma, \quad E_n = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь D_n и E_n — проекции векторов D и E на внешнюю нормаль к поверхности проводника, ε — относительная диэлектрическая проницаемость (III.4.3.5°) среды, окружающей проводник, ε_0 — электрическая постоянная (IX).

§ III.5.2. Емкость уединенного проводника

1°. Проводник называется *уединенным проводником*, если он находится столь далеко от других проводников и заряженных тел, что влиянием их электрических полей можно пренебречь. Если уединенный проводник находится в однородном изотропном диэлектрике, заполняющем все поле проводника, то заряд q проводника распределен по его поверхности с поверхностной плотностью σ (III.5.1.4°). Характер распределения зарядов зависит только от формы поверхности проводника, так что каждая новая порция зарядов, сообщаемая проводнику, распределяется по его поверхности подобно предыдущей. Поэтому для произвольной точки поверхности проводника $\sigma = kq$, где $k=f(x, y, z)$ —

функция координат рассматриваемой точки, зависящая от формы и размеров проводника. Значение k больше там, где меньше радиус кривизны поверхности.

2°. Потенциал заряженного уединенного проводника можно найти, пользуясь принципом суперпозиции электростатических полей (III.3.2.3°). Если потенциал бесконечно удаленной точки принять равным нулю, то потенциал φ заряженного проводника, находящегося в безграничном, однородном и изотропном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε , равен (III.4.4.5°)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \oint_{(S_{\text{пров}})} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \oint_{(S_{\text{пров}})} \frac{k dS}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{(S_{\text{пров}})} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{q}{\varepsilon} \oint_{(S_{\text{пров}})} \frac{k dS}{r} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь r — расстояние от заряда σdS малого элемента dS поверхности проводника до какой-либо фиксированной точки на поверхности проводника, в которой определяется потенциал φ (выбор этой точки совершенно произволен, так как поверхность проводника эквипотенциальна), а интегрирование проводится по всей поверхности проводника $S_{\text{пров}}$. Интеграл зависит только от формы и размеров проводника, так что потенциал φ уединенного проводника пропорционален его заряду q , т. е. $\varphi = q/C$.

Величина C , равная отношению заряда q уединенного проводника к его потенциалу φ , называется *электрической емкостью* (*электроемкостью*, *емкостью*) этого проводника *):

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\oint_{(S_{\text{пров}})} \frac{k dS}{r}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{\varepsilon}{\oint_{(S_{\text{пров}})} \frac{k dS}{r}} \quad (\text{в СГС}).$$

3°. Электрическая емкость уединенного проводника численно равна заряду, который нужно сообщить этому проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу. Она зависит от формы и размеров проводника и от диэлектрических свойств окружающей среды. Для геометрически подобных проводников емкости пропорциональны их линейным размерам. Емкость проводника, находящегося в однородной изотропной среде, заполняющей все поле, пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды. Например, *электрическая емкость уединенного проводящего шара* (или сферы) радиуса R равна

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \varepsilon R \quad (\text{в СГС}).$$

*) Предполагается, что потенциал поля проводника принят равным нулю в бесконечно удаленной точке.

§ III.5.3. Взаимная емкость. Конденсаторы

1°. Если вблизи проводника A имеются другие проводники, то его емкость больше, чем у такого же уединенного проводника. Это объясняется тем, что в процессе сообщения проводнику A заряда q на окружающих его проводниках возникают индуцированные заряды (III.5.1.2°), причем ближайшими к проводнику A оказываются заряды противоположного q знака (рис. III.5.1). Индуцированные заряды ослабляют поле заряда q и снижают потенциал проводника A , что и означает увеличение его емкости благодаря влиянию соседних проводников.

2°. В случае двух близко расположенных друг от друга проводников, заряженных равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку зарядами q и $-q$, разность потенциалов этих проводников Φ_1 и Φ_2 пропорциональна q :

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{C} q,$$

где C — взаимная емкость двух проводников: $C = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2}$.

Взаимная емкость двух проводников численно равна заряду, который нужно перенести с одного проводника на другой для изменения разности потенциалов между ними на единицу.

3°. Взаимная емкость C двух проводников зависит от их формы, размеров и взаимного расположения, а также от диэлектрических свойств окружающей среды. Если среда однородна, изотропна и заполняет все поле, то C прямо пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды (III.4.3.5°). При удалении одного из проводников в бесконечность разность потенциалов $\Phi_1 - \Phi_2$ между ними возрастает, а их взаимная емкость уменьшается, стремясь в пределе к емкости оставшегося уединенного проводника (см. п. 5°).

4°. Система из двух проводников, разноименно заряженных равными по абсолютной величине и противоположными по знаку зарядами, называется *конденсатором*, если форма и расположение проводников таковы, что создаваемое ими электростатическое поле локализовано в ограниченной области пространства. Сами проводники называются в этом случае *обкладками конденсатора*. Емкость конденсатора представляет собой взаимную емкость его обкладок.

5°. Емкость *плоского конденсатора*, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга, выражается формулой

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad (\text{в СГС}),$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами. Эти формулы справедливы лишь при малых

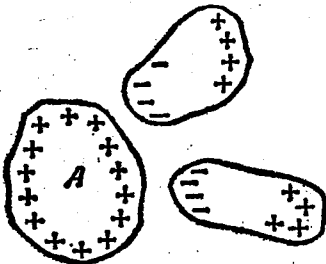


Рис. III.5.1

$d_1 (d_1 < \sqrt{S})$, когда можно пренебречь нарушением однородности электростатического поля у краев обкладок конденсатора.

6°. Сферический конденсатор состоит из двух concentрических металлических обкладок A и B сферической формы, радиусы которых равны r_1 и r_2 (рис. III.5.2). Поле заряженной сферы существует только вне ее (III.3.3.1°). Поэтому

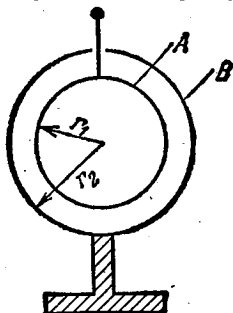


Рис. III.5.2

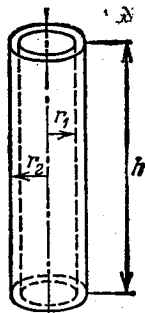


Рис. III.5.3

в области между обкладками электростатическое поле создается только зарядом внутренней обкладки A . За пределами внешней обкладки поля разноименно заряженных обкладок A и B взаимно уничтожаются.

Емкость сферического конденсатора вычисляется по формуле

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{8 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{в СГС}).$$

При $r_2 \rightarrow \infty$ внутренняя обкладка превращается в уединенную сферу, а $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1$ (ср. п. 3°).

При любых конечных значениях r_2 емкость сферического конденсатора больше емкости уединенной внутренней обкладки:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 \frac{r_2}{r_2 - r_1} > 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 \quad (\text{в СИ}).$$

7°. Цилиндрический конденсатор состоит из двух тонкостенных коаксиальных металлических цилиндров высотой h и радиусами r_1 и r_2 (рис. III.5.3), между которыми находится диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Формула емкости цилиндрического конденсатора (а также коаксиального кабеля) имеет вид

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{eh}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{в СГС}).$$

8°. Конденсаторы характеризуются пробивным напряжением (напряжением пробоя) — такой минимальной разностью потенциалов обкладок, при которой

происходит электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе, Величина пробивного напряжения зависит от формы и размеров обкладок и от свойств диэлектрика.

9°. Для получения больших емкостей конденсаторы соединяют параллельно. Общая емкость $C_{\text{пар}}$ батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей всех n конденсаторов, входящих в батарею:

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^n C_i,$$

где C_i — емкость i -го конденсатора.

10°. При последовательном соединении конденсаторов заряды всех конденсаторов одинаковы. Общая емкость батареи последовательно соединенных n конденсаторов равна

$$C_{\text{посл}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}.$$

Емкость батареи $C_{\text{посл}}$ всегда меньше минимальной емкости C_i , входящей в батарею. При последовательном соединении уменьшается возможность пробоя конденсаторов (п. 8°), так как на каждый конденсатор приходится лишь часть разности потенциалов между клеммами всей батареи.

Глава III.6. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ III.6.1. Энергия заряженного проводника и электрического поля *)

1°. Сообщение проводнику электрического заряда связано с совершением работы по преодолению кулоновских сил отталкивания между одноименными зарядами. Эта работа идет на увеличение электрической энергии заряженного проводника, которая аналогична потенциальной энергии в механике (1.3.3.1°). Работа $\delta A'$, совершаемая внешними силами при перенесении заряда dq из бесконечности на уединенный проводник, равна

$$\delta A' = \varphi dq = C\varphi d\varphi,$$

где C и φ — емкость и потенциал проводника.

Работа, совершаемая при увеличении потенциала проводника от 0 до φ , т. е. при сообщении проводнику заряда $q = C\varphi$, равна

$$A' = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

*) В этой главе всюду предполагается, что электрические заряды находятся в несегнетоэлектрической среде (III.4.5.1°), которая, кроме того, электрически изотропна (IV.3.1.6°) и линейна (IV.3.1.7°).

Соответственно энергия заряженного уединенного проводника

$$W_e = \frac{C\Phi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Phi}{2}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W_e = \frac{C(\Delta\Phi)^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Delta\Phi}{2},$$

где C и q — емкость и заряд конденсатора, $\Delta\Phi$ — разность потенциалов обкладок.

2°. Энергию любой системы неподвижных зарядов можно представить в форме

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(S_{\text{заряж}})} \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_{(V_{\text{заряж}})} \varphi \rho dV,$$

где σ и ρ — поверхностная и объемная плотности свободных зарядов (III.4.3.1°), φ — потенциал результирующего поля всех свободных и связанных зарядов в точках малых элементов dS или dV заряженной поверхности или заряженного объема. Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям $S_{\text{заряж}}$ и объемам $V_{\text{заряж}}$. Влияние диэлектрика проявляется в том, что при неизменном распределении свободных зарядов значения φ в разных диэлектриках различны. Так, в однородном изотропном диэлектрике, заполняющем все поле, φ в ϵ раз меньше, чем в вакууме.

3°. Электрическое поле обладает энергией, которая распределена по всему объему пространства, где есть это поле. Соответственно энергия заряженного проводника или конденсатора является энергией их электростатических полей. Например, для однородного поля (III.2.1.2°) плоского конденсатора (III.5.3.5°)

$$W_e = \frac{C(\Delta\Phi)^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} V \quad (\text{в СГС}),$$

где $V = Sd$ — объем поля конденсатора.

Энергия однородного поля распределена равномерно по его объему с *объемной плотностью энергии* w_e , равной

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} \quad (\text{в СГС}),$$

где D — электрическое смещение (III.4.3.5).

4°. *Объемная плотность энергии неоднородного поля*

$$w_e = \frac{dW_e}{dV}.$$

где dW_e — энергия малого элемента dV объема поля, в пределах которого величину w_e можно считать одинаковой. Если среда изотропна и линейна, то для w_e

справедливы соотношения п. 3°. В случае нелинейной изотропной среды

$$w_e = \int E dD \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{1}{4\pi} \int E dD \quad (\text{в СГС}).$$

5°. Энергия dW_e малого объема dV электростатического поля в линейной изотропной среде, в пределах которого w_e одинакова,

$$dW_e = w_e dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV \quad (\text{в СИ}),$$

$$dW_e = w_e dV = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV \quad (\text{в СГС}).$$

Энергия W_e всего электростатического поля равна

$$W_e = \int_{(V_{\text{поля}})} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_e = \int_{(V_{\text{поля}})} \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV \quad (\text{в СГС}),$$

где интегрирование проводится по всему объему поля $V_{\text{поля}}$.

6°. Энергия электростатического поля произвольного заряженного тела равна энергии этого тела (п. 1°):

$$\int_{(V_{\text{поля}})} w_e dV = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Соответственно энергия произвольной системы зарядов (п. 2°) совпадает с энергией электростатического поля этой системы

$$\int_{(V_{\text{поля}})} w_e dV = \frac{1}{2} \int_{(S_{\text{заряж}})} \varphi dS + \frac{1}{2} \int_{(V_{\text{заряж}})} \varphi \rho dV.$$

7°. **Пример.** Энергия электростатического поля равномерно заряженной проводящей сферы радиуса R , окруженной однородным изотропным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε .

Емкость проводящей сферы равна (III.5.2.3°) (в СИ): $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, а энергия сферы, на которой находится заряд q , равна (в СИ)

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Поле локализовано в пространстве вне сферы ($r \geq R$). Напряженность поля и объемная плотность его энергии равны (в СИ)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad w_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon\varepsilon_0 r^4},$$

где r — расстояние от центра сферы. Объемная плотность энергии поля одинакова в пределах тонкого шарового слоя, ограниченного концентрическими сферами с радиусами r и $r+dr$. Объем этого слоя $dV = 4\pi r^2 dr$.

Энергия всего поля заряженной сферы равна (в СИ)

$$\int_{(V_{\text{поля}})} w_e dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

8°. Процесс поляризации диэлектрика, внесенного во внешнее электрическое поле, сопровождается работой по деформации электронных оболочек атомов и молекул, а также по повороту осей полярных молекул в направлении напряженности поля. Поэтому поляризованный диэлектрик обладает запасом энергии, объемная плотность которой равна

$$w_e (\text{диэл}) = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)}{2} E^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e (\text{диэл}) = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 \quad (\text{в СГС}).$$

Объемная плотность энергии поля с такой же напряженностью E в вакууме:

$$w_e (\text{вак}) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e (\text{вак}) = \frac{E^2}{8\pi} \quad (\text{в СГС}).$$

Объемная плотность энергии поля в диэлектрике

$$w_e = w_e (\text{вак}) + w_e (\text{диэл}) = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = w_e (\text{вак}) + w_e (\text{диэл}) = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \quad (\text{в СГС}).$$

9°. Для переменного непотенциального электрического поля понятие потенциала Φ и построенные на его основе выражения для энергии, приведенные в пп. 1° и 2°, лишены смысла. Между тем любое электрическое поле, подобно потенциальному электростатическому полю, обладает энергией

$$W_e = \int_{(V_{\text{поля}})} w_e dV,$$

где

$$w_e = \frac{1}{2} DE \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{1}{8\pi} DE \quad (\text{в СГС}).$$

§ III.6.2. Закон сохранения энергии для электрического поля в несегнетоэлектрической среде

1°. Энергия W_e электрического поля, создаваемого какой-либо системой заряженных тел (проводников и диэлектриков) изменяется, если тела системы перемещаются, а также если изменяются их заряды. При этом совершают работу внешние силы, приложенные к телам системы, и источники электрической энергии.

гии (аккумуляторные батареи, генераторы тока и т. п.), присоединенные к проводникам системы.

Закон сохранения энергии для малого изменения состояния системы при условии постоянства температуры системы и плотности среды *) имеет вид

$$\delta A' + \delta A_{\text{н.э.э}} = dW_e + dW_{\text{к}} + \delta Q_{\text{д.-л.}}$$

Здесь $\delta A'$ — работа внешних сил; $\delta A_{\text{н.э.э}}$ — работа источников электрической энергии; dW_e — изменение энергии электрического поля системы; $dW_{\text{к}}$ — изменение кинетической энергии системы; $\delta Q_{\text{д.-л}}$ — теплота Джоуля — Ленца (III.8.2.6°), обусловленная прохождением электрических токов в системе при изменении или перераспределении зарядов проводников.

2°. Если перемещение тел системы производится квазистатически, т. е. очень медленно, то можно, во-первых, пренебречь изменением кинетической энергии системы ($dW_{\text{к}}=0$) и, во-вторых, считать работу внешних сил $\delta A'$ численно равной и противоположной по знаку работе δA , совершаемой в рассматриваемом процессе силами, которые действуют на тела системы в электрическом поле и называются *пондеромоторными силами*. В таких случаях закон сохранения энергии (п. 1°) можно переписать в форме

$$\delta A_{\text{н.э.э}} = dW_e + \delta A + \delta Q_{\text{д.-л.}}$$

Работа источников электрической энергии за малый промежуток времени dt равна

$$\delta A_{\text{н.э.э}} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i dq_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i I_i dt,$$

где k — общее число источников электрической энергии в рассматриваемой системе; \mathcal{E}_i — э. д. с. i -го источника (III.8.2.2°); dq_i — заряд, проходящий через этот источник за время dt , а $I_i = dq_i/dt$ — сила тока в источнике. Работа $\mathcal{E}_i I_i dt > 0$, если ток I_i идет внутри источника от катода к аноду (III.8.2.4°).

3°. Выражение закона сохранения энергии для квазистатического изменения состояния системы тел (п. 2°), в которой заряд каждого из проводников не изменяется и не перераспределяется, так что $\delta A_{\text{н.э.э}}=0$ и $\delta Q_{\text{д.-л}}=0$, имеет вид

$$dW_e + \delta A = 0.$$

Следовательно, в рассматриваемом процессе работа пондеромоторных сил равна убыли энергии электрического поля системы. Это соотношение можно использовать для отыскания пондеромоторных сил на основе расчета изменения энергии системы. Дело в том, что непосредственное вычисление пондеромоторных сил сопряжено со значительными трудностями, которые обусловлены появлением в электрическом поле поляризационных зарядов (III.4.2.7°), а также механических деформаций тел системы.

4°. Пример. Расчет сил, действующих на пластины заряженного плоского конденсатора (расстояние между пластинами $x < \sqrt{S}$, где S — площадь пластины).

*) При постоянстве температуры и плотности среды, не обладающей сегнетоэлектрическими свойствами (III.4.5.1°), относительная диэлектрическая проницаемость среды не изменяется.

Конденсатор заряжен и отключен от источника напряжения, так что заряд конденсатора $q = \sigma S = \text{const}$, σ — поверхностная плотность заряда. При увеличении расстояния между пластинами на dx пондеромоторная сила F , приложенная к перемещающейся пластине, совершает работу $\delta A = -F dx$. Изменение энергии электростатического поля в конденсаторе $dW = w_e S dx$, где w_e — объемная плотность энергии поля в прилегающем к пластине слое толщиной dx . Таким образом, из закона сохранения энергии (п. 3°) следует, что пондеромоторная сила F равна

$$F = w_e S.$$

Возможны два случая:

- 1) конденсатор с газообразным или жидким диэлектриком между пластинами;
- 2) конденсатор с твердым диэлектриком между пластинами.

В первом случае все пространство между пластинами конденсатора независимо от величин расстояний между ними заполнено одним и тем же диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε . Таким образом,

$$w_e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \varepsilon_0} \quad \text{и} \quad F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{F_{\text{вак}}}{\varepsilon} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad F = \frac{2\pi\sigma^2 S}{\varepsilon} = \frac{F_{\text{вак}}}{\varepsilon} \quad (\text{в СГС}),$$

где $F_{\text{вак}}$ — сила, действующая на пластину того же конденсатора в отсутствие диэлектрика, т. е. в вакууме.

Во втором случае в слое толщиной dx , образовавшемся в результате отодвигания пластины конденсатора, находится воздух, относительная диэлектрическая проницаемость которого равна единице. Поэтому

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 (E_{\text{вак}})^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} = F_{\text{вак}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{(E_{\text{вак}})^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2 \quad \text{и} \quad F = 2\pi\sigma^2 S = F_{\text{вак}} \quad (\text{в СГС}).$$

Г л а в а III.7. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ III.7.1. Понятие об электрическом токе

1°. *Электродинамикой* называется основной раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов или макроскопических заряженных тел. Важнейшим понятием в электродинамике является понятие об электрическом токе.

2°. *Электрическим током* называется всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Электрический ток, возникающий в проводящих средах в результате упорядоченного движения свободных зарядов под действием электрического поля, созданного в этих средах, называется *током проводимости*. Примерами токов проводимости являются ток в металлах и полупроводниках, связанный с упорядоченным движением «свободных» электронов, ток в электролитах, представляющий собой упорядоченное перемещение ионов противоположных знаков.

Конвекционным током называется упорядоченное движение в пространстве заряженных макроскопических тел. Примером такого тока является ток, связанный с движением Земли, которая имеет избыточный отрицательный заряд, по ее орбите.

3°. При упорядоченном движении электрических зарядов в проводнике равновесное распределение зарядов нарушается и поверхность проводника не является эквипотенциальной поверхностью (III.3.2.6°). На поверхности проводника существует тангенциальная составляющая напряженности электрического поля ($E_{\tau} \neq 0$) и внутри проводника должно существовать электрическое поле (ср. III.5.1.3°). Электрический ток продолжается до тех пор, пока все точки проводника не станут эквипотенциальными.

4°. Условия, необходимые для появления и существования электрического тока в проводящей среде:

а) наличие в данной среде свободных *носителей тока* — заряженных частиц, которые могли бы в ней упорядоченно перемещаться. Такими частицами в металлах и полупроводниках являются электроны проводимости и дырки; в жидких проводниках (электролитах) — положительные и отрицательные ионы; в газах — противоположно заряженные ионы и электроны;

б) существование в данной среде внешнего электрического поля, энергия которого должна расходоваться на упорядоченное перемещение электрических зарядов. Для поддержания электрического тока энергия электрического поля должна непрерывно восполняться, т. е. необходим *источник электрической энергии* — устройство, в котором осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

5°. Направлением электрического тока считается направление упорядоченного движения положительных электрических зарядов. Однако, в действительности, в металлических проводниках ток осуществляется упорядоченным движением электронов, которые движутся в направлении, противоположном направлению тока.

§ III.7.2. Сила и плотность тока

1°. *Силой тока* *) называется скалярная физическая величина, равная отношению заряда dq , переносимого сквозь рассматриваемую поверхность **) за малый промежуток времени, к величине dt этого промежутка:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Электрический ток называется *постоянным (постоянный электрический ток)*, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени. Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}.$$

*) Величину I часто называют просто *током*.

**) В случае тока проводимости — через поперечное сечение проводника.

где q — электрический заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за конечный промежуток времени от 0 до t .

2°. Если электрический ток постоянный, то ни в одной части проводника заряды не должны ни накапливаться, ни убывать. Цепь постоянного тока должна быть замкнутой и должно выполняться условие: $Q_{S_1} = Q_{S_2}$, где Q_{S_1} — суммарный электрический заряд, поступающий за единицу времени сквозь поверхность S_1 в объем проводника, заключенный между поперечными сечениями S_1 и S_2 , Q_{S_2} — суммарный электрический заряд, выходящий из этого объема за единицу времени сквозь поверхность S_2 .

3°. Направление электрического тока в различных точках рассматриваемой поверхности и распределение силы тока по этой поверхности определяются плотностью тока. Вектор плотности тока \mathbf{j} направлен противоположно направлению движения электронов — носителей тока в металлах *) и численно равен отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, нормальный к направлению движения заряженных частиц, к величине dS' площади этого элемента:

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS'}$$

Более общая связь между плотностью тока \mathbf{j} и элементом силы тока dI :

$$dI = \mathbf{j} dS,$$

где $dS = \mathbf{n} dS$ — вектор элементарной площадки, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к площадке dS , составляющий с вектором \mathbf{j} угол α .

4°. Сила тока через произвольную поверхность S

$$I = \int_{(S)} \mathbf{j} dS = \int_{(S)} j_n dS,$$

где $j_n = j \cos \alpha$ — проекция вектора \mathbf{j} на направление нормали \mathbf{n} (п. 3°), а интегрирование проводится по всей площади поверхности S . Если для отыскания силы тока проводимости рассматриваются поперечные сечения проводника, для

которых $j_n = j$, то $I = \int_{(S)} j dS$.

5°. Плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению S однородного проводника. Для такого тока

$$I = jS.$$

В цепи постоянного тока плотности тока в двух поперечных сечениях S_1 и S_2 обратно пропорциональны площадям этих сечений:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

*) В других проводящих средах вектор \mathbf{j} совпадает по направлению с движением положительно заряженных носителей тока.

§ III.7.3. Основы классической электронной теории электропроводности металлов

1°. Высокая электропроводность металлов связана с тем, что в металлах имеется громадное количество носителей тока — *электронов проводимости*, образовавшихся из валентных электронов атомов металла (VI.2.3.9°), которые не принадлежат определенному атому, а являются *коллективизированными (обобщественными) электронами*. В классической электронной теории Друде — Лоренца эти электроны рассматриваются как электронный газ (III.5.1.1°), обладающий свойствами одноатомного идеального газа (II.1.4.1°).

Число электронов проводимости в единице объема одновалентного металла:

$$n_0 = \frac{N_A}{A} \rho,$$

где N_A — постоянная Авогадро (IX), A — атомная масса металла, ρ — его плотность. По порядку величины $n_0 \sim (10^{23} \div 10^{26}) \text{ м}^{-3}$.

Электроны проводимости в отсутствии электрического поля внутри металла хаотически движутся и сталкиваются с ионами кристаллической решетки металла (VI.1.1.3°). Считается, что средняя длина свободного пробега электрона (λ) (II.3.5.1°) по порядку величины должна быть равна периоду кристаллической решетки металла, т. е. $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-10} \text{ м}$.

Средняя кинетическая энергия теплового движения электронов (II.3.2.4°)

$$\frac{m v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где m — масса, $v_{\text{кв}}$ — средняя квадратичная скорость электронов (II.3.2.2°). При температуре $T = 273 \text{ К}$ скорость $v_{\text{кв}} \approx 10^5 \text{ м/с}$.

Средняя арифметическая скорость $\langle u \rangle$ теплового движения электронов (II.3.3.6°) имеет такой же порядок величины.

2°. Электрический ток в металле возникает под действием внешнего электрического поля (III.7.1.4°), которое вызывает упорядоченное движение электронов. Плотность тока j равна заряду всех электронов, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проводника,

$$j = -n_0 e \langle v \rangle,$$

где n_0 — число электронов проводимости в единице объема, e — абсолютная величина заряда электрона, $\langle v \rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов под действием внешнего электрического поля. При самых больших плотностях токов $\langle v \rangle$ составляет 10^{-4} м/с и ничтожно мало по сравнению с тепловыми скоростями электронов (II. 1°).

3°. Электрический ток в цепи устанавливается за время $t = \frac{L}{c}$, где L — длина цепи, c — скорость света в вакууме. Время t совпадает с временем установления вдоль цепи стационарного электрического поля и появлением упорядоченного движения электронов сразу во всей цепи. Поэтому электрический ток возникает практически одновременно с замыканием цепи.

4°. Закон Ома для плотности тока (закон Ома в дифференциальной форме): плотность тока проводимости пропорциональна напряженности E электриче-

ского поля в проводнике и совпадает с ней по направлению, т. е.

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Коэффициент пропорциональности γ называется *удельной электрической проводимостью* среды (*удельной электропроводностью*), а величина $\rho = 1/\gamma$ называется *удельным электрическим сопротивлением* среды.

Этот закон выводится в классической электронной теории электропроводности металлов при следующих двух предположениях:

а) концентрация n_0 электронов проводимости не зависит от напряженности E электрического поля в проводнике;

б) средняя скорость упорядоченного движения электронов проводимости, приобретаемая ими на длине свободного пробега под действием электрического поля, во много раз меньше средней арифметической скорости $\langle u \rangle$ их теплового движения (II.3.3.6°), т. е. $eE \langle \lambda \rangle \ll kT$, где e — абсолютная величина заряда электрона, $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега электронов проводимости (II.3.5.1°), k — постоянная Больцмана (IX), T — температура (II.1.3.4°).

В классической электронной теории получается, что

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{2m \langle u \rangle}{n_0 e^2 \langle \lambda \rangle},$$

где m — масса электрона (IX),

5°. На длине свободного пробега электрон приобретает под действием поля скорость упорядоченного движения, равную в конце пробега $v_{\text{макс}}$. При соударении с ионом электрон ее теряет и энергия упорядоченного движения электрона преобразуется во внутреннюю энергию проводника, который нагревается при прохождении по нему электрического тока.

Объемной плотностью тепловой мощности тока ω называется величина энергии, которая выделяется в единице объема проводника за единицу времени. **Закон Джоуля — Ленца** для объемной плотности тепловой мощности тока:

$$\omega = \mathbf{jE} = \gamma E^2 = \frac{1}{\rho} E^2.$$

Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме: объемная плотность тепловой мощности тока равна скалярному произведению векторов плотности тока и напряженности электрического поля.

Объемная плотность тепловой мощности тока не зависит от характера соударения электронов с узлами кристаллической решетки (упругий или неупругий удар (I.3.5.3°)). Из законов сохранения энергии и импульса следует, что энергия ΔW , переданная иону при столкновении электрона с ионом, составляет лишь малую часть энергии $W_{\text{эл}}$ электрона. При неупругом столкновении $\frac{\Delta W}{W_{\text{эл}}} = \frac{m}{m+M}$, при упругом $\frac{\Delta W}{W_{\text{эл}}} = \frac{4mM}{(m+M)^2}$, где m — масса электрона, M — масса иона. В обоих случаях $\frac{\Delta W}{W_{\text{эл}}} \approx \frac{m}{M} \approx 10^{-4}$.

6°. **Закон Видемана — Франца:** для всех металлов отношение коэффициента теплопроводности K (II.3.8.5°) к удельной электрической проводимости γ прямо

пропорционально абсолютной температуре T :

$$\frac{K}{V} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T,$$

где k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), e — заряд электрона.

7°. Недостатки классической электронной теории электропроводности металлов:

а) невозможность объяснить экспериментально наблюдаемую в широком интервале температур линейную зависимость между удельным сопротивлением ρ и абсолютной температурой: $\rho \sim T$;

б) неправильное значение молярной теплоемкости металлов. Она должна быть равна, согласно этой теории, $9 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ и складываться из теплоемкости ионной кристаллической решетки $\left(6 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$ и теплоемкости одноатомного электронного газа $\left(3 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right)$. Однако, из опытного закона Дюлонга и Пти (VII.2.7.2°) известно, что молярная теплоемкость металлов мало отличается от теплоемкости других твердых тел и составляет приблизительно $6 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Отсутствие электронной составляющей теплоемкости металлов объяснить классически невозможно;

в) экспериментальные значения удельного сопротивления ρ и теоретические значения средней арифметической скорости электронов $\langle u \rangle$ приводят по формулам п. 4° к величине средней длины свободного пробега электрона $\langle \lambda \rangle$, на два порядка превышающей период кристаллической решетки металла. Это противоречит предположениям классической электронной теории электропроводности металлов.

Глава III.8. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ III.8.1. Сторонние силы

1°. В металлическом проводнике имеется электростатическое поле, которое создается электронами и положительными ионами кристаллической решетки — поле кулоновских сил (III.1.2.2°). Кулоновское взаимодействие между зарядами в металле приводит к такому равновесному распределению зарядов, при котором электрическое поле внутри проводника равно нулю и весь проводник является эквипотенциальным (III.3.4.3°). Электростатическое кулоновское поле не может быть причиной стационарного процесса упорядоченного движения электронов, т. е. не может создать постоянного электрического тока.

2°. *Сторонними силами* называются неэлектростатические силы, действие которых на носители тока в проводнике вызывает их упорядоченное движение и поддерживает постоянный электрический ток в цепи. Сторонние силы, в отличие от кулоновских сил, не соединяют разноименные заряды, а вызывают их разъединение и поддерживают разность потенциалов на концах проводника.

Стационарное электрическое поле сторонних сил создается *источниками электрической энергии* (гальваническими элементами, электрическими генераторами и т. д.).

За счет энергии, которая затрачивается в источнике, совершается работа, необходимая для упорядоченного движения электрических зарядов. Например, в динамомашине работа сторонних сил (п. 2°) совершается за счет механической энергии, затрачиваемой на вращение ротора генератора.

§ III.8.2. Законы Ома и Джоуля — Ленца

1°. В любой точке внутри участка проводника, содержащего источник электрической энергии, существуют электростатическое поле кулоновских сил с напряженностью $E_{кул}$ и электрическое поле сторонних сил с напряженностью $E_{стор}$.

По принципу суперпозиции полей (III.2.2.2°) напряженность результирующего поля равна

$$E = E_{кул} + E_{стор}$$

Закон Ома для плотности тока (III.7.3.4°)

$$j = \frac{1}{\rho} (E_{кул} + E_{стор})$$

позволяет для участка 1—2 однородного проводника с сечением S получить соотношение

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 E_{кул} dl + \int_1^2 E_{стор} dl,$$

где I — сила тока в проводнике, dl — вектор с модулем dl , равным элементу длины проводника, направленный по касательной к проводнику в сторону вектора плотности тока, S — сечение проводника.

2°. Интеграл $\int_1^2 E_{кул} dl$ численно равен работе, которую совершают кулоновские силы при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2. Согласно (III.3.2.5°)

$$\int_1^2 E_{кул} dl = \Phi_1 - \Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 — потенциалы в точках 1 и 2 проводника.

Электродвижущей силой (э. д. с.) \mathcal{E}_{12} , действующей на участке цепи 1—2, называется линейный интеграл

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_{стор} dl.$$

Электродвижущая сила \mathcal{E}_{12} численно равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении по проводнику единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2. Работа производится за счет энергии, затрачиваемой

в источнике. Поэтому \mathcal{E}_{12} называется электродвижущей силой источника электрической энергии, включенного на участке цепи 1—2.

Напряжением U_{12} на участке цепи 1—2 называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой результирующим полем кулоновских и сторонних сил при перемещении вдоль цепи из точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда:

$$U_{12} = \int_1^2 (E_{кул} + E_{стор}) dl = \int_1^2 E dl,$$

или

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}.$$

Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в том случае, если на участке не приложены э. д. с.

Сопротивлением R_{12} участка цепи между сечениями 1 и 2 называется интеграл

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}.$$

Для однородного линейного проводника $\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$ и

$$R_{12} = \rho \frac{l_{12}}{S},$$

где l_{12} — длина проводника между сечениями 1 и 2.

3°. *Обобщенный закон Ома* для произвольного участка цепи:

$$IR_{12} = U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}.$$

Произведение силы тока на сопротивление участка цепи равно сумме разности потенциалов на этом участке и э. д. с. всех источников электрической энергии, включенных на данном участке цепи. В такой форме закон Ома применим как для *пассивных участков цепи*, не содержащих источников электрической энергии, так и для *активных участков*, содержащих такие источники.

4°. *Правило знаков* для э. д. с. источников электрической энергии, включенных на участке 1—2: если внутри источника ток идет от катода к

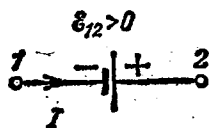


Рис. III.8.1

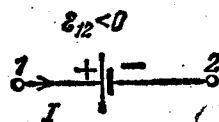


Рис. III.8.2

аноду, т. е. напряженность поля сторонних сил в источнике совпадает по направлению с током на участке цепи, то при подсчете э. д. с. \mathcal{E}_{12} этого источника считается положительной (рис. III.8.1). Если ток внутри источника идет от анода к катоду, то э. д. с. \mathcal{E}_{12} этого источника считается отрицательной (рис. III.8.2).

5°. В неразветвленной замкнутой электрической цепи сила тока во всех сечениях одинакова, и такая цепь является участком с совпадающими концами

(точки 1 и 2 совпадают). В такой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ и $R_{12} = R$ — общее сопротивление всей цепи.

Закон Ома для замкнутой электрической цепи:

$$IR = \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — алгебраическая сумма всех э. д. с., приложенных в цепи.

Если замкнутая цепь состоит из источника электрической энергии с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , а сопротивление внешней части цепи равно R , то закон Ома имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Разность потенциалов на клеммах источника равна напряжению на внешней части цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = RI = \mathcal{E} - Ir.$$

Если цепь разомкнута и тока в ней нет ($I=0$), то разность потенциалов на клеммах источника равна его э. д. с.:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}.$$

Вольтметр, подключенный параллельно участку 1—2 электрической цепи постоянного тока, измеряет разность потенциалов на концах этого участка, а не напряжение

$$R_B I_B = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где R_B и I_B — сопротивление вольтметра и ток в нем (рис. III.8.3). Это следует из обобщенного закона Ома (п. 3°), записанного для участка 1—2 цепи вольтметра, на котором нет э. д. с. (см. также III.8.3.5°).

6°. При прохождении электрического тока по проводникам они нагреваются. Согласно закону Джоуля — Ленца количество теплоты δQ , выделяющейся в проводнике за малое время dt , пропорционально квадрату силы тока I , электрическому сопротивлению R проводника и промежутку времени dt :

$$\delta Q = I^2 R dt = IU dt = \frac{U^2}{R} dt,$$

где $U = IR$ — напряжение на проводнике (п. 2°). Если δQ выражается в калориях, а все остальные величины — в единицах СИ, то $\delta Q = 0,24 I^2 R dt$.

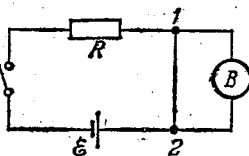


Рис. III.8.3

§ III.8.3. Правила Кирхгофа

1°. Расчет сложных (разветвленных) цепей состоит в отыскании токов в различных участках таких цепей по заданным сопротивлениям участков цепи и приложенным к ним э. д. с.

2°. Узлом называется точка разветвленной цепи, в которой сходится более двух проводников (рис. III.8.4).

Первое правило Кирхгофа (правило узлов): алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i = 0.$$

где n — число проводников, сходящихся в узле, I_i — ток в узле. Положительными считаются токи, втекающие в узел, отрицательными — токи, отходящие от узла.

Второе правило Кирхгофа (правило контуров): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э. д. с. в контуре:

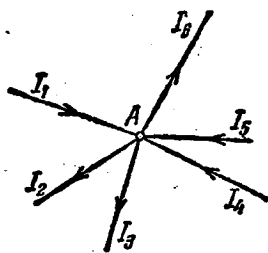


Рис. III.8,4

$$\sum_{i=1}^{i=n_1} I_i R_i = \sum_{i=1}^{i=n_2} \mathcal{E}_i,$$

где n_1 — число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами. Для применения второго правила Кирхгофа выбирается определенное направление обхода контура (по часовой стрелке или против нее). Положительными считаются токи, направления которых совпадают с направлением обхода контура. Э. д. с. источников электрической энергии считаются положительными, если они создают токи, направления которых совпадают с направлением обхода контура.

3°. Порядок расчета разветвленной цепи постоянного тока:

- произвольно выбираются направления токов во всех участках цепи;
- для m узлов в цепи записываются $(m - 1)$ независимых уравнений первого правила Кирхгофа;
- выделяются произвольные замкнутые контуры n , после выбора направлений обходов, записывается система уравнений второго правила Кирхгофа.

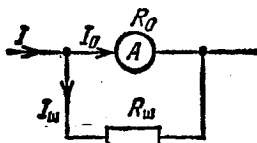


Рис. III.8,5

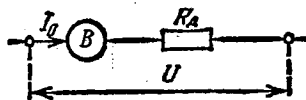


Рис. III.8,6

В разветвленной цепи, состоящей из p участков между соседними узлами (ветвей) и m узлов, имеется $(p - m + 1)$ независимых уравнений второго правила Кирхгофа. При их составлении контуры выбираются таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в уже рассмотренные контуры.

4°. **Шунтирование амперметра** называется параллельное подключение к амперметру дополнительного сопротивления $R_{ш}$, с помощью которого амперметр, имеющий сопротивление R_0 и рассчитанный на максимальный ток I_0 , может измерять токи I , превышающие I_0 (рис. III.8,5). Сопротивление шунта находится по правилам Кирхгофа: $I = I_0 + I_{ш}$, $I_0 R_0 = I_{ш} R_{ш}$, откуда исключается $I_{ш}$:

$$R_{ш} = \frac{I_0 R_0}{I - I_0}.$$

5°. Если разность потенциалов $\Phi_1 - \Phi_2 = U$ на участке цепи, которую необходимо измерить *вольтметром*, рассчитанным на U_0 вольт (III.8.2.5°) при максимальном токе в приборе I_0 ($U_0 = I_0 R_0$), превышает U_0 ($U > U_0$), то последовательно с вольтметром включается *добавочное сопротивление* R_d (рис. III.8.6), определяемое из уравнения $U = (R_0 + R_d)I_0$, откуда

$$R_d = \frac{U}{I_0} - R_0.$$

Г л а в а III.9. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ III.9.1. Законы электролиза Фарадея. Электролитическая диссоциация

1°. Жидкости являются проводниками электрического тока (*электролиты, проводники второго рода*) в том случае, если в них под действием внешнего электрического поля может осуществляться упорядоченное движение ионов.

Упорядоченное движение ионов в проводящих жидкостях происходит в электрическом поле, которое создается *электродами* — проводниками, соединенными с полюсами источника электрической энергии. *Анодом* называется положительный электрод, *катодом* — отрицательный. Положительные ионы — *катионы* — ионы металлов и водородные ионы — движутся к катоду, отрицательные ионы — *анионы* — ионы кислотных остатков и гидроксильной группы — движутся к аноду. Электрический ток в электролитах сопровождается явлением *электролиза* — выделением на электродах составных частей растворенных веществ или других веществ, являющихся результатом вторичных реакций на электродах.

2°. *Первый закон Фарадея (первый закон электролиза)*: масса M вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна электрическому заряду Q , прошедшему через электролит,

$$M = kQ = kIt,$$

если через электролит пропускается в течение времени t постоянный ток с силой тока I .

Коэффициент пропорциональности k называется *электрохимическим эквивалентом* вещества. Он численно равен массе вещества, выделившегося при прохождении через электролит единичного электрического заряда, и зависит от химической природы вещества.

3°. *Второй закон Фарадея (второй закон электролиза)*: электрохимические эквиваленты различных веществ относятся, как их химические эквиваленты k_x , т. е.

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}.$$

Химическим эквивалентом элемента называется безразмерная величина, равная отношению массы атома элемента, выраженной в атомных единицах массы (IX), к его валентности.

4°. Объединенный закон Фарадея (объединенный закон электролиза):

$$M = \frac{1}{F} \frac{A}{z} Q,$$

где M и Q имеют тот же смысл, что в п. 2°, A — атомная масса выделяющегося элемента (в кг/моль), z — его валентность, а F — постоянная Фарадея (IX).

Если $(M/A) = (1/z)$ моль, то $Q = F$. Следовательно, постоянная Фарадея численно равна электрическому заряду, при прохождении которого через электролит на электроде выделяется $(1/z)$ моль z -валентного вещества. Соответственно $F = eN_A$, где e — элементарный заряд (IX) и N_A — постоянная Авогадро (IX).

6°. Расщепление нейтральных молекул на противоположно заряженные ионы в результате взаимодействия растворенного вещества с растворителем называется *электролитической диссоциацией*. Причинами электролитической диссоциации являются тепловое движение полярных молекул (III.4.1.4°) растворенного вещества, состоящих из взаимосвязанных, противоположно заряженных ионов (VI.2.4.3°), и взаимодействие этих молекул с полярными молекулами растворителя. Обе эти причины приводят к ослаблению гетерополярной связи в ионных молекулах (VI.2.4.3°) и к превращению таких молекул в два противоположно заряженных иона.

Коэффициентом диссоциации (степенью диссоциации) α называется отношение числа молекул n' , диссоциировавших на ионы в некотором объеме, к общему числу n_0 молекул растворенного вещества в том же объеме: $\alpha = \frac{n'}{n_0}$.

6°. Процессом, противоположным электролитической диссоциации (п. 5°), является *молизация* — воссоединение ионов противоположных знаков в нейтральные молекулы. Если между процессами диссоциации и молизации существует динамическое, подвижное равновесие, то α находится из уравнения

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \text{const } n_0.$$

При $n_0 \rightarrow 0$ имеем $\alpha \rightarrow 1$, т. е. в слабых растворах почти все молекулы диссоциированы. С ростом концентрации раствора α убывает. В сильно концентрированных растворах

$$\alpha \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{n_0}}.$$

§ III.9.2. Атомность электрических зарядов

1°. Из законов электролиза Фарадея следует, что все электрические заряды состоят из целого числа элементарных, далее не делимых зарядов.

2°. Величина Q заряда любого иона равна

$$Q = \pm \frac{zF}{N_A},$$

где z — валентность иона, F — постоянная Фарадея (III.9.1.4°), N_A — постоянная Авогадро (IX). Заряд одновалентного иона равен заряду e электрона или

протона:

$$Q_1 = e = 1,662 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭэ}.$$

Любой электрический заряд состоит из целого числа элементарных зарядов e (III.1.1.2°).

§ III.9.3. Электролитическая проводимость жидкостей

1°. Плотность тока j (III.7.2.3°) в произвольном сечении SS , перпендикулярном к направлению движения ионов (рис. III.9.1), равна сумме плотностей токов положительных и отрицательных ионов:

$$j = j_+ + j_-,$$

причем $j_+ = q_+ n_0 \langle v_+ \rangle$ и $j_- = q_- n_0 \langle v_- \rangle$, где q_+ и q_- , n_0+ и n_0- , $\langle v_+ \rangle$ и $\langle v_- \rangle$ — заряды, концентрации и средние скорости упорядоченного движения (т. е. дрейфа под действием электрического поля) положительных и отрицательных ионов.

2°. Средние скорости дрейфа ионов пропорциональны напряженности E электрического поля:

$$\langle v_+ \rangle = u_+ E, \quad \langle v_- \rangle = -u_- E,$$

где положительные величины u_+ и u_- называются подвижностями ионов. Подвижность иона равна отношению модулей векторов средней скорости дрейфа и напряженности поля и не зависит от напряженности E электрического поля. Поскольку в электролитах нет объемных зарядов, то $q_+ n_0+ + q_- n_0- = 0$.

Кроме того, $q_+ = ez_+ = \frac{F}{N_A} z_+$ (III.9.2.2°).

3°. Закон Ома для плотности тока в электролитах (ср. III.7.3.4°):

$$j = \frac{F}{N_A} z_+ n_0+ (u_+ + u_-) E.$$

Удельное сопротивление ρ электролита (III.7.3.4°):

$$\rho = \frac{N_A}{F z_+ n_0+ (u_+ + u_-)}.$$

Если при диссоциации молекулы растворенного вещества образуется k_+ положительных и k_- отрицательных ионов, то

$$k_+ z_+ = k_- z_-, \quad n_0+ = k_+ \alpha n_0 \quad \text{и} \quad n_0- = k_- \alpha n_0,$$

где α — степень диссоциации, n_0 — концентрация растворенного вещества (III.9.1.5°) и

$$\rho = \frac{N_A}{F z_+ k_+ \alpha n_0 (u_+ + u_-)}.$$

Отношение N_A/z_+ есть число положительных ионов в одном грамм-эквиваленте ($1/z_+$ моль). Если ввести величину

$$C = \frac{k_+ n_0 z_+}{N_A} = \frac{k_- n_0 z_-}{N_A},$$

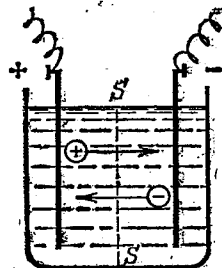


Рис. III.9.1

называемую *эквивалентной концентрацией раствора* и представляющую собой число грамм-эквивалентов ионов одного знака, содержащихся в единице объема электролита (в свободном состоянии и связанных в молекулах), то

$$\rho = \frac{1}{FC\alpha(u_+ + u_-)}$$

§ III.9.4. Электропроводность газов

1°. Газы, состоящие из нейтральных атомов и молекул, являются изоляторами и не проводят электрический ток. Для возникновения электропроводности газов они должны быть ионизованы.

Ионизацией молекулы (атома) называется отщепление одного или нескольких электронов и превращение молекулы (атома) в положительный ион. Если молекула (атом) газа присоединит к себе электроны, возникнут отрицательные ионы.

Обратный ионизации процесс, при котором электроны, присоединяясь к положительному иону, образуют нейтральную молекулу (атом), называется *рекомбинацией*.

2°. Для ионизации молекулы (атома) необходимо совершить *работу ионизации* A_i против сил притяжения между вырываемым электроном и атомным остатком — остальными частицами молекулы (атома). Величина A_i зависит от энергетического состояния вырываемого электрона (VI.2.1.9°) в атоме или молекуле данного газа. Энергия ионизации возрастает с увеличением кратности ионизации, т. е. числа электронов, вырванных из атома.

3°. *Потенциалом ионизации* φ_i называется разность потенциалов в ускоряющем электрическом поле, которую должна пройти заряженная частица, чтобы накопить энергию, равную энергии ионизации: $\varphi_i = A_i/e$, где e — абсолютная величина заряда частицы.

4°. Ионизация газа вызывается внешними воздействиями: достаточным повышением температуры, действием различных излучений, космических лучей, бомбардировкой молекул (атомов) газа быстрыми электронами или ионами. *Интенсивность ионизации* измеряется числом пар частиц противоположного знака, образовавшихся за единицу времени в единице объема газа.

5°. *Ударной ионизацией* называется ионизация газа под действием движущихся электронов или ионов. Наименьшая кинетическая энергия (I.3.2.1°), которую должна иметь ионизирующая частица, оценивается из законов сохранения импульса и энергии и равна:

$$\frac{mv^2}{2} = A_i \left(1 + \frac{m}{M} \right),$$

где A_i — работа ионизации, m — масса электрона, M — масса атома.

Эта энергия тем ближе к A_i , чем меньше отношение $\frac{m}{M}$. Электрон и однозарядный ион, пройдя одинаковую разность потенциалов $\Delta\varphi$, накапливают одинаковую энергию $W = e \cdot \Delta\varphi$.

Из предыдущей формулы следует, что для ударной ионизации электронами и ионами, масса которых в 10^4 раз превышает массу электрона, ионы должны пройти в ускоряющем поле большую разность потенциалов, чем электроны.

§ III.9.5. Понятие о различных типах газового разряда

1°. *Газовым разрядом* называется процесс прохождения электрического тока через газ.

Несамостоятельным газовым разрядом называется газовый разряд, вызванный внешними ионизаторами (III.9.4.4°) и прекращающийся, если эти ионизаторы не действуют. На рис. III.9.2 представлена кривая зависимости силы тока I от напряжения U между электродами при несамостоятельном разряде. В 1-й области кривой, при небольших напряжениях, справедлив закон Ома, подобный закону для электролитов (III.9.3.3°). Если в газе образуются электроны и одновалентные ионы, то

$$j = en_0(u_+ + u_-)E,$$

где n_0 — число пар противоположно заряженных частиц в единице объема, u_+ и u_- — подвижности положительных и отрицательных ионов, e — абсолютное значение заряда электрона. В широком интервале давлений от 10 до 10^2 Па подвижность газовых ионов обратно пропорциональна давлению.

2°. Во 2-й области на кривой рис. III.9.2 линейная зависимость между силой тока I и напряжением U нарушается вследствие того, что концентрация ионов в газе убывает. В этой области с возрастанием U сила тока растет все медленнее.

В третьей области на кривой рис. III.9.2, начиная с некоторого напряжения U_n , сила тока остается постоянной при увеличении напряжения. Это связано с тем, что при неизменной интенсивности ионизации (III.9.4.4°) в сильных электрических полях все ионы, образовавшиеся в единицу времени в газе, достигают электродов. Дальнейшего возрастания силы тока при неизменной интенсивности ионизации не происходит. Насыщение наступает вследствие того, что все образовавшиеся заряженные частицы, двигаясь в сильном электрическом поле, достигают электродов скорее, чем заметная их часть успевает рекомбинировать с частицами противоположного по знаку заряда.

Током насыщения называется максимальная сила тока I_n , возможная при данной интенсивности ионизации:

$$I_n = eN_0,$$

где N_0 — максимальное число пар одновалентных ионов, образующихся в объеме газа за единицу времени при данной интенсивности ионизации. Линейная зависимость между I_n и N_0 подтверждает ионную природу электропроводности газов.

3°. *Самостоятельным газовым разрядом* называется электрический разряд в газе, который продолжается после прекращения действия внешнего ионизатора. Для существования такого разряда необходимо, чтобы в газе происходило

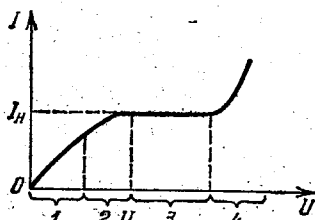


Рис. III.9.2

непрерывное образование новых пар противоположно заряженных частиц. Основным источником таких частиц является ударная ионизация газа (III.9.4.5°). При некотором достаточном напряжении между электродами электроны в объеме газа настолько сильно разгоняются электрическим полем, что их энергия оказывается достаточной для ионизации молекул газа (III.9.4.5°) (*объемная ионизация*). Вторичные электроны, ускоряясь в электрическом поле, также ионизируют молекулы газа. В итоге сильно возрастает число носителей тока в газе и его электропроводность (4-я область на рис. III.9.2). Однако одной ионизации под действием электронов недостаточно для осуществления самостоятельного разряда. Электроны, движущиеся в направлении от катода к аноду, ионизируют молекулы газа, расположенные ближе к аноду по сравнению с местом возникновения электронов. Если энергии положительных ионов недостаточно для ударной ионизации молекул газа или для выбивания электронов из металлического катода (*поверхностная ионизация*), то вблизи катода газоразрядной трубки электроны могут возникать только под действием внешних ионизаторов. Когда действие этих ионизаторов прекращается, область ударной ионизации электронами сокращается, стягиваясь к аноду по мере движения к нему электронов. Прекращение ударной ионизации в этих условиях приводит к прекращению газового разряда.

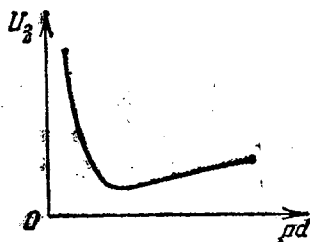


Рис. III.9.3

4°. Поверхностная ионизация (п. 3°), возникающая при большом напряжении U , порождает вторичные электроны и создает двустороннюю лавину электронов и положительных ионов. При этом действие внешнего ионизатора несущественно для дальнейшего протекания газового разряда. С повышением напряжения U между электродами газоразрядной трубки можно осуществить *электрический пробой газа* —

переход несамостоятельного газового разряда в самостоятельный. *Напряжением зажигания (напряжением пробоя)* называется напряжение $U=U_3$, соответствующее электрическому пробую. Напряжение пробоя для газового разряда в трубке с плоскими параллельными друг другу электродами, расположенными на расстоянии d друг от друга, зависит от произведения pd , где p — давление газа (рис. III.9.3). Кроме того, U_3 зависит от химической природы газа и материала катода.

Разновидностями самостоятельных газовых разрядов являются *тлеющий, коронный, искровой и дуговой газовые разряды*, рассмотрение которых опущено в данном справочнике.

§ III.9.6. Некоторые сведения о плазме

1°. *Плазмой* называется особое состояние вещества, важнейшим свойством которого является преимущественная, доходящая до полной, ионизация частиц вещества. *Степенью ионизации α* называется отношение числа ионизированных частиц к их первоначальному количеству. Классификация плазмы по степени ионизации: *слабо ионизованная* (α составляет доли %), *умеренно ионизованная* (α — несколько %), *полностью ионизованная* (α близко к 100%).

Слабо ионизованная плазма существует в *ионосфере* — проводящем слое атмосферы, простирающемся на высотах от 60 км до $2 \cdot 10^4$ км от поверхности Земли.

Полностью ионизованная плазма, образующаяся при сверхвысоких температурах (*высокотемпературная плазма*), существует на Солнце и на горячих звездах.

В лабораторных условиях плазма создается в газовых разрядах (III.9.5.1°), газоразрядных источниках света. Ускоренная плазма используется как рабочее тело (II.4.1.1°) в реактивных двигателях. Плазма может быть также использована для прямого превращения внутренней энергии в электрическую (магнитогидродинамические генераторы, плазменные источники электрической энергии).

Большое число заряженных частиц в плазме обуславливает большую электропроводность плазмы и сближает ее в этом смысле со свойствами проводников электрического тока.

2°. Условием существования плазмы является некоторая минимальная плотность $\rho_{\text{мин}}$ заряженных частиц, начиная с которой можно говорить о плазме, а не о простом скоплении отдельных заряженных частиц. Плотность $\rho_{\text{мин}}$ определяется из неравенства: $L \gg D$, где L — линейный размер системы заряженных частиц, D — характерный «плазменный» параметр — расстояние, называемое *дебавским радиусом экранирования* и равное

$$D = \left(\sum_i \frac{q_i^2 n_i}{\epsilon_0 k T_i} \right)^{-1/2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$D = \left(\sum_i \frac{4\pi q_i^2 n_i}{k T_i} \right)^{-1/2} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь q_i , n_i и T_i — заряд, концентрация и температура i -го сорта частиц плазмы, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), ϵ_0 — электрическая постоянная (III.1.2.2°), а суммирование проводится по всем сортам частиц. D представляет собой то расстояние, на котором происходит экранирование кулоновского поля любого заряда плазмы. Причиной экранирования является то, что любой заряд преимущественно окружен частицами с зарядами противоположного знака.

Более точное определение плазмы: квазинейтральный коллектив большого числа заряженных частиц, занимающий область пространства с линейными размерами $L \gg D$. Нарушения квазинейтральности в плазме устраняются за счет возникающих в ней электрических полей. Общее число N заряженных частиц плазмы, находящихся в сфере радиуса D , называется *дебавским числом*. Если N велико, то плазма называется *газовой плазмой* и термодинамически рассматривается как идеальный газ (II.1.4.1°).

3°. Кулоновское дальнедействующее взаимодействие заряженных частиц в плазме приводит к качественному своеобразию плазмы, позволяющему считать ее особым, четвертым агрегатным состоянием вещества. Важнейшие свойства плазмы:

а) сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями, связанное с ее высокой электропроводностью;

б) специфическое коллективное взаимодействие частиц плазмы, осуществляемое посредством особого поля; природа которого не может быть рассмотрена в рамках данного справочника;

в) благодаря далеким взаимодействиям плазма является своеобразной упругой средой, в которой легко возбуждаются и распространяются различного рода колебания и волны.

4°. Движение плазмы в магнитном поле используется в методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую. Этот метод осуществлен в *магнитогидродинамическом генераторе (МГД-генераторе)*, принципиальная схема которого показана на рис. III.9.4. Сильно нагретый ионизованный газ, образующийся в результате сгорания топлива и обогащения продуктами сгорания парами щелочных металлов, которые способствуют повышению степени ионизации газа, проходит через сопло и расширяется в нем. При этом часть внутренней энергии газа преобразуется в его кинетическую энергию. В поперечном магнитном поле (на рис. III.9.4 вектор \mathbf{B} магнитной индукции поля направлен за плоскость чертежа) положительными ионами отклоняются под действием сил Лоренца (III.10.1.5°) к верхнему электроду A , а свободные электроны — к нижнему электроду K . При замыкании электродов на внешнюю нагрузку в ней идет электрический ток, направленный от анода A МГД-генератора к его катоду K .

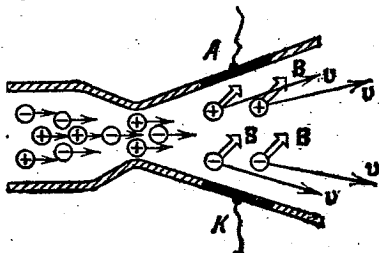


Рис. III.9.4

5°. В плазме возможно состояние термодинамического равновесия при определенной температуре, когда убыль числа заряженных частиц вследствие рекомбинации (III.9.4.1°) восполняется новыми актами ионизации. В такой плазме имеется равенство средних кинетических энергий составляющих плазму различных частиц. Процессы обмена энергией между частицами в такой плазме, а также обмен энергией плазмы с черным излучением (V.5.1.8°) являются равновесными процессами (II.1.3.7°). Плазма с такими свойствами называется *изотермической плазмой*. Она существует в атмосфере звезд, имеющих высокую температуру.

Условием высокой степени ионизации термодинамически равновесной плазмы, состоящей из двух сортов заряженных частиц, имеющих равные по величине и противоположные по знаку заряды, является максимальное уменьшение рекомбинации частиц (III.9.4.1°). Полностью ионизованная плазма может быть получена при $kT \gg e\phi_i$, где ϕ_i — потенциал ионизации атомов газа (III.9.4.3°), kT — средняя энергия теплового движения частиц плазмы. Для водорода и дейтерия этому соответствует $T \approx 160\,000$ К. В этих условиях существенную роль играет излучение плазмы и затруднена изоляция плазмы от стенок сосуда (п. 7°).

6°. В плазме газового разряда (III.9.5.1°) (*газоразрядная плазма*) отсутствует термодинамическое равновесие (п. 5°). Заряженные частицы в такой плазме находятся в ускоряющем электрическом поле.

Средняя кинетическая энергия электронов в газоразрядной плазме характеризуется некоторой *электронной температурой* T_e , соответствующей максвелловскому распределению электронов по энергиям (II.3.3.7°). В связи с отсутст-

нием термодинамического равновесия в такой плазме T_e имеет условный характер. Средняя кинетическая энергия нейтральных частиц значительно меньше, чем средняя кинетическая энергия электронов. Помимо электронной температуры T_e параметрами газоразрядной плазмы являются: концентрация электронов n_e , число ионизаций, приходящихся на один электрон в одну секунду, плотность ионного или электронного тока, продольная напряженность E_z электрического поля, установившегося вдоль оси симметрии плазмы.

7°. Возможность существования термодинамически неравновесной газоразрядной плазмы обеспечивается энергией проходящего через плазму разрядного тока. При отсутствии внешнего электрического поля газоразрядная плазма исчезает.

Деионизацией газа называется исчезновение неподдерживаемой, предоставленной самой себе газоразрядной плазмы.

Кроме процессов ионизации и рекомбинации (III.9.4.1°) в балансе энергии плазмы, существующей в ограниченном объеме, большую роль играет взаимодействие плазмы со стенками, ограничивающими ее объем, излучение плазмы и перенос в ней излучения. Диффузия заряженных частиц на стенки и их рекомбинация на стенках, передача энергии стенкам теплопроводностью в плазме (II.3.8.2°) загрязняют плазму примесями и уменьшают ее энергию. Для предотвращения от этих явлений плазму стремятся удержать от соприкосновения со стенками магнитным полем.

Излучение плазмы в оптическом диапазоне и далеком ультрафиолете состоит из: тормозного излучения электронов, возникающего при торможении электронов на ионах, обычного излучения возбужденными частицами, рекомбинационного излучения, которое происходит в процессе рекомбинации (III.9.4.1°). В магнитном поле плазма имеет еще особое бетатронное (синхротронное) излучение, рассмотрение которого выходит за рамки данного справочника.

Г л а в а III.10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ III.10.1. Магнитная индукция. Сила Лоренца

1°. *Магнитным полем* называется одна из форм проявления электромагнитного поля (III.2.1.1°). Магнитное поле действует только на движущиеся электрически заряженные частицы и тела, на проводники с током и на частицы и тела, обладающие магнитными моментами (III.10.4.3° и III.12.2.4°, III.12.2.5°).

Магнитное поле создается проводниками с током, движущимися электрически заряженными частицами и телами, частицами и телами, обладающими магнитными моментами, а также изменяющимся во времени электрическим полем (III.14.3.1°).

2°. Силовой характеристикой магнитного поля служит *вектор магнитной индукции В* (*вектор индукции магнитного поля*).

Вектор **В** можно ввести одним из трех эквивалентных способов:

а) исходя из силового действия магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу — точечный электрический заряд (п. 3°);

б) основываясь на силовом действии магнитного поля на малый элемент проводника с током (III.10.2.3°);

в) исходя из силового действия магнитного поля на небольшую рамку с током (III.10.5.2°).

3°. На электрически заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле со скоростью v , действует сила Лоренца F_L (см. также п. 5°), которая направлена всегда перпендикулярно к вектору v . Отношение $F_L / (|q|v)$, где q — заряд частицы, не зависит, как показывает опыт, ни от q , ни от v . При изменении направления скорости частицы в рассматриваемой точке поля сила F_L изменяется от 0 до значения $F_{L \text{ макс.}}$, связанного с магнитной индукцией B в этой точке поля соотношением

$$B = \frac{F_{L \text{ макс.}}}{|q|v} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{cF_{L \text{ макс.}}}{|q|v} \quad (\text{в СГС}),$$

где $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с — электродинамическая постоянная (IX).

Итак, магнитная индукция B численно равна в СИ отношению силы, действующей на заряженную частицу со стороны магнитного поля, к произведению абсолютной величины заряда и скорости частицы, если направление скорости частицы таково, что эта сила максимальна. Вектор B направлен перпендикулярно к вектору силы $F_{L \text{ макс.}}$, действующей на положительно заряженную частицу ($q > 0$), и вектору скорости v частицы так, что из конца вектора B вращение по кратчайшему расстоянию от направления силы $F_{L \text{ макс.}}$ к направлению скорости v видно происходящим против часовой стрелки. Иначе говоря, векторы $F_{L \text{ макс.}}$, v и B образуют правую тройку (рис. III.10.1).

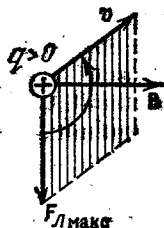


Рис. III.10.1

4°. Для графического изображения стационарного, т. е. не изменяющегося со временем магнитного поля пользуются методом линий магнитной индукции. *Линиями магнитной индукции (силовыми линиями магнитного поля)* называются

линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора B магнитной индукции в этой точке поля. Линии магнитной индукции нигде не обрываются, т. е. не начинаются и не кончаются. Они либо замкнуты, либо идут из бесконечности в бесконечность, либо бесконечно навиваются на некоторую поверхность, всюду плотно заполняя ее, но никогда не возвращаясь вторично в любую точку поверхности. Последний случай осуществляется, например, в магнитном поле, создаваемом системой из кругового тока и бесконечного прямолинейного проводника с током, проходящего через центр кругового витка с током, перпендикулярно к его плоскости.

Магнитное поле называется *однородным*, если во всех его точках вектор магнитной индукции B имеет одно и то же значение. В противном случае магнитное поле называется *неоднородным*.

5°. На частицу с электрическим зарядом q , движущуюся в магнитном поле со скоростью v , направленной произвольным образом по отношению к вектору

магнитной индукции \mathbf{B} , действует сила Лоренца, равная

$$F_L = q [\mathbf{vB}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$F_L = \frac{q}{c} [\mathbf{vB}] \quad (\text{в СГС}).$$

На рис. III.10.2 показаны взаимные расположения векторов \mathbf{v} , \mathbf{B} и \mathbf{F}_L для положительного ($q > 0$) и отрицательного ($q < 0$) зарядов. Модуль силы Лоренца равен

$$F_L = qvB \sin \alpha \quad (\text{в СИ}),$$

$$F_L = \frac{q}{c} vB \sin \alpha \quad (\text{в СГС}),$$

где α — угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{B} .

Сила Лоренца направлена всегда перпендикулярно к скорости заряженной частицы и сообщает ей нормальное ускорение (I.1.4.6°). Не изменяя модуля скорости частицы, а лишь изменяя ее направление, сила Лоренца не совершает работы. Поэтому кинетическая энергия заряженной частицы при движении частицы в магнитном поле не изменяется.

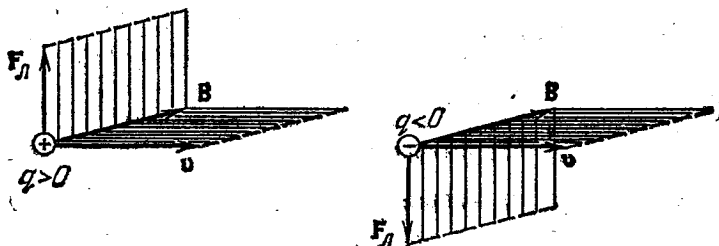


Рис. III.10.2

6°. Если на движущийся электрический заряд (заряженную частицу) действует не только магнитное поле с индукцией \mathbf{B} , но также еще и электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} (III.2.1.2°), то результирующая сила \mathbf{F} равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{vB}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{vB}] \quad (\text{в СГС}),$$

Эту силу \mathbf{F} часто также называют *силой Лоренца* (см. п. 5°), а иногда — *обобщенной силой Лоренца*.

§ III.10.2. Закон Ампера

1°. На проводники с электрическим током, находящиеся в магнитном поле, действуют силы, называемые *силами Ампера*. Сила Ампера $d\mathbf{F}$, приложенная к малому элементу проводника с током силы I , равна геометрической сумме сил Лоренца (III.10.1.5°), которые действуют на движущиеся в проводнике носители тока (III.7.1.4°). Пусть dl — длина элемента проводника, а S — площадь его поперечного сечения, тогда число носителей тока в нем $dn = n_0 S dl$, где n_0 —

концентрация носителей тока. Если v — средняя скорость упорядоченного движения носителей тока, а q — заряд одного носителя, то в СИ *)

$$dF = q [vB] dn = [jB] S dl,$$

где $j = qn_0 v$ — плотность тока. Так как $jS = I$, то, введя вектор $dl = dl \frac{j}{I}$, получим закон Ампера

$$dF = I [dl B] \quad (\text{в СИ}),$$

$$dF = \frac{I}{c} [dl B] \quad (\text{в СГС}),$$

где $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с — электродинамическая постоянная (IX).

Амперова сила dF направлена перпендикулярно к плоскости, образованной векторами dl и B , так, что из конца вектора dF вращение по кратчайшему расстоянию от направления вектора dl к направлению вектора B видно происходящим против часовой стрелки.

2°. Сила Ампера, действующая в магнитном поле на проводник конечной длины с током I , равна

$$F = I \int_{(l)} [dl B] \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{I}{c} \int_{(l)} [dl B] \quad (\text{в СГС}),$$

где интегрирование проводится по всей длине l проводника.

В частности, если поле однородно (III.10.1.4°), а проводник прямолинейный, то

$$F = IB l \sin \alpha \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{I}{c} B l \sin \alpha \quad (\text{в СГС}),$$

где α — угол между направлением тока (вектором плотности тока) в проводнике и вектором B . Направление силы F можно найти по *правилу левой руки*: если расположить ладонь левой руки так, чтобы вектор B входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца совпадали с направлением электрического тока в проводнике, то отставленный большой палец укажет направление амперовой силы F , действующей на проводник в магнитном поле.

3°. Из закона Ампера следует, что сила dF максимальна, если проводник с током расположен перпендикулярно к вектору магнитной индукции B :

$$dF_{\text{макс}} = IB dl, \quad B = \frac{1}{I} \left(\frac{dF}{dl} \right)_{\text{макс}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$dF_{\text{макс}} = \frac{I}{c} B dl, \quad B = \frac{c}{I} \left(\frac{dF}{dl} \right)_{\text{макс}} \quad (\text{в СГС}).$$

*) Ради простоты предполагается, что в проводнике имеются носители тока только одного сорта. Элемент проводника выбирается так, чтобы он был физически малым, т. е. чтобы в его пределах магнитное поле можно было считать однородным. В то же время число носителей тока в нем dn должно быть еще столь велико, чтобы к ним был применим статистический подход. Поэтому при расчете амперовой силы dF можно отвлечься от теплового движения носителей тока, так как из-за полной беспорядочности этого движения его вклад в силу dF равен нулю.

Таким образом, в СИ магнитная индукция \mathbf{B} численно равна отношению силы, действующей со стороны магнитного поля на малый элемент проводника с электрическим током, к произведению силы тока на длину этого элемента, если он так расположен в поле, что указанное отношение имеет наибольшее значение. Направлен вектор \mathbf{B} так, что $d\mathbf{F}_{\text{макс}}$, $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} образуют правую тройку.

§ III.10.3. Закон Био — Савара — Лапласа

1°. Для магнитного поля, так же как для электрического (III.2.2.1°), справедлив принцип суперпозиции: магнитная индукция поля, созданного произвольной системой проводников с токами (или системой отдельных движущихся электрически заряженных частиц), равна геометрической сумме магнитных индукций полей, создаваемых всеми малыми элементами этих проводников с токами (соответственно каждой из движущихся заряженных частиц).

2°. Магнитная индукция $d\mathbf{B}$ поля, создаваемого в вакууме малым элементом проводника длиной $d\mathbf{l}$, по которому идет постоянный электрический ток силой I , удовлетворяет закону Био — Савара — Лапласа:

$$d\mathbf{B} = k \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}].$$

Здесь $d\mathbf{l} = dl \frac{\mathbf{j}}{j}$, \mathbf{j} — вектор плотности тока (III.7.2.3°), \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из элемента проводника в рассматриваемую точку поля M (рис. III.10.3), а k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

В СИ (IX) коэффициент пропорциональности $k = \mu_0/4\pi$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-2}$ Гн/м — магнитная постоянная (IX).

В системе единиц СГСМ (IX) коэффициент пропорциональности k полагается безразмерным и равным 1. В гауссовой системе единиц СГС (IX) $k = 1/c$, где $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с — электродинамическая постоянная (IX).

Соответственно закон Био — Савара — Лапласа записывают в виде

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}] \quad (\text{в СГСМ}),$$

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}] \quad (\text{в СГС}).$$

Направление вектора $d\mathbf{B}$ можно найти по правилу Максвелла (правилу буравчика): если ввинчивать буравчик с правой резьбой по направлению вектора плотности тока в элементе проводника, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление вектора $d\mathbf{B}$ магнитной индукции.

3°. Из закона Био — Савара — Лапласа следует, что

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\varphi}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$|d\mathbf{B}| = \frac{1}{c} \frac{I dl \sin \varphi}{r^2} = \frac{1}{c} \frac{I d\varphi}{r} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь φ — угол между векторами dl и r , а $d\varphi$ — угол, под которым виден из рассматриваемой точки M поля элемент dl проводника с током (рис. III.10.3).

4°. Согласно принципу суперпозиции магнитных полей (п. 1°) магнитная индукция B поля, создаваемого в вакууме проводником с током I , равна

$$B = \int_{(I)} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(I)} \frac{[dl \cdot r]}{r^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{I}{c} \int_{(I)} \frac{[dl \cdot r]}{r^3} \quad (\text{в СГС}),$$

где интегрирование проводится по всей длине l проводника.

С другой стороны, магнитное поле проводника с током является результатом наложения магнитных полей, создаваемых всеми движущимися в проводнике электрически заряженными частицами (п. 5°).

5°. Индукция B_q магнитного поля, возбуждаемого в вакууме заряженной частицей, которая движется с постоянной скоростью v , малой по сравнению со скоростью c света в вакууме ($v \ll c$), равна

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} [v \cdot r], \quad B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\hat{v}, \hat{r})}{r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B_q = \frac{1}{c} \frac{q}{r^2} [v \cdot r], \quad B_q = \frac{1}{c} \frac{qv \sin(\hat{v}, \hat{r})}{r^2} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь q — заряд частицы, а r — радиус-вектор, проведенный из движущейся частицы в рассматриваемую точку A поля (рис. III.10.4).

Вектор B_q направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы v и r . Если $q > 0$, то из конца вектора B_q вращение по кратчайшему расстоянию от направления v к направлению r видно происходящим против часовой стрелки (рис. III.10.4; а). Если $q < 0$, то

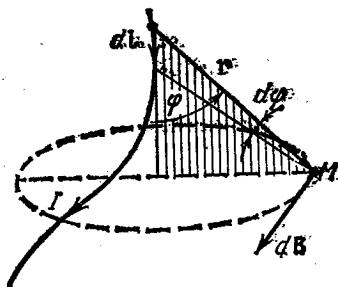


Рис. III.10.3

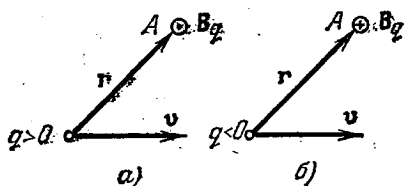


Рис. III.10.4

вектор B_q направлен в противоположную сторону (рис. III.10.4, б). Магнитное поле движущегося заряда переменное, так как даже при $v = \text{const}$ радиус-вектор r изменяется и по модулю и по направлению.

Магнитное поле движущегося заряда, в отличие от электростатического поля неподвижного точечного заряда (III.2.1.4°), не является сферически симметричным. Магнитная индукция B_q этого поля зависит от угла φ между векторами v и r . При одном и том же значении расстояния r величина B_q максимальна в точках плоскости, проведенной через движущуюся заряженную частицу перпендикулярно к ее скорости v ($\varphi = \pi/2$). Во всех точках прямой, вдоль которой

направлен вектор \mathbf{v} ($\varphi=0$), $B_q=0$. Рассматриваемое магнитное поле зеркально симметрично относительно направления \mathbf{v} .

6°. Сила, действующая на движущийся заряд q_2 со стороны магнитного поля другого движущегося заряда q_1 , называется *силой магнитного взаимодействия зарядов* q_1 и q_2 . В частности, если два одноименных заряда q_1 и q_2 движутся в вакууме с одинаковыми скоростями $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{v}$, малыми по сравнению со скоростью c света в вакууме ($v \ll c$) и направленными перпендикулярно к соединяющей заряды прямой, то силы их магнитного взаимодействия являются силами притяжения и численно равны

$$F_m = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^2} v^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$F_m = \frac{1}{c^2} \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2 \quad (\text{в СГС}).$$

Сила кулоновского отталкивания тех же зарядов

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{в СГС}).$$

Так как $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ (IV.4.1.3°), то отношение этих сил равно

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2}.$$

Следовательно, при скоростях зарядов, малых по сравнению со скоростью света в вакууме, магнитное взаимодействие между движущимися зарядами значительно слабее их электростатического взаимодействия. Однако если заряды движутся в проводнике, который в целом электрически нейтрален, электрические силы оказываются скомпенсированными (III.5.1.2°), так что остается только магнитное взаимодействие. Этим объясняется магнитное взаимодействие проводников с токами (III.10.5.1°). Хотя сила магнитного взаимодействия каждой пары электронов в двух параллельных проводниках с токами мала, число этих пар столь велико, что сила магнитного взаимодействия проводников оказывается заметной величиной.

§ III.10.4. Некоторые простейшие примеры магнитных полей в вакууме

1°. Магнитное поле прямолинейного проводника MN с током I (рис. III.10.5). Магнитная индукция \mathbf{B} в произвольной точке A поля направлена перпендикулярно к плоскости чертежа и численно равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь r_0 — расстояние от точки A до проводника, φ_1 и φ_2 — углы между вектором плотности тока в проводнике и радиусами-векторами, проведенными в точку

А из начала и конца проводника (рис. III.10.5), а μ_0 и c — магнитная и электродинамическая постоянные (III.10.3.2°).

Если проводник бесконечно длинный, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ и

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r_0} \quad (\text{в СГС}).$$

2°. Магнитное поле прямоугольного контура с током I представляет собой суперпозицию магнитных полей, создаваемых током в каждой из четырех сторон этого контура. Магнитные индукции этих полей рассчитываются по формуле п. 1°. Во всех точках, лежащих в плоскости контура, вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен перпендикулярно к этой плоскости, причем если точка находится внутри области, ограниченной контуром, то из конца вектора \mathbf{B} ток в контуре виден идущим против часовой стрелки. В точках плоскости, лежащих за пределами вышеуказанной области, вектор \mathbf{B} направлен в противоположную сторону.

Магнитная индукция в центре контура равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8I \sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{8I \sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \quad (\text{в СГС}),$$

где a и b — длины сторон контура.

3°. Магнитным моментом контура с током I называется векторная величина \mathbf{p}_m , равная

$$\mathbf{p}_m = I \int_{(S)} \mathbf{n} dS \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{I}{c} \int_{(S)} \mathbf{n} dS \quad (\text{в СГС}),$$

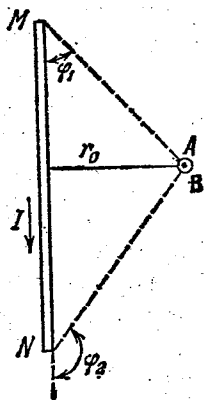


Рис. III.10.5

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к элементу dS поверхности S , натянутой на контур с током (ограниченной этим контуром). Векторы \mathbf{n} и вектор \mathbf{p}_m направлены так, чтобы из их концов ток в контуре был виден идущим против часовой стрелки (рис. III.10.6). В случае плоского контура поверхность S тоже плоская и все нормали имеют одинаковое направление, поэтому

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \quad p_m = IS \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} IS\mathbf{n}, \quad p_m = \frac{1}{c} IS \quad (\text{в СГС}).$$

4°. Индукция магнитного поля кругового витка радиуса R с током I в произвольной точке A на оси витка (рис. III.10.7) равна

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{B} = \frac{2p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь p_m — магнитный момент кругового витка с током (п. 3°), h — расстояние OA от центра витка до рассматриваемой точки поля. Модуль вектора B равен

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \frac{2IS}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (\text{в СГС}),$$

где $S = \pi R^2$ — площадь витка.

Индукция магнитного поля в центре кругового витка с током

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3} \quad \text{и} \quad B = \mu_0 \frac{I}{2R} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{2p_m}{R^3} \quad \text{и} \quad B = \frac{2\pi}{c} \frac{I}{R} \quad (\text{в СГС}).$$

5°. Магнитное поле соленоида. *Соленоидом* называется цилиндрическая катушка с током, состоящая из большого числа витков проволоки, которые образуют винтовую линию. Если витки расположены вплотную или очень близко

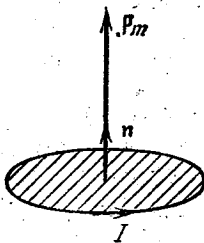


Рис. III.10.6

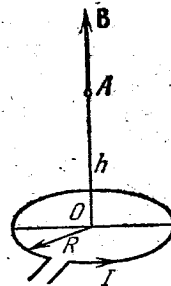


Рис. III.10.7

друг к другу, то соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса с общей осью.

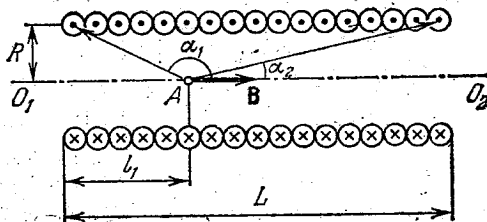


Рис. III.10.8

Вектор магнитной индукции B в произвольной точке A , лежащей на оси соленоида O_1O_2 (рис. III.10.8), направлен вдоль этой оси в ту сторону, куда перемещается буравчик с правой резьбой при вращении его рукоятки в направлении

электрического тока в витках соленоида. Модуль вектора \mathbf{B} в точке A равен

$$B = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь n — число витков соленоида, приходящихся на единицу его длины ($n = N/l$, где N — общее число витков соленоида, а l — его длина), I — сила тока в соленоиде, α_2 и α_1 — углы, под которыми видны из точки A концы соленоида ($\alpha_2 < \alpha_1$). Из рис. III.10.8 видно, что

$$\cos \alpha_1 = -\frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} \quad \text{и} \quad \cos \alpha_2 = \frac{l - l_1}{\sqrt{R^2 + (l - l_1)^2}},$$

где R — радиус витков соленоида.

Магнитный момент соленоида (п. 3°) равен геометрической сумме магнитных моментов всех его витков:

$$p_m = NISn \quad (\text{в СИ}),$$

$$p_m = \frac{1}{c} NISn \quad (\text{в СГС}),$$

где $S = \pi R^2$ — площадь витков, а \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль оси соленоида в ту же сторону, что и вектор \mathbf{B} .

6°. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно (III.10.14°) и полностью локализовано внутри соленоида. Магнитная индукция такого поля

$$B = \mu_0 nI \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} 4\pi nI \quad (\text{в СГС}).$$

Этими формулами можно пользоваться для расчета поля внутри соленоида конечной длины l , если $l \gg R$ и рассматриваемые точки поля лежат вдали от концов соленоида ($l_1 \gg R$) и $(l - l_1) \gg R$).

На концах достаточно длинного соленоида

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 nI \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi nI \quad (\text{в СГС}).$$

§ III.10.5. Магнитное взаимодействие проводников с токами. Контур с током в магнитном поле

1°. Сила Ампера (III.10.2.1°), которая действует на малый участок длиной dl прямолинейного проводника с током I_1 со стороны магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током I_2 , расположенного параллельно

первому на расстоянии a от него; численно равна

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl \quad (\text{в СИ}),$$

$$dF = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{a} dl \quad (\text{в СГС}),$$

где μ_0 и c — магнитная и электродинамическая постоянные (III.10.3.2°).

Эта формула использована в Международной системе единиц (СИ) для установления одной из основных единиц этой системы — единицы силы тока — ампера (IX).

Сила F , действующая на проводник конечной длины $l \gg a$, приближенно равна

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} l \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{a} l \quad (\text{в СГС}).$$

Проводники с одинаково направленными токами I_1 и I_2 взаимно притягиваются, а проводники с противоположно направленными токами отталкиваются друг от друга.

2°. Замкнутый проводящий контур с током произвольной геометрической формы, помещенный в однородное магнитное поле (III.10.1.4°), испытывает действие вращающего момента сил M , равного

$$M = [p_m B],$$

где p_m — вектор магнитного момента контура с током (III.10.4.3°); B — вектор магнитной индукции поля (III.10.1.2°).

Вращающий момент направлен перпендикулярно к плоскости, образованной векторами p_m и B , таким образом, чтобы из конца вектора M вращение от p_m к B по кратчайшему расстоянию было видно происходящим против часовой стрелки. Вращающий момент стремится привести контур в положение устойчивого равновесия, при котором вектор p_m совпадает по направлению с вектором B .

Вращающий момент максимален, если контур так ориентирован в поле, что его магнитный момент p_m перпендикулярен B : $M_{\max} = p_m B$.

Действие магнитного поля на помещенный в него небольшой виток с током (в пределах достаточно малого витка магнитное поле можно считать однородным) часто используют в качестве основы для определения силовой характеристики магнитного поля — вектора магнитной индукции B . Он численно равен отношению вращающего момента, действующего в магнитном поле на небольшую рамку с током, к магнитному моменту рамки при такой ее ориентации в поле, когда это отношение достигает максимального значения; по направлению вектор B совпадает с вектором магнитного момента рамки, находящейся в положении устойчивого равновесия в рассматриваемой точке магнитного поля.

3°. Если небольшой замкнутый контур с током находится в неоднородном магнитном поле, то помимо вращающего момента M (п. 2°) на контур действует результирующая сила

$$F = p_{mx} \frac{\partial B_z}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B_z}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

где p_{mx} , p_{my} и p_{mz} — проекции вектора \mathbf{p}_m магнитного момента контура на оси декартовой системы координат. В частности, если вектор \mathbf{p}_m направлен по оси Ox ($p_{mx} = p_m$, $p_{my} = p_{mz} = 0$), то

$$\mathbf{F} = p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = p_m \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{k} \right).$$

Когда контур находится в области поля, где нет токов, порождающих это поле, то для силы \mathbf{F} справедливо также выражение

$$\mathbf{F} = \text{grad} (\mathbf{p}_m \mathbf{B}).$$

Под действием силы \mathbf{F} незакрепленный контур с током вытягивается в область более сильного магнитного поля, если угол α между векторами \mathbf{p}_m и \mathbf{B} острый ($\alpha < \pi/2$). Если же угол α тупой ($\alpha > \pi/2$), то контур с током выталкивается в область более слабого поля.

§ III.10.6. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме

1°. *Циркуляцией магнитной индукции \mathbf{B} вдоль замкнутого контура \mathcal{L} , проведенного в магнитном поле, называется линейный интеграл*

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_{(\mathcal{L})} B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}),$$

где \mathbf{B} — индукция магнитного поля в точках малого элемента контура длиной dl , а вектор $d\mathbf{l}$ проведен в направлении обхода контура, выбранном при вычислении циркуляции.

2°. *Закон полного тока для магнитного поля в вакууме: циркуляция вектора магнитной индукции поля в вакууме вдоль замкнутого контура \mathcal{L} пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром (т. е. результирующему току через поверхность, натянутую на контур \mathcal{L}):*

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{охв}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{охв}} \quad (\text{в СГС}),$$

где μ_0 и c — магнитная и электродинамическая постоянные, $I_{\text{охв}}$ — алгебраическая сумма токов в проводниках, пронизывающих произвольную поверхность S , натянутую на рассматриваемый контур \mathcal{L} . При подсчете $I_{\text{охв}}$ ток, пересекающий поверхность S , считается положительным, если из конца вектора плотности этого тока (III.7.2.3°) обход контура \mathcal{L} виден происходящим против часовой стрелки. В противном случае ток считается отрицательным. Обобщение закона полного тока на магнитное поле в веществе см. III.12.4.2°.

3°. Ток $I_{\text{охв}}$ (п. 2°) можно представить в виде

$$I_{\text{охв}} = \int_{(S)} \mathbf{j} dS,$$

где j — плотность тока в пределах малого участка площадью dS поверхности S , $dS = dS \mathbf{n}$, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к площадке dS , и з конца которого обход контура \mathcal{L} виден происходящим против часовой стрелки. Поэтому, согласно теореме Стокса (III.14.2.2°), из закона полного тока (п. 2°) следует, что магнитная индукция в какой-либо точке магнитного поля в вакууме связана с плотностью тока в той же точке соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{в СГС}).$$

Таким образом, магнитное поле является *безвихревым* ($\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$) во всех областях пространства, где нет электрических токов, и *вихревым* ($\operatorname{rot} \mathbf{B} \neq 0$) всюду, где эти токи есть. В отличие от магнитного поля постоянных токов электростатическое поле неподвижных электрических зарядов всюду безвихревое (III.3.1.5°).

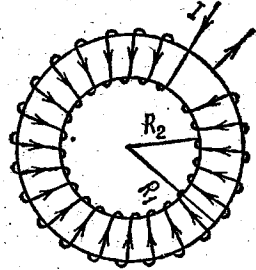


Рис. III.10.9

4°. С помощью закона полного тока можно найти индукцию магнитного поля тороида. *Тороидом* называется кольцевая катушка с током, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. III.10.9). Если витки расположены вплотную или очень близко друг к другу, то тороид можно приближенно рассматривать как систему большого числа последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, центры которых лежат на средней линии тороида, а плоскости ортогональны к ней. Из соображений симметрии следует, что линии магнитной индукции (III.10.1.4°) поля тороида имеют вид концентрических окружностей, центры которых лежат на оси тороида. Во всех точках замкнутого контура \mathcal{L} , совпадающего с какой-либо из линий магнитной индукции поля тороида, модуль вектора \mathbf{B} одинаков, так что

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{B} d\mathbf{l} = 2\pi r B,$$

где r — радиус линии магнитной индукции. Если $r > R_1$ или $r < R_2$, то $I_{\text{охв}} = 0$ и $B = 0$, т. е. магнитное поле локализовано внутри тороида. Для контура \mathcal{L} радиуса $R_2 < r < R_1$ ток $I_{\text{охв}} = NI$, где N — число витков обмотки тороида, а I — ток в ней. Поэтому магнитная индукция поля внутри тороида с немагнитным сердечником, близким по своим магнитным свойствам к вакууму, равна

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{2NI}{r} \quad (\text{в СГС}).$$

§ III.10.7. Магнитный поток. Теорема Остроградского — Гаусса для магнитного поля

1°. *Потоком вектора \mathbf{B} магнитной индукции (магнитным потоком)* сквозь малую поверхность площадью dS называется физическая величина

$$d\Phi_m = \mathbf{B} dS = B_n dS = B dS \cos(\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{n}}),$$

где $dS = n \, dS$, n — единичный вектор нормали к площадке dS , B_n — проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали (рис. III.10.10). Малая площадка dS выбирается так, чтобы ее можно было считать плоской, а значения вектора \mathbf{B} всюду в ее пределах — одинаковыми.

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность S :

$$\Phi_m = \int_{(S)} \mathbf{B} \, dS = \int_{(S)} B_n \, dS.$$

При вычислении этого интеграла векторы n нормалей к площадкам dS нужно направлять в одну и ту же сторону по отношению к поверхности S . Например, если поверхность S замкнутая, то векторы n должны быть либо все внешними нормальными, либо все внутренними нормальными.

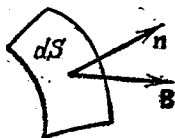


Рис. III.10.10

Если магнитное поле однородно (III.10.1.4°), а поверхность S плоская, то $\Phi_m = B_n S = BS \cos(\mathbf{B}, n)$.

2°. Теорема Остроградского — Гаусса для магнитного поля: магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю, т. е.

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} \, dS = \oint_{(S)} B_n \, dS = 0.$$

Этот результат является математическим выражением того, что в природе нет магнитных зарядов (магнитных масс) — источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались бы линии магнитной индукции (III.10.1.4°).

Согласно теореме Гаусса из векторного анализа (III.14.4.3°) индукция магнитного поля удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Такое поле называется соленоидальным.

3°. Магнитный поток через все витки катушки, рамки и т. п. называется потокоцеплением Ψ . Если магнитные потоки через все N витков одинаковы и равны Φ_m , то $\Psi = N\Phi_m$.

Потокоцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом этом контуре, называется потокоцеплением самоиндукции. Потокоцепление контура, обусловленное магнитным полем тока, идущего в другом контуре, называется потокоцеплением взаимной индукции этих двух контуров.

§ III.10.8. Работа перемещения проводника с током в постоянном магнитном поле

1°. Элементарная работа δA , совершаемая силой Ампера dF (III.10.2.1°) при малом перемещении dr в постоянном магнитном поле малого элемента dl проводника с током I , равна

$$\delta A = dF \, dr = I \, dr [dl \, \mathbf{B}] = I B \, dS = I \, d\Phi_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$\delta A = \frac{1}{c} I B \, dS = \frac{1}{c} I \, d\Phi_m \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь $dS = [dr dl]$ — вектор малой площадки dS , прочерчиваемой элементом проводника dl при его малом перемещении dr , $d\Phi_m$ — магнитный поток сквозь площадку dS , c — электродинамическая постоянная (III.10.2.1°).

2°. При малом перемещении в магнитном поле проводника конечной длины с током I силы Ампера совершают работу, равную

$$\delta A = I d\Phi_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$\delta A = \frac{1}{c} I d\Phi_m \quad (\text{в СГС}),$$

где $d\Phi_m$ — магнитный поток сквозь поверхность, которую прочерчивает весь проводник при его малом перемещении.

Если проводник, ток в котором поддерживается постоянным, совершает конечное перемещение, то работа амперовых сил на этом перемещении равна

$$A = I \Phi_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$A = \frac{1}{c} I \Phi_m \quad (\text{в СГС}),$$

где Φ_m — магнитный поток сквозь поверхность, прочерчиваемую проводником.

3°. Элементарная работа амперовых сил при малом перемещении в магнитном поле замкнутого контура с током I равна

$$\delta A = I d\Psi \quad (\text{в СИ}),$$

$$\delta A = \frac{1}{c} I d\Psi \quad (\text{в СГС}),$$

где $d\Psi$ — изменение потокосцепления контура (III.10.7.3°) при рассматриваемом перемещении.

Если замкнутый контур, ток в котором поддерживается постоянным, совершает конечное перемещение в магнитном поле из положения 1 в положение 2, то работа сил Ампера равна

$$A_{1-2} = I \Delta\Psi \quad (\text{в СИ}),$$

$$A_{1-2} = \frac{1}{c} I \Delta\Psi \quad (\text{в СГС}),$$

где $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ — изменение потокосцепления контура.

Примечание. Направление нормали n (III.10.7.1°) при вычислении потокосцепления контура Ψ следует согласовывать с направлением тока в контуре в соответствии с правилом буравчика: из конца вектора n ток в контуре должен быть виден идущим против часовой стрелки.

Глава III.11. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

§ III.11.1. Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле

1°. На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца (III.10.1.5°), которая направлена перпендикулярно к скорости частицы и сообщает ей нормальное ускорение (I.1.4.6°):

$$\frac{mv^2}{r} = |q| v B \sin \alpha \quad (\text{в СИ}),$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{|q|}{c} v B \sin \alpha \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь m и $|q|$ — масса и абсолютная величина заряда частицы, v — ее скорость, B — магнитная индукция поля, α — угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{B} , r — радиус кривизны траектории частицы, c — электродинамическая постоянная (IX).

2°. В однородном магнитном поле (III.10.1.4°), направленном перпендикулярно к скорости частицы ($\alpha = \pi/2$), частица равномерно движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна вектору \mathbf{B} , а радиус равен

$$r = \frac{mv}{|q| B} \quad (\text{в СИ}),$$

$$r = \frac{cmv}{|q| B} \quad (\text{в СГС}).$$

Если вектор \mathbf{B} направлен перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. III.11.1), а частица движется в плоскости чертежа слева направо, то направление отклонения частицы (вверх или вниз) зависит от знака ее заряда. На этом основано определение знака заряда частиц, движущихся в магнитном поле.

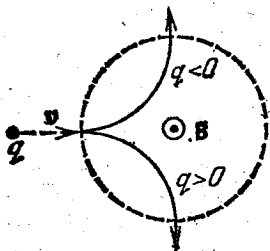


Рис. III.11.1

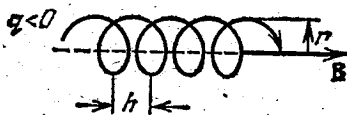


Рис. III.11.2

Период обращения T заряженной частицы в однородном магнитном поле ($\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$) не зависит от ее скорости (при $v \ll c$):

$$T = \frac{2\pi m}{B |q|} \quad (\text{в СИ}),$$

$$T = \frac{2\pi mc}{B |q|} \quad (\text{в СГС}).$$

3°. Если вектор скорости \mathbf{v} заряженной частицы составляет угол α с направлением вектора \mathbf{B} однородного магнитного поля, то частица движется по винтовой линии (рис. III.11.2), навивающейся на линию магнитной индукции поля.

Радиус r и шаг h винтовой линии равны

$$r = \frac{m v \sin \alpha}{|q| B}, \quad h = \frac{2\pi m}{B |q|} v \cos \alpha \quad (\text{в СИ}),$$

$$r = \frac{mc v \sin \alpha}{|q| B}, \quad h = \frac{2\pi mc}{B |q|} v \cos \alpha \quad (\text{в СГС}).$$

4°. Если заряженная частица движется в неоднородном магнитном поле, магнитная индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то по мере перемещения частицы значения r и h (п. 3°) уменьшаются. Следовательно, частица движется по скручивающейся спирали, которая навивается на линию магнитной индукции поля. На этом принципе основана магнитная фокусировка пучков заряженных частиц (например, в электронной оптике).

§ III.11.2. Явление Холла

1°. Явлением Холла (эффектом Холла) называется возникновение поперечного электрического поля в проводнике или полупроводнике с током при помещении его в магнитное поле. Это явление обусловлено влиянием силы Лоренца (III.10.1.5°) на движение носителей тока. На рис. III.11.3, а показано направ-

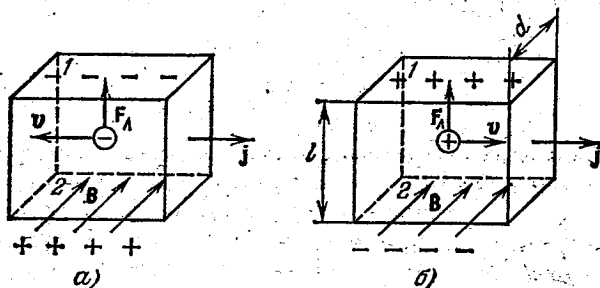


Рис. III.11.3

ление силы Лоренца, действующей на электроны проводимости в металле или в электронном полупроводнике (VII.2.10.2°), когда ток идет слева направо, а вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен за плоскость чертежа. В этом случае электроны отклоняются вверх, так что на верхней грани призматического проводника (полупроводника) возникает избыток электронов, а на нижней — их недостаток. В дырочном полупроводнике носители тока (дырки) имеют положительный заряд. Поэтому наблюдается обратная картина, показанная на рис. III.11.3, б. Отклонение носителей тока в поперечном направлении происходит до тех пор, пока действие поперечного электрического поля не уравновесит силу Лоренца.

2°. Напряженность E_x установившегося поперечного электрического поля равна

$$E_x = R [Bj],$$

где \mathbf{B} — магнитная индукция поля, \mathbf{j} — вектор плотности тока (III.7.2.3°), R — постоянная Холла.

Если векторы \mathbf{B} и \mathbf{j} взаимно перпендикулярны, как показано на рис. III.11.3, то разность потенциалов в точках 1 и 2, принадлежащих одному и тому же поперечному сечению призматического проводника (полупроводника), но лежащих соответственно на его верхней и нижней гранях, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = R \frac{IB}{d},$$

где I — сила тока, d — линейный размер проводника (полупроводника) в направлении вектора \mathbf{B} .

3°. В случае металлов и примесных полупроводников (VII.2.10.5°) с одним типом проводимости постоянная Холла равна

$$R = \frac{A}{n_0 q} \quad (\text{в СИ}),$$

$$R = \frac{A}{cn_0 q} \quad (\text{в [СГС]}),$$

где c — электродинамическая постоянная (III.10.1.3°), q и n_0 — заряд и концентрация носителей тока, A — безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от характера статистического распределения носителей тока по скоростям. Знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда q носителей тока. Измерение постоянной Холла для полупроводника позволяет судить о типе его проводимости: в случае электронной проводимости (n -типа) (VII.2.10.2°) $q = -e$ и $R < 0$, а в случае дырочной проводимости (p -типа) (VII.2.10.3°) $q = e$ и $R > 0$.

Если в полупроводнике наблюдаются оба типа проводимости, то по знаку постоянной Холла можно определить, какой тип проводимости преобладает. В этом случае приведенное выше выражение для R непригодно и надо пользоваться более сложной формулой.

4°. На основе измерения постоянной Холла для проводника (или полупроводника с известным типом проводимости) можно определить концентрацию n_0 носителей тока. Например, концентрация электронов проводимости в одновалентных металлах равна концентрации атомов. В свою очередь, зная концентрацию электронов проводимости в металле, можно оценить величину средней длины свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ этих электронов. Из формулы (III.7.3.4°)

$$\langle \lambda \rangle = \frac{2m\gamma \langle u \rangle}{n_0 e^2}$$

получается, что $\langle \lambda \rangle \sim 10^{-8}$ м, т. е. на два порядка превышает междоузельные расстояния в металле.

§ III.11.3. Удельный заряд частиц. Масс-спектрометрия

1°. Одной из характеристик заряженных частиц является *удельный заряд* — отношение q/m заряда частицы к ее массе. Экспериментальное определение удельного заряда частиц основано на изучении отклонения частиц в совместно действующих на них электрическом и магнитном полях. Измерив удельный заряд частицы и зная ее заряд, можно определить массу частицы.

2°. *Спектр масс (массовым спектром)* частиц называется совокупность значений их масс. В *масс-спектрометрии* с помощью специальных приборов —

масс-спектрографов и масс-спектрометров — весьма точно измеряют массы и относительные концентрации различных изотопов химических элементов (VIII.1.1.3°).

3°. Принцип действия простейшего масс-спектрографа — *масс-спектрографа Астона* показан на рис. III.11.4. Пучок положительно заряженных частиц — ионов различных изотопов исследуемого химического элемента — отклоняется, проходя последовательно через однородное электрическое поле конденсатора C и перпендикулярное к нему однородное магнитное поле катушки M . В электрическом поле ионы отклоняются к отрицательно заряженной обкладке конденсатора тем сильнее, чем меньше их скорость и чем больше удельный заряд. В однородном магнитном поле с индукцией B , направленной за плоскость чертежа, ионы движутся по дугам окружностей (III.11.1.2°) тем большего радиуса, чем больше скорость частиц и чем меньше их удельный заряд. В магнитном поле пучок ионов расщепляется на несколько пучков, каждому из которых соответствует определенное значение удельного заряда. Магнитное поле фокусирует частицы, обладающие разными скоростями, но одинаковыми удельными зарядами. Значение магнитной индукции B подбирается так, чтобы ионы фокусировались на фотоэластинке AD , расположенной перпендикулярно к плоскости чертежа. Ряд узких параллельных линий; получающихся на фотоэластинке, соответствует разным значениям удельных зарядов ионов, т. е. разным изотопам исследуемого химического элемента. На рис. III.11.4 линия \mathcal{E}_1 соответствует ионам с большим; а линия \mathcal{E}_2 — с меньшим удельными зарядами. Зная удельный заряд частиц на линии \mathcal{E}_1 , расстояние между линиями \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и параметры установки, можно определить удельный заряд частиц, соответствующих линии \mathcal{E}_2 .

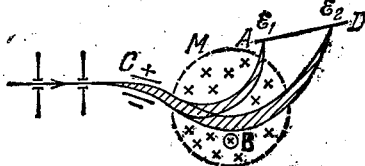


Рис. III.11.4

4°. Для определения относительной концентрации изотопов химических элементов в их естественных смесях применяются *масс-спектрометры* — приборы с электрической регистрацией ионных токов. В масс-спектрометрах используются пучки ионов с близкими по величине кинетическими энергиями — моноэнергетические пучки, создаваемые с помощью ионных источников специальной конструкции. Такие пучки, даже если они сильно расходящиеся на входе в масс-спектрометр, хорошо фокусируются в поперечном магнитном поле. Поэтому в масс-спектрометрах можно пользоваться пучками, содержащими большое число ионов, что значительно повышает точность измерения концентраций различных изотопов.

§ III.11.4. Ускорители заряженных частиц

1°. *Ускорителями заряженных частиц* называются устройства для получения заряженных частиц (электронов, протонов, атомных ядер, ионов), обладающих очень большой кинетической энергией. Увеличение энергии ускоряемых частиц происходит под действием электрического поля ускорителя. В зависимости от типа ускорителя это поле может быть электростатическим, индуцированным (III.14.2.1°) или переменным высокочастотным. Соответственно ускорит-

тели делятся на *электростатические*, или *высоковольтные*, *индукционные* (см. III.14.2.3°) и *резонансные*. По форме траектории ускоряемых частиц различают *линейные* и *циклические ускорители*. В первых траектории частиц близки к прямым линиям, а во вторых имеют вид окружностей или раскручивающихся спиралей.

2°. В *линейном электростатическом ускорителе* заряженная частица однократно проходит в ускоряющем электростатическом поле разность потенциалов ($\Phi_1 - \Phi_2$). Если q — заряд частицы, то энергия, приобретаемая частицей в ускорителе, равна (III.3.2.4°)

$$W = q(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Электрическое поле в таком ускорителе создается, например, *электростатическим генератором Ван де Граафа*, в котором осуществляется многократная передача зарядов полюму проводнику. При этом потенциал проводника возрастает до величин порядка 10^8 В, ограничиваемых стеканием зарядов с проводника.

3°. В *линейных резонансных ускорителях* увеличение энергии заряженных частиц происходит под действием переменного высокочастотного электрического поля, в котором частица движется синхронно (в резонанс) с изменением поля. С помощью ускорителей такого типа удается сообщить электронам на пути в несколько километров энергию порядка десятков ГэВ (IX).

4°. Для ускорения протонов, дейтронов и других более тяжелых частиц применяются *резонансные циклические ускорители*, в которых частица многократно проходит через переменное электрическое поле синхронно с его изменением, каждый раз увеличивая свою энергию.

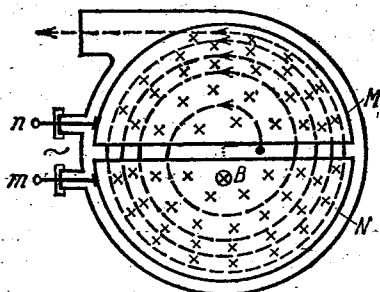


Рис. III.11.5

Управление движением ускоряемых частиц и периодическое их возвращение в пространство, где действует электрическое поле, осуществляется с помощью сильного поперечного магнитного поля. Частицы проходят через электрическое поле каждый раз приблизительно при одном и том же значении фазы поля (IV.1.1.3°), т. е. в «резонансе» с ним.

5°. На рис. III.11.5 показана схема простейшего резонансного циклического ускорителя — *циклотрона*. Ускоряющее переменное электрическое поле создается в зазоре между двумя половинками металлической цилиндрической коробки MN, называемыми *дуантами*. Дуанты помещены в вакуированную плоскую камеру, находящуюся между полюсами сильного электромагнита, магнитная индукция поля которого направлена перпендикулярно к плоскости чертежа. Переменное электрическое поле между дуантами создается электрическим генератором, полюсы которого присоединяются к электродам t и n .

6°. Ускорение частицы происходит в зазоре между дуантами M и N циклотрона всякий раз, когда частица, описывая под действием магнитного поля за одно и то же время (III.11.1.2°) полуокружности все большего радиуса, вновь

попадает в зазор. Для того чтобы частица непрерывно ускорялась в циклотроне, необходимо выполнение условия синхронизма $T = T_0$, где T — период обращения частицы в магнитном поле, а T_0 — период колебаний электрического поля (IV.1.1.2°). Это условие нарушается, когда скорость v частицы становится соизмеримой со скоростью c света в вакууме, так как при таких скоростях масса m частицы возрастает с увеличением скорости (I.5.6.1°) и соответственно возрастает период T (III.11.1.2°).

7°. Возможность ускорения заряженных частиц, движущихся в циклических ускорителях с релятивистскими скоростями ($v \sim c$), вытекает из принципа автофазировки: всякое отклонение периода T обращения релятивистской частицы в магнитном поле от резонансного значения T_0 (п. 6°) приводит к такому изменению энергии W частицы, что T колеблется около T_0 , оставаясь в среднем равным T_0 :

$$\langle T \rangle = \frac{2\pi \langle m \rangle}{B |q|} = \frac{2\pi \langle W \rangle}{B |q| c^2} = T_0 \quad (\text{в СИ}),$$

где $W = mc^2$ (I.5.7.2°), $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (I.5.6.1°), m_0 — масса покоя частицы (I.5.6.1°), c — скорость света в вакууме, q — заряд частицы, B — магнитная индукция поля.

Например, если в результате возрастания массы m и периода T частица окажется в зазоре между дуантами под действием не ускоряющего ее, а замедляющего электрического поля, то будет происходить торможение частицы и уменьшение периода T ее обращения.

8°. Из принципа автофазировки (п. 7°) следует, что при достаточно медленном увеличении периода T_0 изменения электрического поля должен соответственно возрастать и период T обращения релятивистской частицы в магнитном поле циклического ускорителя. При этом будет возрастать также среднее значение $\langle W \rangle$ энергии частицы, так как при $B = \text{const}$ возрастание T возможно лишь за счет увеличения энергии частицы.

Этот принцип реализован в ускорителе, называемом фазотроном. В фазотроне магнитное поле постоянно, а частота $\nu_0 = 1/T_0$ (IV.1.1.2°) переменного электрического поля медленно изменяется с периодом $\tau \gg T_0$. В фазотроне по мере увеличения скорости частиц возрастает радиус их орбит (III.11.1.2°). Поэтому чем больше расчетная энергия ускоряемых частиц, тем больше габариты фазотрона и его электромагнита. Например, действующий в СССР фазотрон, сообщаящий протонам энергию в 680 МэВ, имеет электромагнит, диаметр полюсов которого равен 6 м, а масса 7000 тонн.

9°. В циклическом резонансном ускорителе электронов синхротроне частота ускоряющего электрического поля постоянна, а индукция B магнитного поля медленно изменяется во времени. Период обращения электрона в магнитном поле синхротрона (III.11.1.2°) равен

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{W}{ec^2} \quad (\text{в СИ}),$$

где e — абсолютная величина заряда электрона, $W = mc^2$ — его энергия. Условие синхронизма (п. 6°) выполняется в синхротроне, если индукция магнитного

поля возрастает пропорционально энергии W электрона:

$$B = \frac{2\pi W}{ec^2 T_0} \quad (\text{в СИ}),$$

где $T_0 = \text{const}$ — период высокочастотного ускоряющего электрического поля. В синхротроне выполняется условие

$$\frac{m}{B} = \frac{eT_0}{2\pi} = \text{const} \quad (\text{в СИ}).$$

Так как скорость электронов в синхротроне близка к c и практически не изменяется в процессе их ускорения, то, согласно (III.11.1.2°), электроны движутся в синхротроне по орбитам, близким к круговым. Поэтому в синхротроне используются кольцевые электромагниты, которые создают магнитное поле в сравнительно узкой области вблизи круговой орбиты.

10°. В наиболее мощном циклическом резонансном ускорителе протонов — синхрофазотроне комбинируются принципы, используемые в фазотроне (п. 8°) и синхротроне (п. 9°). В нем одновременно и согласованно уменьшается частота ν_0 ускоряющего электрического поля и увеличивается индукция B магнитного поля. Ускоряемые протоны движутся при этом по круговой орбите, так что магнитное поле создается, как и в синхротроне, кольцевым электромагнитом.

11°. Для одновременного осуществления вертикальной (аксиальной) и радиальной устойчивости движения ускоряемой заряженной частицы по расчетной круговой орбите в синхротроне и синхрофазотроне необходимо, чтобы вблизи этой орбиты магнитная индукция B изменялась по закону

$$B = \frac{\text{const}}{r^n}.$$

Здесь r — расстояние от центра орбиты, а показатель степени n лежит в пределах $0 < n < 1$.

Циклические ускорители, удовлетворяющие указанным условиям, называются *ускорителями с мягкой фокусировкой*. Масса электромагнита такого ускорителя растет приблизительно пропорционально кубу наибольшей энергии $W_{\text{макс}}$ приобретаемой частицами в этом ускорителе.

12°. Для получения частиц с очень большой энергией $W_{\text{макс}}$ синхротроны и синхрофазотроны с мягкой фокусировкой экономически невыгодны. В этих случаях применяются *ускорители с жесткой фокусировкой*. В этих ускорителях вдоль почти круговой орбиты ускоряемой частицы располагаются попеременно магнитные секции двух типов. В одном типе секций магнитное поле изменяется по вакуу п. 11°, где n намного меньше 0 (например, $n = -100$), в другом типе секций $n \gg 1$. Секции первого типа обеспечивают радиальную фокусировку пучка ускоряемых частиц, секции второго типа — вертикальную фокусировку пучка. Жесткая фокусировка позволяет существенно уменьшить поперечное сечение вакуумной камеры ускорителя, массу электромагнита и стоимость всей установки.

13°. Частицы высокой энергии широко применяются в ядерной физике и физике элементарных частиц для осуществления различных ядерных реакций (VIII.1.9.1°). Из законов сохранения энергии (I.3.4.3°) и импульса (I.2.7.1°) следует, что при бомбардировке неподвижной мишени доля кинетической энергии W_k налетающей частицы, используемая в ядерной реакции, убывает по мере

увеличения $W_{\text{н}}$. Поэтому несравненно энергетически выгоднее *метод встречных пучков*, в котором мишень движется с большой скоростью навстречу бомбардирующим частицам. В методе встречных пучков уменьшается суммарный импульс сталкивающихся частиц («снаряда» и «мишени») и возрастает доля полезно используемой энергии частиц. Например, в ускорителе со встречными протон-протонными пучками, в каждом из которых энергия протона равна 26 ГэВ ($W_{\text{н}} \approx 25$ ГэВ), суммарный импульс двух сталкивающихся протонов равен нулю. Следовательно энергия столкновения таких протонов равна примерно 50 ГэВ. Такую же энергию столкновения можно получить при бомбардировке неподвижной водородной мишени пучком протонов с энергией порядка 1400 ГэВ.

Глава III.12. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ III.12.1. Магнитные моменты электронов и атомов

1°. Различные среды при рассмотрении их магнитных свойств называются *магнетиками*. Все тела при внесении их во внешнее магнитное поле намагничиваются в той или иной степени, т. е. создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее поле. Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов *). По своим магнитным свойствам магнетики подразделяются на три основные группы: диамагнетики (III.12.3.1°), парамагнетики (III.12.4.1°) и ферромагнетики (III.12.6.1°).

2°. Электрон, движущийся по орбите в атоме (VI.2.1.9°), эквивалентен замкнутому контуру с *орбитальным током* $I = ev$, где e — абсолютная величина заряда электрона, v — частота его обращения по орбите. Согласно (III.10.4.3°) орбитальному току соответствует *орбитальный магнитный момент* электрона

$$p_m = ISn \quad (\text{в СИ}),$$

$$p_m = \frac{1}{c} ISn \quad (\text{в СГС}),$$

где S — площадь орбиты, n — единичный вектор нормали к плоскости орбиты, c — электродинамическая постоянная (IX).

Электрон, движущийся по орбите, имеет *орбитальный момент импульса* L_e (I.4.1.4°), который противоположен по направлению вектору p_m орбитального магнитного момента электрона (рис. III.12.1) и связан с ним соотношением

$$p_m = gL_e.$$

Коэффициент пропорциональности g называется *гиромантным отношением орбитальных моментов* и равен

$$g = -\frac{e}{2m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$g = -\frac{e}{2m_0} \quad (\text{в СГС}),$$

где m — масса электрона.

*) О магнитных свойствах атомных ядер см. (VIII.1.1.6°).

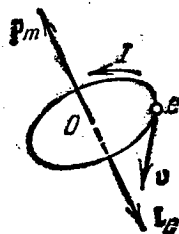


Рис. III.12.1

3°. Электрон обладает *собственным моментом импульса* L_{es} , который называется *спином электрона*. Модуль спина электрона равен

$$L_{es} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar,$$

где h — постоянная Планка (IX), $\hbar = h/2\pi$.

Проекция спина электрона на направление вектора B индукции магнитного поля, в котором находится электрон, может принимать только одно из следующих двух значений:

$$L_{esB} = \pm \frac{\hbar}{2}.$$

Примечание. При этом несущественно, является ли это магнитное поле внешним, например созданным проводниками с током, или внутренним магнитным полем самого вещества (III.12.4.1°).

4°. Спи́ну электрона L_{es} соответствует *спиновый магнитный момент электрона* P_{ms} , пропорциональный спину и направленный в противоположную сторону:

$$P_{ms} = -g_s L_{es}.$$

Величина g_s называется *гиромагнитным отношением спиновых моментов* и равна

$$g_s = -\frac{e}{m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$g_s = -\frac{e}{mc} \quad (\text{в СГС}).$$

Проекция спинового магнитного момента электрона на направление вектора B индукции магнитного поля может принимать только одно из следующих двух значений:

$$P_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B \quad (\text{в СИ}),$$

$$P_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2mc} = \pm \mu_B \quad (\text{в СГС}),$$

где μ_B — *магнетон Бора* (IX).

5°. *Орбитальным магнитным моментом* P_m атома называется геометрическая сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома:

$$P_m = \sum_{i=1}^Z P_{mi},$$

где P_{mi} — магнитный момент i -го электрона, а Z — число всех электронов в атоме, равное порядковому номеру элемента в периодической системе Менделеева (VI.2.3.5°).

Орбитальным моментом импульса L атома называется геометрическая сумма моментов импульса всех электронов атома:

$$L = \sum_{i=1}^Z L_{ei}.$$

Атомные моменты P_m и L связаны соотношением

$$P_m = gL,$$

где g — гиромагнитное отношение орбитальных моментов (п. 2°).

§ III.12.2. Атом в магнитном поле

1°. При внесении атома в магнитное поле на электрон, движущийся в атоме, действует момент сил

$$M = [p_m B],$$

где p_m — орбитальный магнитный момент электрона (III.12.1.2°), B — магнитная индукция поля. Соответственно орбитальный момент импульса электрона (III.12.1.2°) изменяется по закону (I.4.3.1°)

$$\frac{dL_e}{dt} = [p_m B] = [-gBL_e],$$

где g — гиромагнитное отношение орбитальных моментов (III.12.1.2°). Аналогично изменяется и вектор орбитального магнитного момента электрона:

$$\frac{dp_m}{dt} = [-gBp_m].$$

2°. Из сопоставления соотношений п. 1° с (I.4.3.2°) следует, что векторы орбитальных моментов электрона L_e и p_m и сама орбита электрона прецессируют вокруг направления вектора B магнитной индукции поля (рис. III.12.2, а). Эта прецессия называется *ларморовской прецессией*. Угловая скорость ω_L ларморовской прецессии зависит только от магнитной индукции поля и совпадает с ней по направлению:

$$\omega_L = \frac{e}{2m} B \quad (\text{в СИ}),$$

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} B \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь e — абсолютная величина заряда электрона, m — его масса, c — электродинамическая постоянная (IX).

Теорема Лармора: единственным результатом влияния магнитного поля на орбиту электрона в атоме является прецессия орбиты и вектора p_m орбитального магнитного момента электрона с угловой скоростью ω_L вокруг оси, проходящей через ядро атома параллельно вектору B индукции магнитного поля.

3°. Прецессия орбиты электрона в атоме (п. 2°) приводит к появлению дополнительного орбитального тока (рис. III.12.2, б)

$$\Delta I_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi}$$

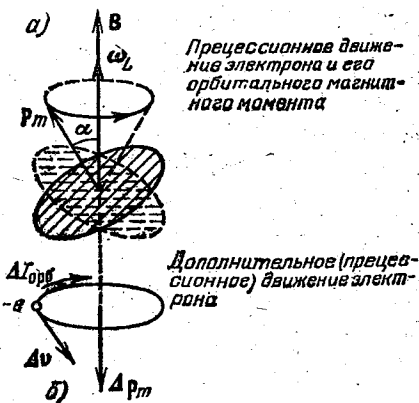


Рис. III.12.2

и соответствующего ему наведенного орбитального магнитного момента Δp_m , модуль которого равен

$$\Delta p_m = \Delta I_{\text{орб}} S_{\perp} = \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} B \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta p_m = \frac{1}{c} \Delta I_{\text{орб}} S_{\perp} = \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m c^2} B \quad (\text{в СГС}),$$

где S_{\perp} — площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную к вектору B . По направлению вектор Δp_m противоположен вектору магнитной индукции:

$$\Delta p_m = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} B \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta p_m = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m c^2} B \quad (\text{в СГС}).$$

4°. Общий наведенный орбитальный магнитный момент атома (III.12.1.5°) равен

$$\Delta P_m = -\frac{e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} B \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta P_m = -\frac{e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m c^2} B \quad (\text{в СГС}),$$

где Z — число электронов в атоме, а $\langle S_{\perp} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z S_{\perp i}$ — среднее значение площади проекций орбит всех электронов атома на плоскость, перпендикулярную к вектору B .

§ III.12.3. Диамагнетика и парамагнетика в магнитном поле

1°. Количественной характеристикой намагниченного состояния вещества служит векторная величина — *намагниченность* J (раньше ее часто называли *интенсивностью намагничивания*), равная отношению магнитного момента макроскопически малого объема вещества к величине ΔV этого объема:

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n P_{mi}$$

где P_{mi} — магнитный момент i -го атома (молекулы) из общего числа n атомов (молекул), содержащихся в объеме ΔV . Этот объем должен быть столь малым, чтобы в его пределах магнитное поле можно было считать однородным (III.10.1.4°). В то же время в нем должно содержаться еще столь большое число атомов ($n \gg 1$), чтобы к ним можно было применять статистические методы (II.1.2.2°).

2°. *Диамагнетиками* называются вещества, магнитные моменты атомов (молекул) которых в отсутствие внешнего магнитного поля равны нулю, так как магнитные моменты всех электронов атома (молекулы) взаимно скомпенсированы. Таким свойством обладают, например, вещества, в атомах, молекулах или ионах которых имеются только целиком заполненные электронные слои (VI.2.3.6°) —

инертные газы, водород, азот, NaCl и др. При внесении диамагнитного вещества во внешнее магнитное поле его атомы (молекулы) приобретают наведенные магнитные моменты (III.12.2.4°).

3°. В пределах малого объема ΔV изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты ΔP_m всех атомов (молекул) одинаковы и направлены противоположно вектору B (III.12.2.4°). Вектор намагниченности J равен

$$J = \frac{n \Delta P_m}{\Delta V} = n_0 \Delta P_m,$$

или, с учетом (III.12.2.4°),

$$J = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} B = \chi' \frac{B}{\mu_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$J = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m c^2} B = \chi' B \quad (\text{в СГС}),$$

где n_0 — концентрация атомов (молекул) диамагнетика, μ_0 — магнитная постоянная (III.10.3.2°), а χ' — безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства диамагнетика и равная

$$\chi' = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle \mu_0}{4\pi m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\chi' = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m c^2} \quad (\text{в СГС}).$$

Для всех диамагнетиков $\chi' < 0$. Таким образом, вектор $B_{\text{внутр}}$ магнитной индукции собственного магнитного поля, создаваемого диамагнетиком при его намагничивании во внешнем магнитном поле B_0 , направлен в сторону, противоположную B_0 .

4°. *Магнитной восприимчивостью* вещества называется величина χ , связанная с χ' соотношением

$$1 + \chi = \frac{1}{1 - \chi'} \quad (\text{в СИ}),$$

$$1 + 4\pi\chi = \frac{1}{1 - 4\pi\chi'} \quad (\text{в СГС}),$$

откуда

$$\chi = \frac{\chi'}{1 - \chi'} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\chi = \frac{\chi'}{1 - 4\pi\chi'} \quad (\text{в СГС}).$$

У диамагнетиков $|\chi'| \sim (10^{-6} \div 10^{-5})$. Поэтому практически $\chi = \chi'$.

5°. *Парамагнетиками* называются вещества, атомы (молекулы) которых в отсутствие внешнего магнитного поля имеют отличный от нуля магнитный момент P_m . Существование этого магнитного момента может быть связано как с орбитальным движением электронов в атомах (молекулах) парамагнетика, так и со спиновыми магнитными моментами этих электронов (III.12.1.4°). Примерами парамагнетиков являются щелочные и щелочно-земельные металлы. В отсутствие внешнего магнитного поля векторы P_{mi} различных атомов (молекул) парамагне-

тика, совершающих тепловое движение, ориентированы в пространстве совершенно беспорядочно, так что намагниченность парамагнетика $J=0$.

6°. При внесении парамагнитного вещества в магнитное поле магнитные моменты атомов (молекул) прецессируют вокруг направления магнитной индукции \mathbf{B} с ларморовской угловой скоростью ω_L (III.12.2.2°). Тепловое движение атомов (молекул) парамагнетика вызывает их частые столкновения друг с другом. Совместное действие межатомных столкновений и магнитного поля приводит к преимущественной ориентации собственных магнитных моментов атомов P_m по направлению внешнего поля, так что парамагнетик намагничивается.

7°. Модуль вектора намагниченности (п. 1°) в классической теории парамагнетизма газов выражается формулой

$$J = n_0 P_m L(a),$$

где n_0 — концентрация молекул, $L(a)$ — классическая функция Ланжевена от аргумента $a = P_m B / kT$, равная

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} = \text{cth } a - \frac{1}{a}.$$

Здесь P_m — собственный магнитный момент молекулы, B — магнитная индукция поля, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T — абсолютная температура.

Если $a \ll 1$, т. е. при не слишком сильных магнитных полях и не слишком низких температурах, функция Ланжевена $L(a) \approx a/3$. В таких случаях намагниченность парамагнетика пропорциональна магнитной индукции поля \mathbf{B} :

$$J = \chi' \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$J = \chi' \mathbf{B} \quad (\text{в СГС}),$$

где χ' определяется по формуле

$$\chi' = \frac{\mu_0 n_0 P_m^2}{3kT} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\chi' = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} \quad (\text{в СГС}).$$

Значения χ' для парамагнетиков положительны и находятся в пределах от 10^{-5} до 10^{-3} . Поэтому магнитная восприимчивость χ парамагнетика, связанная с χ' формулой п. 4°, практически равна χ' .

Закон Кюри: магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорциональна абсолютной температуре, т. е. $\chi = C/T$, где C — постоянная.

В очень сильных магнитных полях, т. е. при $a \gg 1$, $L(a) \approx 1$ и $J = n_0 P_m$ — магнитные моменты всех атомов (молекул) парамагнетика ориентированы по направлению вектора \mathbf{B} магнитной индукции поля. Такое состояние парамагнетика называется состоянием *насыщения намагниченности*.

8°. Парамагнетизм металлов обусловлен магнитными моментами электронов проводимости (III.5.1.1°) и магнитными моментами ионов кристаллической решетки. В частности, у щелочных и щелочноземельных металлов магнитные моменты ионов равны нулю и парамагнетизм обусловлен только электронами проводимости. Эти электроны образуют сильно вырожденный газ (VII.2.3.1°), со-

состояние которого мало меняется при изменении температуры (VII.2.4.4°). Поэтому щелочные и щелочноземельные металлы не подчиняются закону Кюри (п. 7°) — их магнитная восприимчивость практически не зависит от температуры.

§ III.12.4. Магнитное поле в веществе

1°. В связи с рассмотрением магнитного поля в веществе различают два типа токов — макроток и микроток. *Макроточками* называются токи проводимости (III.7.1.2°) и конвекционные токи (III.7.1.2°). *Микроточками (молекулярными токами)* называются токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

Магнитное поле в веществе является суперпозицией двух полей: внешнего магнитного поля, создаваемого макроточками, и *внутреннего, или собственного, магнитного поля*, создаваемого микроточками. Вектор \mathbf{B} магнитной индукции (III.10.1.2°) характеризует результирующее магнитное поле в веществе. Он равен геометрической сумме магнитных индукций внешнего (\mathbf{B}_0) и внутреннего ($\mathbf{B}_{\text{внутр}}$) магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{внутр}}$$

Первичным источником магнитного поля в среде являются макроток, магнитное поле которых вызывает намагничивание вещества, помещенного в это поле.

2°. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (III.10.6.2°) легко обобщить на случай магнитного поля в веществе, рассматривая наряду с макроточками, фигурирующими в выражении (III.10.6.2°), также и микроток:

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}) \quad (\text{в СГС}),$$

где $I_{\text{макро}}$ и $I_{\text{микро}}$ — алгебраическая сумма макро- и микроточков сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур \mathcal{L} .

3°. Алгебраическая сумма сил микроточков (п. 2°) связана с циркуляцией вектора намагниченности (III.12.3.1°) соотношением

$$I_{\text{микро}} = \oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{J} d\mathbf{l} \quad (\text{в СИ}),$$

$$I_{\text{микро}} = c \oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{J} d\mathbf{l} \quad (\text{в СГС}).$$

В этом проще всего убедиться на примере диамагнитной среды. Наведенному магнитному моменту ΔP_m атома (молекулы) диамагнетика (III.12.2.4°) можно сопоставить замкнутый *молекулярный ток* $I_{\text{мол}}$ с площадью витка $S_{\text{мол}}$ (рис. III.12.3) такой, что

$$\Delta P_m = I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta P_m = \frac{1}{c} I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \quad (\text{в СГС}).$$

Вклад в $I_{\text{микро}}$ дают только те молекулярные токи, которые наизаны на замкнутый контур \mathcal{L} как бусы на нитку. Элементу dl контура соответствует микроток

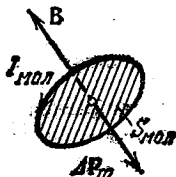


Рис. III.12.3

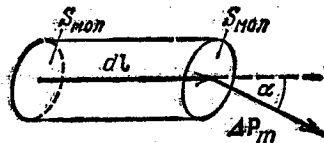


Рис. III.12.4

$dl_{\text{микро}} = I_{\text{мол}} dn$, где dn — число атомов (молекул) диамагнитной среды, которые находятся внутри косо́го цилиндра с площадью оснований $S_{\text{мол}}$, изображенного на рис. III.12.4. Если концентрация атомов (молекул) среды равна n_0 , то $dn = n_0 S_{\text{мол}} dl \cos \alpha$. Так как, согласно (III.12.3.3°), $J = n_0 \Delta P_m$, то

$$dl_{\text{микро}} = J dl \cos \alpha = J dl \text{ и } I_{\text{микро}} = \oint_{(\mathcal{L})} J dl \quad (\text{в СИ}),$$

$$dl_{\text{микро}} = cJ dl \text{ и } I_{\text{микро}} = c \oint_{(\mathcal{L})} J dl \quad (\text{в СГС}).$$

4°. Используя выражение п. 3° для $I_{\text{микро}}$, закон полного тока для магнитного поля в веществе (п. 2°) можно записать в виде

$$\oint_{(\mathcal{L})} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) dl = I_{\text{макро}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{L})} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}) dl = \frac{4\pi}{c} I_{\text{макро}} \quad (\text{в СГС}).$$

Вектор

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J} \quad (\text{в СГС})$$

называется напряженностью магнитного поля. Таким образом, закон полного тока для магнитного поля в веществе утверждает, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} вдоль произвольного замкнутого контура \mathcal{L} равна (в СИ) или пропорциональна (в СГС) алгебраической сумме макротокосквозь поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} dl = I_{\text{макро}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} I_{\text{макро}} \quad (\text{в СГС}).$$

Из этого соотношения и теоремы Стокса (III.14.2.2°) следует, что напряженность магнитного поля в среде связана с плотностью макротокосквозь $\mathbf{j}_{\text{макро}}$ в той же

точке поля формулой:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{макро}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{макро}} \quad (\text{в СГС}).$$

5°. В случае изотропной среды (IV.3.1.6°) намагниченность \mathbf{J} пропорциональна индукции магнитного поля \mathbf{B} (III.12.3.3°) и (III.12.3.7°). Поэтому связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{H} = (1 - \chi') \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}}{(1 + \chi) \mu_0} = \frac{\mathbf{B}}{\mu \mu_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{H} = (1 - 4\pi\chi') \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{1 + 4\pi\chi} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (\text{в СГС}),$$

где μ — относительная магнитная проницаемость вещества, связанная с его магнитной восприимчивостью соотношением

$$\mu = 1 + \chi \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (\text{в СГС}).$$

Связь намагниченности \mathbf{J} изотропной среды с напряженностью \mathbf{H} магнитного поля имеет одинаковый вид в СИ и в СГС:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}.$$

§ III.12.5. Ферромагнетики

1°. Ферромагнетиками называются твердые вещества (как правило, находящиеся в кристаллическом состоянии), обладающие при не слишком высоких температурах самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий — магнитного поля, деформации, изменения температуры. Ферромагнетики, в отличие от слабо магнитных диа- и парамагнетиков, являются сильно магнитными средами: внутреннее магнитное поле в них (III.12.4.1°) может в сотни и тысячи раз превосходить внешнее поле,

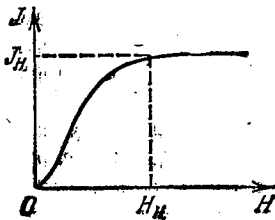


Рис. III.12.5

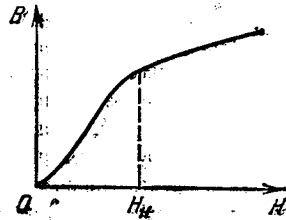


Рис. III.12.6

Ферромагнетизм наблюдается у кристаллов переходных металлов (VI.2.3.8°) — железа, кобальта, никеля, у некоторых редкоземельных металлов и у ряда сплавов.

2°. Основные отличия магнитных свойств ферромагнетиков.

а) Нелинейная зависимость намагниченности J (III.12.3.1°) от напряженности H магнитного поля (рис. III.12.5). При $H > H_H$ наблюдается магнитное на-

сыщение, т. е. $J = J_H = \text{const}$ независимо от значения H (в отличие от парамагнетиков, значение H_H , при котором наступает магнитное насыщение, сравнительно невелико).

б) При $H < H_H$ зависимость магнитной индукции B от напряженности H нелинейная, а при $H > H_H$ она становится линейной (рис. III.12.6).

в) Зависимость относительной магнитной проницаемости μ от напряженности H имеет сложный характер (рис. III.12.7), причем максимальные значения μ очень велики: $\mu_{\text{макс}} \sim (10^3 \div 10^6)$.



Рис. III.12.7

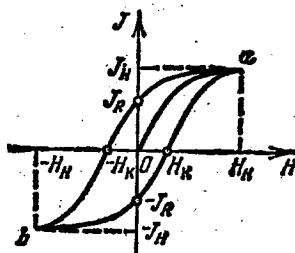


Рис. III.12.8

г) Существование *магнитного гистерезиса* — различия в значениях намагниченности J ферромагнетика при одном и том же значении H напряженности намагничивающего поля в зависимости от значения предварительной намагниченности ферромагнетика (рис. III.12.8) *).

д) У каждого ферромагнитного вещества имеется такая температура θ_K , называемая *точкой Кюри*, выше которой это вещество теряет свои особые магнитные свойства и ведет себя как обычный парамагнетик (III.12.3.5°).

3°. *Петлей гистерезиса* называется показанный на рис. III.12.8 график зависимости намагниченности ферромагнетика от напряженности магнитного поля при изменении напряженности от H_H до $-H_H$ и обратно, где H_H — напряженность поля, соответствующая магнитному насыщению (рис. III.12.5). Намагниченность J_H при $H = H_H$ называется *намагниченностью насыщения*. Намагниченность $\pm J_R$ при $H = 0$ называется *остаточной намагниченностью*. Существование остаточной намагниченности у ферромагнетика, удаленного из магнитного поля, служит основой для создания постоянных магнитов.

Напряженность $\pm H_H$ магнитного поля, полностью размагничивающего ферромагнитный образец, называется *коэрцитивной силой* (*задерживающей напряженностью*) **). Коэрцитивная сила характеризует способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние. Большой коэрцитивной силой (широкой петлей гистерезиса) обладают *магнитотвердые материалы*, используемые для изготовления постоянных магнитов. Малую коэрцитивную силу (соответственно узкую петлю гистерезиса) имеют *магнитомягкие материалы*, используемые для изготовления магнитных цепей (сердечников) трансформаторов.

*) Рис. III.12.5—III.12.7 соответствуют намагничиванию предварительно полностью размагниченного ферромагнитного образца.

**) Различают коэрцитивную силу по намагниченности (H_H на рис. III.12.8) и по индукции (значение H , при котором $B=0$).

Периодическое перемагничивание ферромагнитного образца связано с затратой энергии на его нагревание. Площадь петли гистерезиса пропорциональна количеству теплоты, выделяющейся в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания.

4°. При температурах ниже точки Кюри (п. 2°) ферромагнитный образец разбит на малые области самопроизвольной (спонтанной) однородной намагниченности, называемые *доменами*. Линейные размеры доменов порядка $(10^{-5} \div 10^{-4} \text{ м})$. Внутри каждого домена вещество намагничено до насыщения (п. 2°). В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты доменов ориентированы в пространстве так, что результирующий магнитный момент образца равен нулю.

Намагничивание ферромагнитного образца во внешнем магнитном поле состоит, во-первых, в смещении границ доменов и росте размеров тех доменов, векторы магнитных моментов которых близки по направлению к магнитной индукции \mathbf{B} поля, и, во-вторых, в повороте магнитных моментов целых доменов по направлению поля \mathbf{B} . В достаточно сильном магнитном поле достигается состояние магнитного насыщения, когда весь образец намагничен по полю и его намагниченность \mathbf{J} не изменяется при дальнейшем увеличении \mathbf{B} .

5°. Измерения гиромагнитного отношения для ферромагнетиков показали, что элементарными носителями магнетизма в них являются спиновые магнитные моменты электронов (III.12.1.4°). В современной квантовой механической теории ферромагнетизма объяснена природа самопроизвольной намагниченности ферромагнетиков (п. 4°) и природа возникновения сильного внутреннего поля (III.12.4.1°).

Ферромагнитными свойствами могут обладать кристаллы веществ, атомы которых имеют не заполненные электронами внутренние слои (VI.3.2.6°), так что проекция результирующего спинового магнитного момента на направление магнитного поля (III.12.1.4°) отлична от нуля. При определенных условиях благодаря взаимному воздействию между электронами соседних атомов, имеющему особую квантовомеханическую природу (VI.2.4.5°), оказывается устойчивым такое состояние ферромагнетика, когда спины электронов всех атомов в пределах одного домена ориентированы одинаково. Таким образом возникает спонтанное намагничивание доменов до насыщения. При нагревании ферромагнетика до точки Кюри (п. 2°) тепловое движение разрушает области спонтанной намагниченности и вещество теряет свои особые магнитные свойства.

§ III.12.6. Условия для магнитного поля на границе раздела изотропных сред. Магнитные цепи

1°. Из теоремы Остроградского — Гаусса для магнитного поля (III.10.7.2°) следует, что векторы магнитной индукции \mathbf{B} и напряженности магнитного поля \mathbf{H} на границе раздела двух сред с относительными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 связаны соотношениями

$$B_{2n} = B_{1n} \quad \text{и} \quad \mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}.$$

Здесь B_n и H_n — проекции векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} на единичный вектор \mathbf{n} , направленный по нормали к границе раздела сред. В частности, если поверхность раздела

сред ортогональна к линиям магнитной индукции, то $B_1 = B_{1\tau}$, $B_2 = B_{2\tau}$ и вектор B не изменяется при переходе через границу раздела: $B_2 = B_1$, а $H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1$.

2°. В случае отсутствия макротоков (III.12.4.1°), идущих по поверхности раздела сред, из закона полного тока для магнитного поля в среде (III.12.4.4°) следует, что

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \quad \text{и} \quad \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1}.$$

Здесь B_τ и H_τ — проекции векторов B и H на единичный вектор τ , направленный по касательной к поверхности раздела сред. В частности, если первая среда — вакуум, то $\mu_1 = 1$ и $B_{2\tau} = \mu_2 B_{1\tau}$. Таким образом, относительная магнитная проницаемость среды показывает, во сколько раз увеличивается касательная составляющая магнитной индукции поля при переходе из вакуума в данную среду.

3°. Если однородный и изотропный магнетик с относительной магнитной проницаемостью μ *) заполняет весь объем магнитного поля или часть его, ограниченную поверхностью, которая касается линий магнитной индукции (III.10.1.4°), то магнитная индукция B поля в магнетике в μ раз больше, чем магнитная индукция $B_{\text{вак}}$ в той же точке поля, создаваемого теми же макротоками в вакууме: $B = \mu B_{\text{вак}}$.

4°. **Пример 1.** Поле тороида (рис. III.10.9) с сердечником из однородного и изотропного вещества с относительной магнитной проницаемостью μ .

Магнитное поле локализовано в сердечнике тороида, причем линии магнитной индукции имеют вид концентрических окружностей, центры которых лежат на оси тороида, а плоскости перпендикулярны к ней. Циркуляция вектора H напряженности поля вдоль линии магнитной индукции \mathcal{L} — окружности радиуса r равна

$$\oint_{(\mathcal{L})} H \, dl = 2\pi r H.$$

Сумма макротоков сквозь поверхность, натянутую на контур \mathcal{L} радиуса r ($R_2 < r < R_1$), равна: $I_{\text{макро}} = NI$, где N — число витков обмотки тороида, а I — сила тока в ней. По закону полного тока (III.12.4.4°) напряженность и магнитная индукция поля в сердечнике тороида равны

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$H = \frac{2NI}{cr} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu}{a} \frac{2NI}{r} \quad (\text{в СГС}).$$

5°. **Пример 2.** Поле длинного соленоида с сердечником из однородного изотропного вещества с относительной магнитной проницаемостью μ .

Вдали от концов соленоида магнитное поле в сердечнике соленоида можно считать однородным (III.10.1.4°). Напряженность и магнитная индукция этого

*) Предполагается, что магнетик не обладает ферромагнитными свойствами (III.12.5.2°), так что его относительная магнитная проницаемость μ всюду в поле имеет одно и то же значение.

поля равны

$$\begin{aligned} H &= nI & \text{и} & \quad B = \mu\mu_0 nI & \quad (\text{в СИ}), \\ H &= \frac{4\pi}{c} nI & \text{и} & \quad B = \frac{4\pi\mu}{c} nI & \quad (\text{в СГС}). \end{aligned}$$

Здесь n — число витков соленоида, приходящихся на единицу его длины, I — сила тока в витках.

6°. *Магнитной цепью* называется последовательность тел, через которые проходят линии магнитной индукции. Примерами магнитных цепей могут служить сердечники тороида и бесконечно длинного соленоида. Для усиления магнитного поля и практически полной локализации его внутри магнитной цепи используют магнитные цепи из ферромагнитных материалов (например, из железа), имеющих большую относительную магнитную проницаемость μ . Магнитные цепи являются необходимыми элементами электрических машин и генераторов, трансформаторов, электромагнитов и т. п. Расчет магнитных цепей основан на законах, вытекающих из теоремы Остроградского — Гаусса для магнитного поля (III.10.7.2°) и закона полного тока (III.12.4.4°). Законы магнитных цепей по форме аналогичны соответствующим законам электрических цепей (аналогом силы электрического тока является магнитный поток через поперечное сечение магнитной цепи).

7°. *Закон Ома для неразветвленной замкнутой магнитной цепи* (формула Гопкинсона)

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}.$$

Здесь Φ_m — магнитный поток сквозь поперечное сечение магнитной цепи, который постоянен по всей длине неразветвленной магнитной цепи, R_m — полное магнитное сопротивление замкнутой магнитной цепи (п. 8°), \mathcal{E}_m — *магнитодвижущая сила*, равная, по определению, циркуляции вектора \mathbf{H} напряженности магнитного поля вдоль рассматриваемой замкнутой магнитной цепи (контур \mathcal{L}):

$$\mathcal{E}_m = \oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} \, dl = I_{\text{макро}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_m = \oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} \, dl = \frac{4\pi}{c} I_{\text{макро}} \quad (\text{в СГС}),$$

где $I_{\text{макро}}$ — макроток сквозь поверхность, натянутую на контур \mathcal{L} (см. III.12.4.4°). В частности, если на магнитную цепь навита обмотка из N витков с током I , то

$$\mathcal{E}_m = NI \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} NI \quad (\text{в СГС}).$$

8°. *Магнитное сопротивление* однородного участка магнитной цепи длиной l_i равно

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl}{\mu\mu_0 S} \quad (\text{в СИ}),$$

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl}{\mu S} \quad (\text{в СГС}),$$

где μ — относительная магнитная проницаемость магнетика, μ_0 — магнитная постоянная (IX), c — электродинамическая постоянная (IX), S — площадь поперечного сечения цепи.

Если по длине участка $S = \text{const}$, то

$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu\mu_0 S} \quad (\text{в СИ}),$$

$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu S} \quad (\text{в СГС}).$$

Магнитное сопротивление $R_{m_{\text{посл}}}$ цепи, состоящей из n последовательно соединенных участков, равно

$$R_{m_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^n R_{mi}.$$

Магнитное сопротивление $R_{m_{\text{пар}}}$ участка, эквивалентного n параллельно соединенным участкам магнитной цепи, равно

$$R_{m_{\text{пар}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{mi}}}.$$

9°. *Узел магнитной цепи* называется место ее разветвления, т. е. соединения трех или большего числа участков этой цепи.

Для расчета разветвленных магнитных цепей пользуются правилами Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма магнитных потоков во всех n участках, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{mi} = 0.$$

При этом магнитный поток в участке цепи считается положительным, если линии магнитной индукции подходят к узлу. Если же они выходят из узла, то соответствующий магнитный поток считается отрицательным. Первое правило Кирхгофа вытекает из теоремы Остроградского — Гаусса для магнитного поля (III.10.7.2°).

10°. *Второе правило Кирхгофа:* в любой замкнутой магнитной цепи, произвольно выбранной в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил в этой цепи:

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_{mi},$$

где k — число участков, образующих замкнутую цепь, а Φ_{mi} и \mathcal{E}_{mi} считаются положительными, если соответствующие им линии магнитной индукции совпадают с произвольно выбранным направлением обхода замкнутой цепи.

Глава III.13. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ III.13.1. Основной закон электромагнитной индукции

1°. *Электромагнитной индукцией* называется возникновение электродвижущей силы (III.8.2.2°) в проводнике при его перемещении в магнитном поле либо в замкнутом проводящем контуре вследствие его движения в магнитном поле или изменения самого поля. Эта электродвижущая сила $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ называется *электродвижущей силой электромагнитной индукции*. Под ее влиянием в замкнутом проводнике возникает электрический ток, называемый *индукционным током*.

2°. *Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея — Максвелла)*: э. д. с. $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ электромагнитной индукции в контуре пропорциональна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока Φ_m (III.10.7.1°) сквозь поверхность, натянутую на этот контур, т. е.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{в СГС}),$$

где c — электродинамическая постоянная (IX). При этом несущественно, чем именно вызвано изменение магнитного потока — деформацией контура, его перемещением в магнитном поле или изменением самого поля с течением времени. Направление обхода контура при вычислении $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и направление нормали \mathbf{n} при вычислении Φ_m должны быть согласованы по правилу правого винта: из конца вектора \mathbf{n} обход контура должен быть виден происходящим против часовой стрелки.

Закон электромагнитной индукции можно также записать в форме

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{в СГС}),$$

где Ψ — потокосцепление контура (III.10.7.3°).

3°. Знак минус в правой части закона электромагнитной индукции (п. 2°) соответствует *правилу Ленца*: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшему индукционный ток.

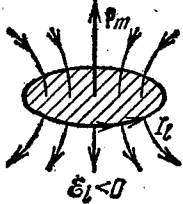
На рис. III.13.1 показаны направления индукционного тока в замкнутом контуре и вектора \mathbf{p}_m его магнитного момента для двух случаев: усиления внешнего магнитного поля ($\frac{d\Phi_m}{dt} > 0$, рис. III.13.1, а) и его ослабления ($\frac{d\Phi_m}{dt} < 0$, рис. III.13.1, б).

4°. Закон электромагнитной индукции (п. 2°) для замкнутого проводника, перемещающегося в магнитном поле, можно получить на основе закона сохранения энергии. За малое время dt внешние силы, приложенные к проводнику и вы-

ывающие его перемещение в магнитном поле, совершают работу $\delta A'$, равную работе индукционного тока в замкнутом проводнике: $\delta A' = \mathcal{E}_{\text{инд}} I_{\text{инд}} dt$. С другой стороны, работа $\delta A'$ равна взятой с обратным знаком работе δA , совершаемой силами Ампера (III.10.8.3°): $\delta A' = -I_{\text{инд}} d\Phi$ (в СИ). Поэтому $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}$ (в СИ).

5°. Э. д. с. электромагнитной индукции возникает в каждом отрезке проводника, пересекающем при своем движении линии магнитной индукции поля

$$a) \frac{d\Phi_m}{dt} > 0$$



$$b) \frac{d\Phi_m}{dt} < 0$$

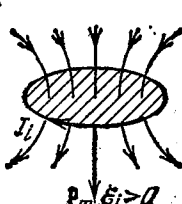


Рис. III.13.1

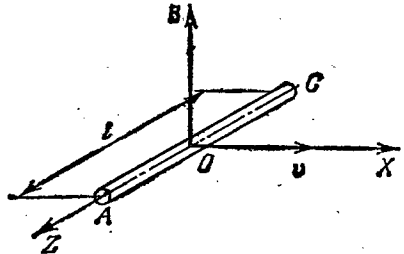


Рис. III.13.2

(III.10.1.4°). Это можно объяснить действием силы Лоренца (III.10.1.5°) на носители тока в проводнике. В случае, изображенном на рис. III.13.2, на электроны проводимости металла (III.7.3.1°) действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = -e[(v + v')B]$ (в СИ), где v — скорость движения отрезка проводника AC в магнитном поле, вектор магнитной индукции B которого перпендикулярен к плоскости, образованной отрезком проводника и скоростью его движения. Электроны упорядоченно движутся вдоль проводника со скоростью v' под действием составляющей силы Лоренца, касательной к проводнику и направленной от A к C . Движение электронов по проводнику прекращается, когда возникшее в разомкнутом проводнике AC электростатическое поле, действующее на электроны с силой $-eE_{\text{кул}}$, компенсирует действие силы Лоренца, которая играет роль сторонней силы (III.8.1.2°). Напряженность установившегося поля сторонних сил (при $v'=0$) равна

$$E_{\text{стор}} = \frac{F_{\text{Л}}}{-e} = [vB] \quad (\text{в СИ}).$$

Э. д. с. электромагнитной индукции в проводнике AC равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \int_{(AC)} E_{\text{стор}} dl = - \int_{(AC)} B [v dl] \quad (\text{в СИ}),$$

где интегрирование проводится по всей длине проводника от точки A до точки C . Так как $v \perp dl$, то

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -Blv = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

где $d\Phi_m$ — магнитный поток сквозь поверхность, очерчиваемую проводником за малый промежуток времени dt , а $d\Phi_m/dt$ — величина, часто называемая скоростью пересечения проводником линий магнитной индукции. При вычислении $d\Phi_m$ вектор нормали n (III.10.7.1°) должен быть направлен вдоль вектора $[v dl]$.

По закону Ома (III.8.2.3°) для участка AC разомкнутой цепи (при $I=0$) равновесная разность потенциалов точек A и C, которая установится при $v'=0$, равна

$$\Phi_A - \Phi_C = -\mathcal{E}_{\text{инд}} = Blv \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Phi_A - \Phi_C = \frac{1}{c} Blv \quad (\text{в СГС}).$$

6°. Явление электромагнитной индукции в неподвижном замкнутом проводнике, находящемся в переменном магнитном поле, нельзя объяснить с помощью силы Лоренца, так как на неподвижные заряды эта сила не действует. Оно объясняется тем, что переменное магнитное поле вызывает появление вихревого индуцированного электрического поля, циркуляция напряженности E которого вдоль замкнутого проводящего контура \mathcal{L} равна э. д. с. электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в СГС}),$$

где частная производная $\partial \Phi_m / \partial t$ учитывает зависимость потока магнитной индукции сквозь поверхность, натянутую на неподвижный контур \mathcal{L} , от времени t только вследствие переменности магнитного поля.

7°. Величина q электрического заряда, проходящего через поперечное сечение замкнутого проводящего контура при изменении потокосцепления этого контура, равна

$$q = \int_0^{\tau} I_{\text{инд}} dt = \int_0^{\tau} \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} dt = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R} \quad (\text{в СИ}),$$

$$q = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{cR} \quad (\text{в СГС}),$$

где $I_{\text{инд}}$ — индукционный ток в контуре, R — электрическое сопротивление контура, Ψ_1 и Ψ_2 — начальное и конечное значения потокосцепления контура (III.10.7.3°).

§ III.13.2. Явление самоиндукции

1°. Самоиндукцией называется возникновение э. д. с. электромагнитной индукции в электрической цепи вследствие изменения в ней электрического тока. Эта э. д. с. \mathcal{E}_c называется *электродвижущей силой самоиндукции*. Из закона электромагнитной индукции (III.13.1.2°) следует, что

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Psi_c}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_c = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi_c}{dt} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь Ψ_c — потокосцепление самоиндукции рассматриваемого контура с током (III.10.7.3°).

2°. Собственной индуктивностью (индуктивностью) контура называется положительная скалярная величина

$$L = \frac{\Psi_c}{I} \quad (\text{в СИ}),$$

$$L = \frac{c\Psi_c}{I} \quad (\text{в СГС}),$$

где Ψ_c — потокосцепление самоиндукции контура при силе тока в нем, равной I .

Если контур находится в неферромагнитной среде, заполняющей все поле, то, согласно (III.12.6.3°) и закону Био — Савара — Лапласа (III.10.3.2°), индуктивность контура зависит только от его формы и размеров, а также от магнитной проницаемости μ среды. Индуктивность контура численно равна потокосцеплению самоиндукции контура при силе тока в контуре, равной 1 А (в СИ) и $3 \cdot 10^{10}$ СГСЭ_I (в СГС).

Из формул (III.13.4) для энергии магнитного поля контура с током следует, что индуктивность контура связана с магнитной индукцией B магнитного поля этого контура при прохождении по нему тока I соотношением вида

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_{(V_{\text{поля}})} \frac{B^2}{\mu} dV \quad (\text{в СИ}),$$

$$L = \frac{c^2}{4\pi I^2} \int_{(V_{\text{поля}})} \frac{B^2}{\mu} dV \quad (\text{в СГС}),$$

где интегрирование проводится по всему объему $V_{\text{поля}}$ магнитного поля рассматриваемого контура с током.

3°. Магнитное поле длинного соленоида (III.10.4.5°) практически можно считать однородным (III.10.4.6°). Поэтому индуктивность соленоида равна

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l} = \mu\mu_0 n^2 V \quad (\text{в СИ}),$$

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l} = 4\pi\mu n^2 V \quad (\text{в СГС}),$$

где μ — относительная магнитная проницаемость среды, заполняющей весь объем соленоида $V = lS$, l — длина соленоида, S — площадь одного витка, а N — общее число витков. Вышеприведенные формулы индуктивности длинного соленоида, в силу однородности магнитного поля соленоида, справедливы и для соленоида, заполненного ферромагнитной средой.

4°. Из закона электромагнитной индукции (III.13.1.2°) следует выражение для э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Psi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_c = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi_c}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(LI) \quad (\text{в СГС}).$$

Если контур не деформируется и находится в неферромагнитной среде (III.12.5.2°), то при изменении тока I индуктивность контура не изменяется.

Поэтому

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_c = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} \quad (\text{в СГС}).$$

5°. Электродвижущая сила самоиндукции противодействует, в соответствии с правилом Ленца (III.13.1.3°), изменению тока в цепи, замедляя его убывание или возрастание. Мерой инертности контура по отношению к изменению в нем тока является индуктивность контура (п. 2°).

Закон изменения силы тока в цепи при включении в нее или выключении источника постоянного тока с э. д. с. \mathcal{E} имеет вид

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

где I_0 — сила тока в начальный момент времени (при $t=0$), R — электрическое сопротивление цепи, L — ее индуктивность.

При замыкании цепи начальный ток $I_0=0$ и зависимость силы тока от времени имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Сила тока в цепи нарастает от 0 до значения \mathcal{E}/R , равного силе установившегося постоянного тока в цепи. Нарастание происходит тем быстрее, чем больше отношение R/L (рис. III.13.3): $R_1/L_1 > R_2/L_2$.

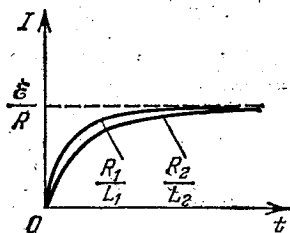


Рис. III.13.3

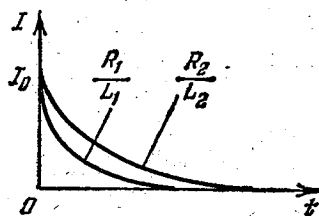


Рис. III.13.4

При отключении источника э. д. с. (без изменения сопротивления R цепи) ток в цепи спадает по закону

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Уменьшение тока в цепи происходит тем быстрее, чем больше отношение R/L (рис. III.13.4): $R_1/L_1 > R_2/L_2$.

§ III.13.3. Взаимная индукция

1°. *Взаимной индукцией* называется явление возбуждения э. д. с. электромагнитной индукции (III.13.1.1°) в одной электрической цепи при изменении электрического тока в другой цепи или при изменении взаимного расположения этих двух

цепей. Эта э.д.с. называется *электродвижущей силой взаимной индукции*. В соответствии с основным законом электромагнитной индукции (III.13.1.2°) э. д. с. \mathcal{E}_{21} взаимной индукции, возникающая во второй цепи вследствие изменения потокосцепления Ψ_{21} взаимной индукции этой цепи и другой (первой) цепи с током (III.10.7.3°), равна

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi_{21}}{dt} \quad (\text{в СГС}).$$

2°. Потокосцепление Ψ_{21} обусловлено магнитным полем тока I_1 , идущего в первой цепи, и при прочих равных условиях пропорционально силе тока I_1 :

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Psi_{21} = \frac{1}{c} M_{21} I_1 \quad (\text{в СГС}).$$

где M_{21} — *взаимная индуктивность* второго и первого контуров (цепей). Величина M_{21} зависит от формы, размеров и взаимного расположения обоих контуров, а также от относительной магнитной проницаемости среды, в которой они находятся.

Потокосцепление Ψ_{12} взаимной индукции первой цепи, обусловленное магнитным полем тока I_2 , проходящего по второй цепи, равно

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Psi_{12} = \frac{1}{c} M_{12} I_2 \quad (\text{в СГС}),$$

где M_{12} — *взаимная индуктивность* первого и второго контуров.

Если контуры находятся в неферромагнитной среде (III.12.5.2°), то $M_{12} = M_{21}$. В случае ферромагнитной среды взаимные индуктивности M_{21} и M_{12} не равны друг другу в общем случае и зависят, помимо перечисленных выше факторов, от величин сил токов в обоих контурах и от характера изменения токов.

3°. Выражения для э. д. с. взаимной индукции при условии постоянства взаимной индуктивности контуров ($M_{21} = M_{12} = \text{const}$):

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c^2} M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{12} = -\frac{1}{c^2} M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (\text{в СГС}).$$

На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока.

§ III.13.4. Энергия магнитного поля в неферромагнитной изотропной среде

1°. При создании в замкнутом проводящем контуре электрического тока I необходимо совершить работу A по преодолению э. д. с. самоиндукции, препятствующей нарастанию тока в контуре (III.13.2.5°):

$$A = - \int_0^I \mathcal{E}_c I dt = \frac{\Psi_c I}{2} = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$A = \frac{1}{c} \frac{\Psi_c I}{2} = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} \quad (\text{в СГС}),$$

где Ψ_c — потокосцепление самоиндукции контура (III.13.2.2°), L — индуктивность контура.

По закону сохранения энергии работа A определяет *собственную энергию тока в контуре*:

$$W_T = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_T = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} \quad (\text{в СГС}).$$

2°. Вместе с ростом электрического тока в цепи возрастает и магнитное поле этого тока. Собственная энергия тока в цепи (п. 1°) представляет собой не что иное, как энергию его магнитного поля. Например, энергия W_T длинного соленоида (III.10.4.5°), магнитное поле которого можно считать однородным и локализованным внутри объема V соленоида (III.12.6.5°),

$$W_T = \frac{1}{2} \mu \mu_0 n^2 I^2 V = \frac{1}{2} BHV \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_T = \frac{\mu}{c^2} 2\pi n^2 I^2 V = \frac{BH}{8\pi} V \quad (\text{в СГС}),$$

где n — число витков обмотки соленоида, приходящихся на единицу его длины, μ — относительная магнитная проницаемость среды, μ_0 и c — магнитная и электродинамическая постоянные (IX).

3°. *Объемной плотностью энергии w_m магнитного поля* называется энергия этого поля, отнесенная к его объему:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV},$$

где dW_m — энергия, заключенная в малом объеме dV поля, который выбран таким образом, чтобы в его пределах поле можно было считать однородным. В изотропной, линейной и неферромагнитной среде

$$w_m = \frac{BH}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_m = \frac{BH}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь B и H — модули векторов магнитной индукции (III.10.1.2°) и напряженности (III.12.4.4°) в рассматриваемой точке магнитного поля.

4°. Энергия W_m , локализованная во всем объеме магнитного поля ($V_{\text{поля}}$), равна

$$W_m = \int_{(V_{\text{поля}})} \frac{BH}{2} dV \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_m = \int_{(V_{\text{поля}})} \frac{BH}{8\pi} dV \quad (\text{в СГС}).$$

5°. Энергию магнитного поля, создаваемого произвольной системой из n контуров с токами, можно найти, как показано в п. 4°, а также по формуле

$$W_m = \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_k I_k}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_m = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_k I_k}{2} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь I_k — сила тока в k -м контуре, а Ψ_k — потокосцепление этого контура (III.10.7.3°). При вычислении Ψ_k вектор нормали \mathbf{n}_k проводится так, чтобы из его конца ток в контуре был виден идущим против часовой стрелки. Потокосцепление

$$\Psi_k = \Psi_{k\text{с}} + \Psi_{k\text{вз}},$$

где $\Psi_{k\text{с}}$ — потокосцепление самоиндукции k -го контура (III.13.2.2°), а $\Psi_{k\text{вз}}$ — потокосцепление взаимной индукции (III.13.3.1°) k -го контура со всеми остальными контурами системы. Поэтому, согласно (III.13.2.2°) и (III.13.3.2°), энергия W_m магнитного поля равна

$$W_m = \sum_{k=1}^n \frac{L_k I_k^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^n M_{ki} I_k I_i \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_m = \frac{1}{c^2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{L_k I_k^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^n M_{ki} I_k I_i \right] \quad (\text{в СГС}).$$

Первый член представляет собой сумму собственных энергий всех токов (п. 1°). Второй член называется *взаимной энергией токов* (M_{ki} — взаимная индуктивность k -го и i -го контуров (III.13.3.2°) с токами I_k и I_i).

§ III.13.5. Закон сохранения энергии для магнитного поля в неферромагнитной среде

1°. Энергия магнитного поля, создаваемого какой-либо системой тел (проводящих контуров с токами и среды), изменяется, если контуры с токами перемещаются или изменяются токи в них. При этом совершают работу внешние силы, приложенные к телам системы, и источники электрической энергии, включенные в цепи токов.

В тех случаях, когда температура системы поддерживается постоянной, а изменение плотности среды и ее относительной магнитной проницаемости пренебрежимо малы, закон сохранения энергии при малом изменении состояния системы можно выразить в форме

$$\delta A' + \delta A_{\text{н.в.э}} = dW_m + dW_k + \delta Q_{\text{Д.-Л.}}$$

Здесь $\delta A'$ — работа внешних сил в рассматриваемом процессе, $\delta A_{\text{н.в.э}}$ — работа источников электрической энергии, dW_m — изменение энергии магнитного поля, dW_k — изменение кинетической энергии тел системы, $\delta Q_{\text{Д.-Л}}$ — теплота Джоуля — Ленца (III.8.2.6°).

Примечание. Предполагается, что энергией W_e электрического поля системы можно пренебречь ввиду малости электроемкостей проводников, входящих в систему. В противном случае в правую часть написанного выше уравнения закона сохранения энергии нужно добавить член dW_e .

2°. Если тела системы перемещаются очень медленно (квазистатически), то можно пренебречь изменением кинетической энергии системы ($dW_k = 0$). Кроме того, можно считать, что $\delta A' = -\delta A$, где δA — работа сил, действующих на тела системы в магнитном поле и называемых *пондеромоторными силами*. Соответственно закон сохранения энергии (п. 1°) примет вид

$$\delta A_{\text{н.в.э}} = dW_m + \delta A + \delta Q_{\text{Д.-Л.}}$$

3°. В системе, содержащей n проводящих контуров с токами, работа источников электрической энергии за малый промежуток времени dt равна

$$\delta A_{\text{н.в.э}} = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k I_k dt,$$

где \mathcal{E}_k — алгебраическая сумма э. д. с. всех источников электрической энергии, включенных в k -й контур, I_k — сила тока в этом контуре.

Теплота Джоуля — Ленца, выделяющаяся в системе за то же время dt , равна

$$\delta Q_{\text{Д.-Л.}} = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k dt,$$

где R_k — электрическое сопротивление (III.8.2.2°) всей цепи k -го контура.

4°. **Пример 1.** неподвижный контур с током.

а) Ток в контуре постояен. В этом случае энергия магнитного поля не изменяется ($dW_m = 0$), а пондеромоторные силы работы не совершают ($\delta A = 0$), так что

$$\delta A_{\text{н.в.э}} = \delta Q_{\text{Д.-Л.}}$$

Вся работа источника электрической энергии полностью преобразуется в контуре в теплоту Джоуля — Ленца.

б) Ток в контуре нарастает от 0 до установившегося значения $I_0 = \mathcal{E}/R$ (III.13.2.6°). Работа пондеромоторных сил равна нулю и работа источника электрической энергии в контуре расходуется на изменение энергии магнитного поля и на выделение теплоты Джоуля — Ленца:

$$\delta A_{\text{н.в.э}} = dW_m + \delta Q_{\text{Д.-Л.}}$$

или

$$\mathcal{E} I dt = LI dl + I^2 R dt \quad (\text{в СИ}),$$

где \mathcal{E} — э. д. с. источника, R и L — электрическое сопротивление и индуктивность контура, I — сила тока в нем.

За промежуток времени τ , в течение которого сила тока в контуре возрастает от 0 до $I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau})$, источник совершает работу

$$A_{\text{н.в.э}} = \mathcal{E} I_0 \tau - L I_0 I \quad (\text{в СИ}).$$

За это же время в контуре выделяется теплота Джоуля — Ленца, равная

$$Q_{\text{д.-л}} = \mathcal{E} I_0 \tau - L I_0 I - \frac{1}{2} L I^2 \quad (\text{в СИ}).$$

5°. **Пример 2.** Работа пондеромоторных сил при очень медленной деформации контура с током.

Из закона сохранения энергии (п. 2°)

$$\delta A = \delta A_{\text{н.в.э}} - \delta Q_{\text{д.-л}} - dW_m.$$

Сила тока I в контуре изменяется под влиянием э. д. с. самоиндукции (III.13.2.4°):

$$I = \frac{1}{R} \left[\mathcal{E} - \frac{d}{dt} (LI) \right] \quad (\text{в СИ}),$$

где $\mathcal{E} = \text{const}$ — э. д. с. источника постоянного тока в контуре, R и L — электрическое сопротивление и индуктивность контура. Следовательно,

$$\delta A_{\text{н.в.э}} = \mathcal{E} I dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt - \frac{\mathcal{E}}{R} d(LI) \quad (\text{в СИ}).$$

При очень медленной деформации контура э. д. с. самоиндукции мала по сравнению с \mathcal{E} . Поэтому, пренебрегая малыми второго порядка малости, получим

$$\delta Q_{\text{д.-л}} = I^2 R dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt - 2 \frac{\mathcal{E}}{R} d(LI) \quad (\text{в СИ}),$$

$$dW_m = d \left(\frac{LI^2}{2} \right) = Id(LI) - \frac{I^2}{2} dL = \frac{\mathcal{E}}{R} d(LI) - \frac{\mathcal{E}^2}{2R^2} dL \quad (\text{в СИ}).$$

Таким образом, работа пондеромоторных сил

$$A = \frac{\mathcal{E}^2}{2R^2} \int_{L_1}^{L_2} dL = \frac{\Delta L I_0^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

где $\Delta L = L_2 - L_1$ — изменение индуктивности контура при его деформации; а $I_0 = \mathcal{E}/R$ — постоянный ток в контуре до и после его деформации.

Глава III.14. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

§ III.14.1. Общая характеристика теории Максвелла

1°. *Теорией Максвелла* называется последовательная теория единого электромагнитного поля (III.2.1.1°), создаваемого произвольной системой электрических зарядов и токов. В теории Максвелла решается *основная задача электродинамики*: по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются характеристики

создаваемых ими электрического и магнитного полей, Теория Максвелла явилась обобщением важнейших законов, описывающих электрические и электромагнитные явления: теоремы Остроградского — Гаусса (III.4.3.6°) и (III.10.7.2°), закона полного тока (III.12.4.4°), закона электромагнитной индукции (III.13.1.2°).

2°. Теория Максвелла имеет феноменологический характер. Это проявляется в том, что в ней не рассматривается внутренний механизм явлений, происходящих в среде и вызывающих появление электрических и магнитных полей. Среда описывается в теории Максвелла с помощью трех величин, задающих ее электрические и магнитные свойства: относительной диэлектрической проницаемости ϵ (III.4.3.5°), относительной магнитной проницаемости μ (III.12.4.5°) и удельной электрической проводимости γ (III.7.3.4°).

3°. В теории Максвелла рассматриваются макроскопические поля, которые создаются макроскопическими зарядами и токами, сосредоточенными в объемах неизмеримо больших, чем объемы атомов и молекул. Предполагается, что расстояния от источников полей до рассматриваемых точек пространства значительно превышают линейные размеры атомов и молекул. Поэтому макроскопические поля изменяются заметно лишь на расстояниях, огромных по сравнению с размерами атомов. Кроме того, периоды изменения переменных электрических и магнитных полей считаются значительно превосходящими периоды внутриатомных процессов.

4°. Макроскопические заряды и токи являются совокупностями микроскопических зарядов и токов, создающих свои электрические и магнитные *микрополя*, непрерывно изменяющиеся в каждой точке пространства с течением времени. Макроскопические поля, рассматриваемые в теории Максвелла, представляют собой *усредненные микрополя*. Усреднение микрополей производится по интервалам времени, значительно большим, чем периоды внутриатомных процессов, и по объемам полей, во много раз превосходящим объемы атомов и молекул.

5°. Теория Максвелла является *теорией близкого действия*, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия осуществляются посредством электромагнитного поля и распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в данной среде. Этот важный результат учитывается в созданной Максвеллом электромагнитной теории света.

§ III.14.2. Первое уравнение Максвелла

1°. *Первое уравнение Максвелла в интегральной форме* является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея в форме (III.13.1.6°)

$$\oint_{(\mathcal{C})} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{C})} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в СГС}).$$

Согласно Максвеллу этот закон справедлив не только для проводящего контура, но и для любого замкнутого контура, мысленно выбранного в переменном магнитном поле. Иными словами, переменное магнитное поле создает в любой точке пространства вихревое *индуцированное электрическое поле* независимо от того, находится в этой точке проводник или нет.

Если воспользоваться выражением (III.10.7.1°) для магнитного потока, то первое уравнение Максвелла можно записать в виде

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dS \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dS \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь $dS = dS \mathbf{n}$, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к малому элементу dS поверхности S , натянутой на замкнутый контур \mathcal{L} (из конца вектора \mathbf{n} обход контура \mathcal{L} виден происходящим против часовой стрелки).

2° Согласно теореме Стокса из векторного анализа

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_{(S)} \text{rot } \mathbf{E} \, dS,$$

где $\text{rot } \mathbf{E}$ — ротор вектора \mathbf{E} , который выражается в декартовых координатах следующим определителем:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Основываясь на этой теореме, можно перейти от первого уравнения Максвелла в интегральной форме (п. 1°) к первому уравнению Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{в СГС}).$$

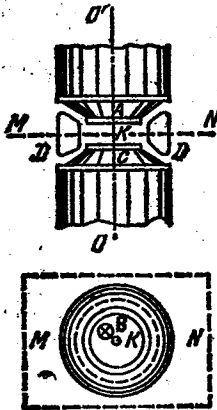


Рис. III.14.1

3°. Вихревое электрическое поле, индуцируемое переменным магнитным полем, используется в ускорителе электронов индукционного типа — бетатроне. Принципиальная схема бетатрона изображена на рис. III.14.1. A и C — конические полюсные наконечники электромагнита, а D — кольцевая вакуумная ускорительная камера. Линии напряженности (III.2.1.5°) вихревого индуцированного электрического поля лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси OO' симметрии полюсных наконечников, и имеют вид окружностей с центрами на оси OO' . Во всех точках каждой из таких окружностей вектор напряженности \mathbf{E} имеет одно и то же численное значение и направлен по касательной к окружности. Электроны движутся в ускорительной камере по круговым траекториям. Напряженность вихревого электрического поля бетатрона в точках круговой орбиты электрона радиуса r численно равна

$$E = \frac{r}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

где $\langle B \rangle$ — среднее значение в момент времени t индукции магнитного поля в пределах площади орбиты электрона.

В бетатроне, в отличие от резонансных циклических ускорителей (III.11.4.4°), не существует проблемы синхронизации. Для ускорения электрона необходимо только, чтобы он все время двигался вдоль одной и той же круговой орбиты. Сила Лоренца (III.10.1.5°) обеспечивает движение электрона в бетатроне по круговой орбите радиуса r , если выполнено условие: $B = \frac{1}{2} \dot{B}$, где B — значение магнитной индукции в точках орбиты. Для обеспечения устойчивости движения ускоряемого электрона по такой круговой орбите необходимо, чтобы магнитная индукция поля убывала с ростом расстояния r от оси OO' (рис. III.14.1) медленнее чем $1/r$.

§ III.14.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

1°. Максвелл обобщил закон полного тока (III.12.4.4°), предположив, что переменное электрическое поле, так же как и электрический ток, является источником магнитного поля. Количественной мерой магнитного действия переменного электрического поля служит ток смещения.

2°. Плотностью тока смещения называется вектор $\mathbf{j}_{\text{см}}$, равный

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СГС}),$$

где \mathbf{D} — вектор электрического смещения (III.4.3.5°).

Током смещения сквозь произвольную поверхность S называется физическая величина, равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{\text{см}} = \int_{(S)} \mathbf{j}_{\text{см}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$I_{\text{см}} = \int_{(S)} \mathbf{j}_{\text{см}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{в СГС}),$$

где $\Phi_e = \int_{(S)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ — поток вектора электрического смещения сквозь поверхность S .

Учет токов смещения приводит к тому, что цепи непостоянных токов становятся замкнутыми. Токи смещения «проходят» в тех участках, где нет проводников, например между обкладками заряжающегося или разряжающегося конденсатора. На рис. III.14.2 показаны векторы $\mathbf{j}_{\text{см}}$ и линии индукции магнитных полей токов смещения при зарядке конденсатора (III.14.2, а) и при его разрядке (III.14.2, б).

3°. Согласно (III.4.3.5°) вектор электрического смещения равен

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad (\text{в СГС}),$$

где \mathbf{P}_e — вектор поляризованности (III.4.2.3°).

Плотность тока смещения в диэлектрике:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (\text{в СГС}).$$

Вектор

$$j_{см}^{вак} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$j_{см}^{вак} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{в СГС})$$

называется *плотностью тока смещения в вакууме*.

Плотностью тока поляризации (плотностью поляризационного тока) называется вектор

$$j_{поляриз} = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Он представляет собой плотность тока, обусловленного упорядоченным перемещением связанных зарядов в диэлектрике при изменении его поляризации — смещением зарядов в молекулах неполярного диэлектрика (III.4.1.3°) или поворотом молекул-диполей в полярных диэлектриках (III.4.1.5°).

Токи смещения, в отличие от токов проводимости, не сопровождаются выделением теплоты Джоуля — Ленца (III.8.2.6°). Правда, в случае изменения поляризации полярных диэлектриков (т. е. при возникновении в них поляризационного тока) происходит поглощение или выделение теплоты. Однако закономерности этих тепловых эффектов не подчиняются закону Джоуля — Ленца.

4°. Максвелл добавил в правую часть закона полного тока (III.12.4.4°) ток смещения (п. 2°) и написал обобщенный закон полного тока в форме

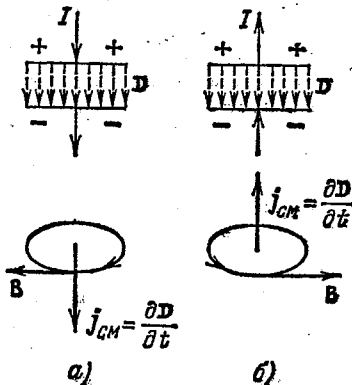


Рис. III.14.2

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{макро}} + I_{\text{см}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{макро}} + I_{\text{см}}) \quad (\text{в СГС}).$$

Это уравнение называется *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме**. Оно показывает, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру \mathcal{L} равна

алгебраической сумме макроток и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.

5°. Согласно теореме Стокса (III.14.2.2°)

$$\oint_{(\mathcal{L})} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S}.$$

*) Нумерация уравнений Максвелла условна и часто бывает обратной той, которая принята в данном справочнике.

Полный ток сквозь поверхность S , натянутую на контур \mathcal{L} :

$$I_{\text{макро}} + I_{\text{см}} = \int_{(S)} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) dS,$$

где \mathbf{j} — плотность макротока, $\mathbf{j}_{\text{см}}$ — плотность тока смещения.

Соответственно второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СГС}).$$

6°. Для областей поля, где нет макротоков ($\mathbf{j}=0$), первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме имеют симметричный вид с точностью до знаков в правых частях этих уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СГС}).$$

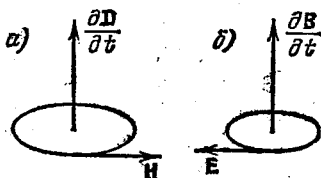


Рис. III.14.3

Различия в знаках правых частей в первом и втором уравнениях Максвелла свидетельствуют о том, что направления векторов $\partial \mathbf{D}/\partial t$ и \mathbf{H} соответствуют правойвинтовой системе (рис. III.14.3, а), а направления векторов $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и \mathbf{E} — левовинтовой системе (рис. III.14.3, б).

7°. Из уравнений Максвелла (п. 6°) следует чрезвычайно важный вывод о том, что переменные электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом, образуя единое электромагнитное поле.

Различие в знаках правых частей этих уравнений соответствует закону сохранения энергии и правилу Ленца (III.13.1.3°). Оно является необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля. Если бы знаки при $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ были одинаковы, то бесконечно малое увеличение одного из полей вызвало бы неограниченное возрастание обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей приводило бы к полному исчезновению обоих полей.

§ III.14.4. Третье и четвертое уравнения Максвелла

1°. Максвелл обобщил теорему Остроградского — Гаусса для электростатического поля (III.4.3.6°). Он предположил, что она справедлива для любого электрического поля как стационарного, так и переменного. Соответственно *третье уравнение Максвелла в интегральной форме* имеет вид

$$\oint_{(S)} \mathbf{D} dS = q_{\text{своб}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_{(S)} \mathbf{D} dS = 4\pi q_{\text{своб}} \quad (\text{в СГС}).$$

2°. Максвелл предположил также, что теорема Остроградского — Гаусса (III.10.7.2°) справедлива для любого магнитного поля. Поэтому *четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме* имеет вид

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{в СИ и СГС}).$$

3°. Согласно теореме Гаусса из векторного анализа поток произвольного вектора \mathbf{A} через любую замкнутую поверхность S равен

$$\oint_{(S)} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_{(V)} \text{div } \mathbf{A} dV.$$

Интегрирование в правой части проводится по всему объему V , ограниченному замкнутой поверхностью S , а $\text{div } \mathbf{A}$ — *дивергенция вектора \mathbf{A}* , которая выражается в декартовых координатах следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Здесь A_x, A_y, A_z — проекции вектора \mathbf{A} на оси прямоугольной декартовой системы координат.

4°. С помощью теоремы Гаусса (п. 3°) можно из интегральных уравнений (пп. 1° и 2°) получить *третье и четвертое уравнения Максвелла в дифференциальной форме*:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} = \rho & \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 & \quad (\text{в СИ}), \\ \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho & \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 & \quad (\text{в СГС}). \end{aligned}$$

Здесь $\rho = dq_{\text{своб}}/dV$ — объемная плотность свободных зарядов в рассматриваемой точке поля.

§ III.14.5. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

1°. *Полная система уравнений Максвелла* включает следующие четыре уравнения:

$$1) \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad 3) \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{в СИ}),$$

$$2) \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad 4) \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

$$1) \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad 3) \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (\text{в СГС}).$$

$$2) \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad 4) \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

2°. Если электрическое и магнитное поля стационарны, т. е. $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, то, как видно из уравнений Максвелла (п. 1°), эти поля существуют независимо друг от друга. Электрическое поле описывается двумя *уравнениями электростатики*:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} = 0 & \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho & \quad (\text{в СИ}), \\ \text{rot } \mathbf{E} = 0 & \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho & \quad (\text{в СГС}). \end{aligned}$$

Соответственно магнитное поле описывается двумя уравнениями магнито-статике:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} & \text{и} & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{(в СИ),} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} & \text{и} & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{(в СГС).} \end{aligned}$$

3°. Систему уравнений Максвелла (п. 1°) необходимо дополнять так называемыми *материальными уравнениями*, характеризующими электрические и магнитные свойства среды.

В случае изотропных несегнетоэлектрических и неферромагнитных сред и макротокков, подчиняющихся закону Ома (III.7.3.4°), эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, & \mathbf{j}_{\text{макро}} &= \gamma \mathbf{E} & \text{(в СИ),} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, & \mathbf{j}_{\text{макро}} &= \gamma \mathbf{E} & \text{(в СГС).} \end{aligned}$$

Здесь ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные (IX), ε и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды (III.4.3.5°) и (III.12.4.5°), γ — удельная электрическая проводимость (III.7.3.4°).

4°. На границе раздела сред должны выполняться следующие *граничные условия* для векторов, характеризующих электромагнитное поле:

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \sigma, & E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & B_{1n} &= B_{2n}, & H_{1\tau} - H_{2\tau} &= j_{N}^{\text{пов}}, & \text{(в СИ),} \\ D_{1n} - D_{2n} &= 4\pi\sigma, & E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & B_{1n} &= B_{2n}, & H_{1\tau} - H_{2\tau} &= \frac{4\pi}{c} j_{N}^{\text{пов}}, & \text{(в СГС).} \end{aligned}$$

Здесь σ — поверхностная плотность свободных электрических зарядов, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности раздела сред, проведенный из среды 2 в среду 1, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к поверхности раздела сред, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}]$ — единичный вектор, касательный к поверхности раздела сред и ортогональный $\boldsymbol{\tau}$, а $j_{N}^{\text{пов}}$ — вектор линейной плотности поверхностного тока проводимости. Вектор $j_{N}^{\text{пов}}$ направлен вдоль поверхности по направлению тока в ней и численно равен: $j_{N}^{\text{пов}} = dI^{\text{пов}}/dl$, где $dI^{\text{пов}}$ — сила тока проводимости, проходящего через малый участок длиной dl сечения поверхности, проведенного перпендикулярно к направлению поверхностного тока.

При заданных граничных и начальных условиях, т. е. известных значениях векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в начальный момент времени $t=0$, система уравнений Максвелла имеет единственное решение.

5°. Дальнейшим развитием теории электромагнитного поля Максвелла явилась классическая электронная теория Лоренца. Эта теория исходила из определенных модельных представлений о строении вещества: считалось, что атомы состоят из отрицательно и положительно заряженных частиц и все многообразие электрических и магнитных явлений объясняется определенным расположением, движением, взаимодействием зарядов и микротоков. В любой точке пространства существуют электрическое и магнитное микрополя с напряженностями \mathbf{e} и \mathbf{h} , которые представляют собой результат совокупного действия всех зарядов и микротоков. Микрополя подчиняются системе уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла (п. 3°). Усреднение уравнений электронной теории (III.14.1.4°) позволяет перейти к уравнениям Максвелла для макроскопических полей \mathbf{E} и \mathbf{B} (III.14.1.3°): $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \langle \mathbf{h} \rangle$.

6°. Уравнения Максвелла (п. 1°) инвариантны относительно преобразования Лоренца (1.5.3.2°). Электрические заряды частиц и тел также не зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Формулы преобразований Лоренца для векторов E , B , D и H электромагнитного поля при переходе от неподвижной инерциальной системы отсчета K к другой инерциальной системе отсчета K' , движущейся относительно K равномерно и прямолинейно вдоль положительного направления оси Ox со скоростью V , имеют следующий вид:

а) В СИ:

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E_x, & E_{y'} &= \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & E_{z'} &= \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ B_{x'} &= B_x, & B_{y'} &= \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & B_{z'} &= \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ D_{x'} &= D_x, & D_{y'} &= \frac{D_y - \frac{V}{c^2} H_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & D_{z'} &= \frac{D_z + \frac{V}{c^2} H_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ H_{x'} &= H_x, & H_{y'} &= \frac{H_y + VD_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & H_{z'} &= \frac{H_z - VD_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned}$$

б) В СГС:

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E_x, & E_{y'} &= \frac{E_y - \frac{V}{c} B_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & E_{z'} &= \frac{E_z + \frac{V}{c} B_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ B_{x'} &= B_x, & B_{y'} &= \frac{B_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & B_{z'} &= \frac{B_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ D_{x'} &= D_x, & D_{y'} &= \frac{D_y - \frac{V}{c} H_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & D_{z'} &= \frac{D_z + \frac{V}{c} H_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ H_{x'} &= H_x, & H_{y'} &= \frac{H_y + \frac{V}{c} D_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & H_{z'} &= \frac{H_z - \frac{V}{c} D_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Обратные преобразования от K' к K получаются из написанных выше путем замены всех нештрихованных величин на штрихованные и всех штрихованных величин на нештрихованные, а также замены всюду величины V на $-V$.

7°. Из преобразований Лоренца для электромагнитного поля (п. 6°) видно что одно и то же электромагнитное поле по-разному проявляется в инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга. В частности, если в системе отсчета K есть только электрическое поле $E = E_y j$, а $B = 0$, то в системе отсчета K' будут наблюдаться и электрическое и магнитное поля, векторы E' и B'

которых взаимно перпендикулярны:

$$\begin{aligned} E'_x &= 0, & E'_y &= \frac{E_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, & E'_z &= 0, \\ B'_x &= 0, & B'_y &= 0, & B'_z &= -\frac{VE_y}{c\sqrt{c^2-V^2}} \end{aligned} \quad (\text{в СИ}).$$

Наоборот, если в K нет электрического поля, а есть только магнитное поле $\mathbf{B} = B_z \mathbf{k}$, то в K' опять-таки будут наблюдаться и магнитное и электрическое поля, векторы \mathbf{B}' и \mathbf{E}' которых взаимно перпендикулярны:

$$\begin{aligned} B'_{x'} &= 0, & B'_{y'} &= 0, & B'_{z'} &= \frac{B_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ E'_{x'} &= 0, & E'_{y'} &= -\frac{VB_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, & E'_{z'} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{в СИ}).$$

8°. Из преобразований п. 6° следует, что скалярные произведения векторов \mathbf{E}' и \mathbf{B}' , а также \mathbf{H}' и \mathbf{D}' инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета K' :

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}' \cdot \mathbf{D}' = \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}.$$

Точно так же инвариантны следующие выражения:

$$E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2 \quad \text{и} \quad D'^2 - \frac{H'^2}{c^2} = D^2 - \frac{H^2}{c^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2 \quad \text{и} \quad D'^2 - H'^2 = D^2 - H^2 \quad (\text{в СГС}).$$

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Глава IV.1. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ IV.1.1. Гармонические колебания

1°. *Колебаниями* называются процессы (движения или изменения состояния), в той или иной степени повторяющиеся во времени. В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают: *механические колебания* (колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, зданий, мостов и др. сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука, качка корабля, волнение моря и т. п.); *электромагнитные* (колебания переменного электрического тока в цепи, колебания векторов E и B электрической напряженности и магнитной индукции переменного электромагнитного поля и т. д.); *электрохимические* (колебания мембраны телефона, диффузора электродинамического громкоговорителя и т. п.) и др.

Система, совершающая колебания, называется *колебательной системой*. *Свободными колебаниями (собственными колебаниями)* называются колебания, которые происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникают вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия. *Вынужденными колебаниями* называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия (например, колебания силы тока в электрической цепи, вызываемые переменной э. д. с.; колебания маятника, вызываемые переменной внешней силой).

2°. Колебания называются *периодическими*, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T , удовлетворяющий этому условию, называется *периодом колебаний*. За период колебаний T система совершает одно *полное колебание*. *Частотой периодических колебаний* называется величина $\nu = 1/T$, равная числу полных колебаний, совершающихся за единицу времени. *Циклической, или круговой, частотой периодических колебаний* называется величина $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π единиц времени. В электротехнике $\omega = 2\pi\nu$ называют *угловой частотой*.

3°. При периодических колебаниях зависимость колеблющейся величины s от времени t удовлетворяет условию $s(t+T) = s(t)$.

Периодические колебания величины $s(t)$ называются *гармоническими колебаниями*, если

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где $\omega = 2\pi\nu = (2\pi/T) = \text{const}$ — *циклическая, или круговая, частота гармонических колебаний*, $A = s_{\text{макс}} = \text{const} > 0$ — *максимальное значение колеблющейся величины s , называемое амплитудой колебаний*, φ_0 и $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2$ — *постоянные ве-*

личины. Значение s в произвольный момент времени t определяется значением фазы колебаний $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$ (соответственно $\Phi_1(t) = \omega t + \varphi_1$). Величины φ_0 и φ_1 представляют собой начальные фазы колебаний, т. е. значения $\Phi(t)$ и $\Phi_1(t)$ в момент ($t=0$) начала отсчета времени: $\varphi_0 = \Phi(0)$ и $\varphi_1 = \Phi_1(0)$.

4°. Первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины $s(t)$ также совершают гармонические колебания той же циклической частоты:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi),$$

причем амплитуды ds/dt и d^2s/dt^2 соответственно равны $A\omega$ и $A\omega^2$. Начальная фаза ds/dt равна $(\varphi_0 + \pi/2)$, т. е. разность фаз колебаний ds/dt и s постоянна и равна $\pi/2$ (величина ds/dt опережает s по фазе на $\pi/2$). Начальная фаза d^2s/dt^2 равна $(\varphi_0 + \pi)$,

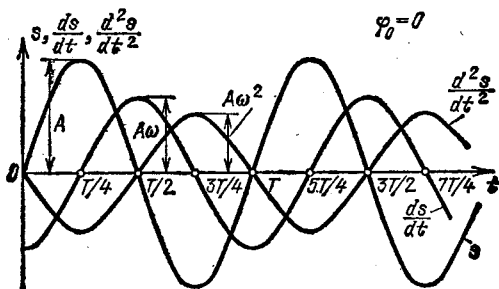


Рис. IV.1.1

т. е. разность фаз колебаний d^2s/dt^2 и s постоянна и равна π (величина d^2s/dt^2 опережает s по фазе на π). Графики зависимости от времени t величин s , ds/dt и d^2s/dt^2 при гармонических колебаниях для случая $\varphi_0 = 0$ показаны на рис. IV.1.1.

5°. Из второго соотношения п. 4° видно, что гармонически колеблющаяся величина s удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$s = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t,$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные интегрирования. Значения A_1 и A_2 можно найти из начальных условий, т. е. зная значения s и ds/dt в начальный момент времени ($t=0$):

$$A_1 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=0} \quad \text{и} \quad A_2 = s(0).$$

Общее решение можно привести к стандартному виду гармонических колебаний (п. 3°):

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ и $\varphi_0 = \arctg(A_2/A_1)$.

Таким образом, величина s совершает гармонические колебания в том и только в том случае, если она удовлетворяет написанному выше дифференциальному уравнению, называемому поэтому *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

6°. Гармонические колебания можно изобразить графически в виде вектора на плоскости. Для этого из начала координат O на плоскости проводят вектор A (рис. IV.1.2), модуль которого равен амплитуде A рассматриваемых колебаний и составляет с осью координат OX угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$, равный фазе колебаний в данный момент времени t . С течением времени t угол φ увеличивается так, что вектор A равномерно вращается вокруг точки O с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний ω . Соответственно проекция вектора A на вертикальную ось OY совершает гармонические колебания по закону:

$$A_y = s = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

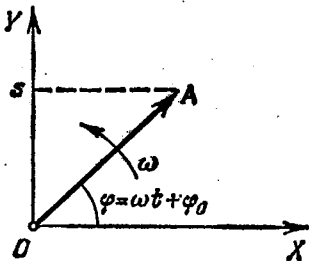


Рис. IV.1.2

Графическое изображение гармонических колебаний посредством вращающегося вектора амплитуды называется *методом векторных диаграмм*. Им широко пользуются, например, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний (IV.1.4.2°).

7°. Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Поэтому гармонические колебания $s = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$, где $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2$, можно записать в экспоненциальной форме:

$$\tilde{s} = \tilde{A} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi_1)},$$

где $\tilde{A} = A e^{i\varphi_1}$ — комплексная амплитуда. Физический смысл имеет только действительная часть комплексной функции \tilde{s} , обозначаемая $\text{Re } \tilde{s}$:

$$\text{Re } \tilde{s} = s = A \cos(\omega t + \varphi_1) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \text{где } \varphi_0 = \varphi_1 + \pi/2.$$

§ IV.1.2. Механические гармонические колебания

1°. Если материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат OX около положения равновесия, принятого за начало координат, то зависимость координаты x точки от времени t имеет вид (IV.1.1.3°), где $s = x$:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Проекции скорости v и ускорения a точки на ось OX равны:

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{и} \quad a_x = -a_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $v_0 = A\omega$ — амплитуда скорости, $a_0 = A\omega^2 = v_0\omega$ — амплитуда ускорения.

Сила F , действующая на материальную точку, равна:

$$F = ma \quad \text{и} \quad F_x = -m\omega^2 x,$$

где m — масса материальной точки. Следовательно, сила F пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону:

$$F = -m\omega^2 x i,$$

где i — орт оси OX .

Такая зависимость силы от смещения характерна для упругой силы (I.3.3.6°). Поэтому силы иной физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называются *квазиупругими силами*.

2°. *Кинетическая энергия* материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

или

$$W_k = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)].$$

Кинетическая энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до $m\omega^2 A^2/2$, совершая гармонические колебания с циклической частотой 2ω и амплитудой $m\omega^2 A^2/4$ около среднего значения, равного $m\omega^2 A^2/4$.

Потенциальная энергия материальной точки, гармонически колеблющейся под действием квазиупругой силы, равна

$$W_{II} = - \int_0^x F_x dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

или

$$W_{II} = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_0)] = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0 + \pi)].$$

Потенциальная энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до $m\omega^2 A^2/2$, совершая гармонические колебания с циклической частотой 2ω и

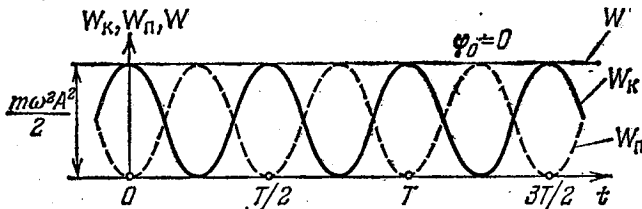


Рис. IV.1.3

амплитудой $m\omega^2 A^2/4$ около среднего значения, равного $m\omega^2 A^2/4$. Колебания потенциальной и кинетической энергии совершаются со сдвигом по фазе на π , так что полная механическая энергия материальной точки не изменяется при колебаниях:

$$W = W_k + W_{II} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \text{const.}$$

Графики зависимости W_k , W_{II} и W от времени t для случая $\varphi_0 = 0$ показаны на рис. IV.1.3.

3°. **Пример 1. Линейный гармонический осциллятор** — материальная точка массы m , совершающая прямолинейные гармонические колебания под действием упругой силы $F_{\text{упр}} = -kx$ (I.3.3.6°). Примером такой системы может служить *пружинный маятник* — груз массы m , подвешенный на абсолютно упругой пружине (k — коэффициент, характеризующий упругие свойства пружины). Уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Из IV.1.1.5° следует, что осциллятор (пружинный маятник) совершает гармонические колебания по закону $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ с циклической частотой ω и периодом T , равными:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}.$$

4°. **Пример 2. Физический маятник** — твердое тело, имеющее возможность качаться под действием его силы тяжести mg вокруг неподвижной горизонтальной оси O , не проходящей через центр тяжести тела (рис. IV.1.4) и называемой *осью качания маятника*. Центр тяжести маятника совпадает с его центром инерции C (I.7.3.2°). Точка O пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр тяжести маятника и перпендикулярной к оси качания, называется *точкой подвеса маятника*.

В отсутствие сил трения в подвесе уравнение движения маятника имеет вид (I.4.3.4°):

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgd \sin \alpha,$$

где α — угол поворота маятника вокруг оси качания из положения равновесия, $d = OC$ — расстояние от центра инерции маятника до оси качания, J — момент инерции маятника относительно той же оси (I.4.2.1°), m — масса маятника, g — ускорение свободного падения. При малых колебаниях маятника $\sin \alpha \approx \alpha$ и уравнение движения маятника имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \alpha = 0,$$

т. е. угол α удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний (IV.1.1.5°). Таким образом, в отсутствие трения малые колебания физического маятника являются гармоническими:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где α_0 — амплитуда колебаний угла α , а

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

— циклическая частота и период малых колебаний физического маятника.

5°. **Пример 3.** *Математический маятник* — материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Математический маятник представляет собой предельный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре инерции, так что $d=l$ — длина математического маятника. Момент инерции такого маятника относительно оси качания $J=ml^2$. Соответственно, циклическая частота и период малых колебаний математического маятника равны:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Малые колебания физического и математического маятников являются примерами *изохронных колебаний*, т. е. колебаний, частоты и периоды которых не зависят от амплитуд.

В общем случае период колебаний физического маятника зависит от его амплитуды α_0 :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right].$$

Изменение значения T при увеличении α_0 до 15° не превосходит 0,5%.

6°. *Приведенной длиной физического маятника* $l_{\text{пр}}$ называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{md} = d + \frac{J_C}{md} > d,$$

где J_C — момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через центр инерции C маятника и параллельной его оси качания. Точка O_1 , лежащая на прямой OC на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса маятника O (рис. IV.1.4), называется *центром качания физического маятника*. Центр качания O_1 и точка подвеса O обладают свойством взаимности: если маятник подвесить так, чтобы его ось качаний проходила через точку O_1 , то точка O будет совпадать с новым

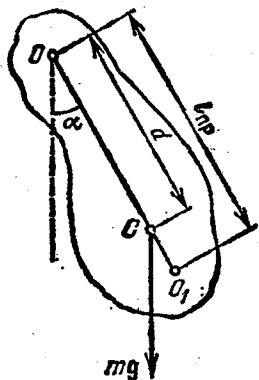


Рис. IV.1.4

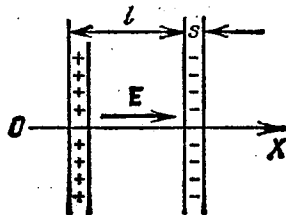


Рис. IV.1.5

положением центра качания маятника, т. е. приведенная длина и период колебаний маятника останутся прежними.

7°. **Пример 4.** *Малые свободные колебания электронов в плазме* (III.9.5.1°). Эти колебания, называемые *ленгмюровскими колебаниями плазмы*, вызываются силами электрического поля, которое возникает в электронейтральной плазме при каком-либо случайном отклонении пространственного распределения электронов

от равновесного. Например, если в плоском слое плазмы толщиной l (рис. IV.1.5) электроны смещаются на малое расстояние s вдоль положительного направления оси OX , то в левой части слоя возникает избыточный положительный заряд, а в правой — отрицательный. Соответственно возникает электрическое поле, напряженность E которого направлена вдоль оси OX , а проекция на эту ось $E_x = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} s$, где n_0 — концентрация электронов в плазме, e — абсолютная величина заряда электрона, ϵ_0 — электрическая постоянная. По второму закону Ньютона уравнение движения электронов плазмы в этом электрическом поле имеет вид:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -e E_x = -\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} s \quad \text{или} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} s = 0,$$

где m — масса электрона. Таким образом, электроны плазмы совершают свободные гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = e \sqrt{\frac{n_0}{m \epsilon_0}},$$

называемой *плазменной*, или *ленгмюровской*, частотой.

§ IV.1.3. Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший *колебательный контур* (рис. IV.1.6), состоящий из конденсатора емкостью C и соединенной с ним последовательно катушки индуктивностью L . При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке. Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Поэтому, если линейные размеры контура l не слишком велики ($l \ll \frac{c}{\nu}$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с —

скорость света в вакууме, ν — частота колебаний в контуре), то можно считать, что в каждый момент времени t сила тока I во всех частях контура одинакова. Такой переменный ток называется *квазистационарным*. По закону Ома (III.8.2.3°) для участка цепи $l - L - 2$ (рис. IV.1.6)

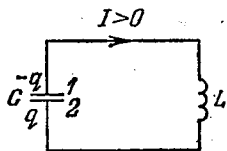


Рис. IV.1.6

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_c \quad \text{или} \quad IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}.$$

Здесь q и $\varphi_1 - \varphi_2 = -(q/C)$ — заряд конденсатора и разность потенциалов его обкладок в рассматриваемый произвольный момент времени t , R — электрическое сопротивление колебательного контура, т. е. участка цепи $l - L - 2$, $\mathcal{E}_c = -L(dI/dt)$ — э. д. с. самоиндукции в катушке (III.13.2.4°). Из закона сохранения электрического заряда (III.1.1.3°) следует, что сила квазистационарного тока в контуре $I = dq/dt$. Поэтому дифференциальное уравнение колебаний заряда q

имеет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

2°. Свободные электрические колебания в колебательном контуре являются гармоническими, если его электрическое сопротивление $R=0$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Циклическая частота ω и период T этих колебаний удовлетворяют формуле Томсона:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Заряд q конденсатора и сила тока I в контуре изменяются по законам:

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{и} \quad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

где q_0 — амплитуда заряда конденсатора, $I_0 = \omega q_0 = q_0/\sqrt{LC}$ — амплитуда силы тока, φ_0 — начальная фаза колебаний заряда конденсатора. Ток в контуре опережает по фазе заряд конденсатора на $\pi/2$.

Разность потенциалов обкладок конденсатора $u = \varphi_2 - \varphi_1$ также изменяется по гармоническому закону и совпадает по фазе с зарядом q :

$$u = \frac{q}{C} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $U_0 = q_0/C$ — амплитуда разности потенциалов. Амплитуда тока

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Величина $\sqrt{L/C}$ называется волновым сопротивлением колебательного контура.

3°. При свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре происходит периодическое преобразование энергии W_e электрического поля конденсатора в энергию W_m магнитного поля катушки индуктивности и наоборот:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{q_0^2}{4C} [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_0)],$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{LI_0^2}{4} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)].$$

Поэтому колебания, происходящие в электрическом колебательном контуре, часто называют электромагнитными колебаниями в контуре.

Значения W_e и W_m изменяются при гармонических электромагнитных колебаниях в пределах от 0 до максимальных значений, соответственно равных $q_0^2/2C$ и $LI_0^2/2$, причем $q_0^2/2C = LI_0^2/2$. Колебания W_e и W_m сдвинуты по фазе: в те моменты времени, когда $W_e = 0$, $W_m = W_{m \text{ макс}} = LI_0^2/2$ и, наоборот, когда $W_m = 0$, $W_e = W_{e \text{ макс}} = q_0^2/2C$. Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре не изменяется с течением времени:

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = \text{const.}$$

§ IV.1.4. Сложение гармонических колебаний

1°. Под *сложением колебаний* понимают нахождение закона результирующих колебаний системы в тех случаях, когда эта система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах. Различают два предельных случая — сложение колебаний одинакового направления и сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Первый случай соответствует, например, колебаниям грузика 1 (рис. IV.1.7), который колеблется относительно грузика 2 на пружине a и вместе с ним на пружине b . Этот же случай реализуется при наложении колебаний скалярных физических характеристик колебательной системы (давления, температуры, плотности, электрического заряда, тока и т. п.).

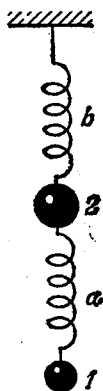


Рис. IV.1.7

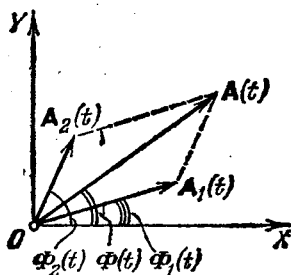


Рис. IV.1.8

2°. Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний $s_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \Phi_1)$ и $s_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \Phi_2)$ можно произвести, воспользовавшись методом векторных диаграмм (IV.1.1.6°). На рис. IV.1.8 показаны векторы $A_1(t)$ и $A_2(t)$ амплитуд соответственно первого и второго колебаний в произвольный момент времени t , когда фазы этих колебаний равны: $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \Phi_1$ и $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \Phi_2$. Результирующим колебаниям $s = s_1 + s_2$ соответствует вектор $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, проекция которого на вертикальную ось OY равна s :

$$s = A(t) \sin \Phi(t).$$

По теореме косинусов

$$[A(t)]^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)],$$

а

$$\operatorname{tg} \Phi(t) = \frac{A_1 \sin \Phi_1(t) + A_2 \sin \Phi_2(t)}{A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_2(t)}.$$

3°. Два гармонических колебания s_1 и s_2 называются *когерентными*, если разность их фаз не зависит от времени:

$$\frac{d}{dt} [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)] \equiv 0 \quad \text{и} \quad \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \text{const.}$$

Поскольку $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\Phi_2 - \Phi_1)$, то циклические частоты когерентных колебаний должны быть одинаковы, т. е. $\omega_2 = \omega_1 = \omega$. В любой момент времени разность фаз когерентных колебаний равна разности их начальных фаз: $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \Phi_2 - \Phi_1$. Соответственно результирующие колебания — гармониче-

ские с той же циклической частотой ω , т. е.

$$s = s_1 + s_2 = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

В зависимости от значения разности начальных фаз складываемых колебаний амплитуда A результирующих колебаний изменяется в пределах

$$\begin{aligned} \text{от } A &= |A_1 - A_2| \text{ при } \varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m + 1)\pi \\ \text{до } A &= A_1 + A_2 \text{ при } \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi, \end{aligned}$$

где $m=0, 1, 2, \dots$ — любое целое неотрицательное число. Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, то говорят, что складываемые колебания *синфазны* (находятся в одной фазе), а при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m + 1)\pi$, говорят, что складываемые колебания находятся в *противофазе*.

4°. Гармонические колебания, частоты которых различны ($\omega_2 \neq \omega_1$), *некогерентны*, так как разность их фаз, равная $(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$, непрерывно изменяется с течением времени. При наложении таких колебаний получаются негармонические результирующие колебания. Векторы амплитуд A_1 и A_2 складываемых колебаний (рис. IV.1.8) вращаются с разными угловыми скоростями, так что построенный на них параллелограмм непрерывно деформируется, а его диагональ — вектор A результирующих колебаний — изменяется по длине и вращается с переменной угловой скоростью.

Два гармонических колебания с различными циклическими частотами ω_1 и ω_2 можно приближенно считать когерентными лишь в течение промежутка времени Δt , за который разность фаз этих колебаний изменяется незначительно: $|\omega_2 - \omega_1| \Delta t \ll 2\pi$, или $\Delta t \ll \tau_{\text{ког}}$, где $\tau_{\text{ког}} = 2\pi / |\omega_2 - \omega_1|$ — *время когерентности* рассматриваемых колебаний.

5°. Негармонические колебания, получающиеся в результате наложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами ($|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1$), называются *биениями*. В этом случае за начало отсчета времени t целесообразно принять тот момент, когда фазы обоих складываемых колебаний s_1 и s_2 совпадают и равны φ_0 . Тогда $s_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ и $s_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0) = A_2 \sin[\omega_1 t + \varphi_0 + \varphi(t)]$, где $\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t$. Результирующие колебания $s = s_1 + s_2$ удовлетворяют соотношению

$$s = A(t) \sin[\omega_1 t + \varphi_0 + \psi(t)],$$

где

$$[A(t)]^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi(t)$$

и

$$\operatorname{tg} \psi(t) = \frac{A_2 \sin \varphi(t)}{A_1 + A_2 \cos \varphi(t)}.$$

В частности, если $A_1 = A_2 = A_0$, то

$$A(t) = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \quad \text{и} \quad \psi(t) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t,$$

так что

$$s = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0 \right).$$

Величина $|A(t)|$, характеризующая размах колебаний при биениях, изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$ с циклической частотой $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$, называемой *циклической частотой биений*. Поскольку частота биений во много раз меньше частоты колебаний ($\Omega \ll \omega_1$), переменную величину $|A(t)|$ условно называют *амплитудой биений*. *Период биений T_6 и частота биений ν_6 равны:*

$$T_6 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{1}{|1/T_2 - 1/T_1|}$$

и

$$\nu_6 = \frac{1}{T_6} = |\nu_2 - \nu_1|,$$

где T_1, ν_1 и T_2, ν_2 — периоды и частоты складываемых колебаний. Характер зависимости s от времени t при биениях показан на рис. IV.1.9 (для случая $A_1 = A_2 = A_0$).

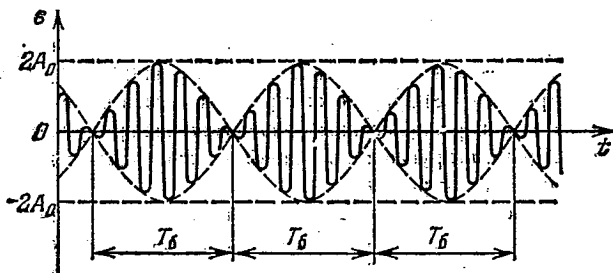


Рис. IV.1.9

6°. В результате сложения гармонических колебаний, совпадающих по направлению и имеющих кратные циклические частоты $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т. д., получаются периодические негармонические колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$. В свою очередь, любое сложное периодическое колебание $s = f(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными *основной циклической частоте* $\omega = 2\pi/T$, где T — период колебания:

$$s = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется *разложением этой функции в ряд Фурье*, или *гармоническим анализом сложного периодического колебания*. Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω , 2ω , 3ω и т. д., называются *первой*, или *основной*, *второй*, *третьей* и т. д. *гармониками* сложного периодического колебания $s = f(t)$. Совокупность этих гармоник образует *спектр колебания* $s = f(t)$. Состав спектра зависит от вида периодической функции $f(t)$. В простейших случаях спектр может состоять из небольшого числа гармоник.

Часто под спектром колебания понимают *спектр его частот*, т. е. совокупность частот простых гармонических колебаний, в результате сложения которых может быть получено рассматриваемое сложное колебание. Периодические колебания имеют *дискретные (линейчатые) спектры частот*.

7°. *Непериодические колебания*, как правило, имеют *непрерывный (сплошной) спектр частот*, т. е. их можно представить как результат наложения множества гармонических колебаний, частоты которых принимают все возможные значения в некотором интервале (в общем случае от 0 до ∞). Гармонический анализ таких колебаний состоит в представлении их в виде *интеграла Фурье*:

$$s = f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi.$$

Некоторые непериодические колебания, называемые *почти периодическими (квазипериодическими)*, имеют линейчатый спектр частот. Однако входящие в него циклические частоты несоизмеримы между собой, т. е. их отношения выражаются иррациональными числами.

8. *Модуляцией колебаний* называется изменение по определенному закону какого-либо из параметров периодических колебаний (например, амплитуды или частоты), осуществляемое за время, значительно большее, чем период колебаний.

Например, при *амплитудной модуляции* гармонических колебаний $s = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ модулированные колебания имеют вид:

$$s = A_0 [1 + b(t)] \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $|b(t)| < 1$.

Если амплитудная модуляция осуществляется по гармоническому закону $b(t) = b_0 \cos \Omega t$, где $b_0 = \text{const}$ и $\Omega \ll \omega_0$, то

$$s = A_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Это модулированное колебание имеет линейчатый спектр частот, так как может быть представлено в виде суммы трех гармонических колебаний с циклическими частотами ω_0 , $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ и амплитудами, соответственно равными

A_0 , $A_0 b_0/2$ и $A_0 b_0/2t$

$$A_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) \sin (\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \sin (\omega_0 t + \varphi_0) + \\ + \frac{A_0 b_0}{2} \{ \sin [(\omega_0 + \Omega) t + \varphi_0] + \sin [(\omega_0 - \Omega) t + \varphi_0] \}.$$

При частотной модуляции гармонических колебаний $s = A_0 \sin (\omega_0 t + \varphi_0)$, осуществляемой по гармоническому закону, модулированные колебания имеют вид:

$$s = A_0 \sin [\omega_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) t + \varphi_0], \text{ где } b_0 < 1 \text{ и } \Omega \ll \omega_0.$$

Соответственно при фазовой модуляции изменяется начальная фаза колебаний:

$$s = A_0 \sin [\omega_0 t + \Delta\varphi \cos \Omega t], \text{ где } \Omega \ll \omega_0.$$

В общем случае колебания могут быть модулированы одновременно и по амплитуде, и по фазе (или частоте). Примером так модулированных колебаний могут служить биения (п. 4°).

9°. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной частоты. Пусть точка M одновременно колеблется вдоль осей координат OX и OY по законам: $x = A_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$ и $y = A_2 \sin (\omega t + \varphi_2)$, где x и y — декартовы координаты точки M . Уравнение траектории результирующего движения точки M в плоскости XOY можно найти, исключив из выражений для x и y параметр t ,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Траектория имеет форму эллипса (рис. IV.1.10), причем точка M описывает этот эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний $T = 2\pi/\omega$. Поэтому результирующее движение точки M называют эллиптически поляризованными колебаниями.

Ориентация в плоскости XOY осей эллипса, а также его размеры зависят от амплитуд A_1 и A_2 складываемых колебаний и разности их начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$.

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\pi/2$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то оси эллипса совпадают с осями координат OX и OY , а размеры его полуосей равны амплитудам A_1 и A_2 :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Если, кроме того, $A_1 = A_2$, то траектория точки M представляет собой окружность. Такое результирующее движение точки M называют циркулярно поляризованными колебаниями, или колебаниями, поляризованными по кругу.

В тех случаях, когда $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$y = \pm \frac{A_2}{A_1} x.$$

Знак плюс соответствует четным значениям m , т. е. сложению синфазных колебаний (рис. IV.1.11, а), а знак минус — нечетным значениям m , т. е.

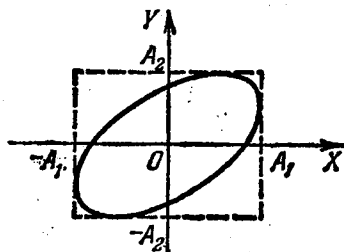


Рис. IV.1.10

сложению колебаний, происходящих в противофазе (рис. IV.1.11, б). В этих случаях точка M совершает *линейно поляризованные колебания*. Она гармонически колеблется с частотой складываемых колебаний и амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ вдоль прямой линии, составляющей с осью OX угол $\alpha = \text{arctg} \left(\frac{A_2}{A_1} \cos m\pi \right)$.

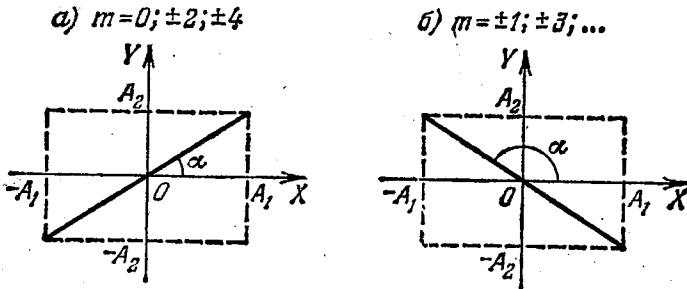


Рис. IV.1.11

10°. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с циклическими частотами $p\omega$ и $q\omega$, где p и q — целые числа:

$$x = A_1 \sin(p\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad y = A_2 \sin(q\omega t + \varphi_2).$$

Значения координат x и y колеблющейся точки M одновременно повторяются

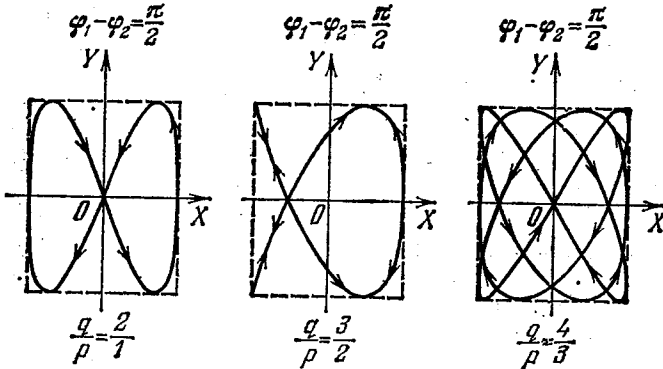


Рис. IV.1.12

через одинаковые промежутки времени T_0 , равные общему наименьшему кратному $T_1 = 2\pi/p\omega$ и $T_2 = 2\pi/q\omega$ — периодов колебаний вдоль осей OX и OY . Поэтому траектория точки M — замкнутая кривая, форма которой зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний. Такие замкнутые траектории точки M , одновременно совершающей гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, называются *фигурами Лиссажу*. Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат OX и OY и расположены по обе стороны от них на расстояниях, соответственно равных A_1

и A_1 . Отношение частот $p\omega$ и $q\omega$ складываемых колебаний равно отношению числа касаний соответствующей им фигуры Лиссажу со стороны прямоугольника, параллельной оси OY , и со стороной, параллельной оси OX . На рис. IV.1.12 показан вид фигур Лиссажу при трех различных значениях отношения q/p (2 : 1, 3 : 2 и 4 : 3) и разности начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$.

Г л а в а IV.2. ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ IV.2.1. Затухающие колебания

1°. *Затуханием колебаний* называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой. Свободные колебания реальных систем всегда затухают. Затухание свободных механических колебаний вызывается главным образом трением и возбуждением в окружающей среде упругих волн (IV.3.1.3°). Затухание в электрических колебательных системах вызывается тепловыми потерями в проводниках, образующих систему или находящихся в ее переменном электрическом поле, потерями энергии на излучение электромагнитных волн (IV.4.1.1°), а также тепловыми потерями в диэлектриках и ферромагнетиках вследствие электрического и магнитного гистерезиса (III.4.5.3°; III.12.5.2°).

Закон затухания колебаний зависит от свойств колебательной системы. Система называется *линейной*, если параметры, характеризующие существенные в рассматриваемом процессе физические свойства системы, не изменяются в ходе процесса. Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями. Например, пружинный маятник (IV.1.2.3°), движущийся в вязкой среде, представляет собой линейную систему, если коэффициент сопротивления среды и упругость пружины не зависят от скорости и смещения маятника. Электрический колебательный контур (IV.1.3.1°) можно считать линейной системой, если его электрическое сопротивление R , емкость C и индуктивность L не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения. В большинстве случаев реальные колебательные системы достаточно близки по своим свойствам к линейным.

2°. *Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний* линейной системы имеет вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

Здесь s — изменяющаяся при колебаниях физическая характеристика системы, $\beta = \text{const} > 0$ — коэффициент затухания, а ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же системы, т. е. в отсутствие потерь энергии (при $\beta = 0$).

Пример 1. *Свободные затухающие колебания пружинного маятника* (IV.1.2.3°). На маятник массы m , совершающий прямолинейные колебания вдоль оси OX под влиянием силы упругости пружины, действует также сила сопротивления $F_{\text{сопр}} = -bv$, где v — скорость маятника, а $b = \text{const} > 0$ — коэффициент сопротивления. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

маятника

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\beta = b/2m$ и $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Пример 2. *Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре.* Электрическое сопротивление реального контура $R \neq 0$, и дифференциальное уравнение колебаний в контуре имеет вид (IV.1.3.1°):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\beta = R/2L$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

3°. Если затухание не слишком велико ($\beta < \omega_0$), то зависимость s от t , удовлетворяющая уравнению затухающих колебаний (п. 2°), имеет вид:

$$s = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi_0).$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а постоянные величины A_0 и ψ_0 зависят от начальных условий, т. е. от значений s и ds/dt в начальный момент времени ($t=0$). График зависимости s от t при $\psi_0=0$ показан на рис. IV.2.1.

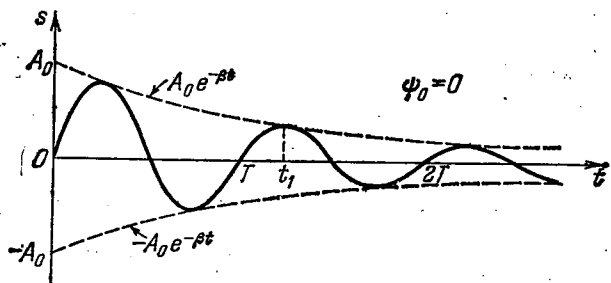


Рис. IV.2.1

Затухающие колебания не являются периодическими (IV.1.1.2°). Например, максимальное значение колеблющейся величины s , достигаемое в некоторый момент времени t_1 , в последующем (при $t > t_1$) никогда не повторяется. Однако при затухающих колебаниях величина s обращается в нуль, изменяясь в одну и ту же сторону (например, убывая), а также достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Поэтому величины T и ω условно называют *периодом (условным периодом)* и *циклической частотой (условной циклической частотой) затухающих колебаний*.

Величина

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

называется *амплитудой затухающих колебаний*, соответственно A_0 — *начальной амплитудой*. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β .

Промежуток времени $\tau=1/\beta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется *временем релаксации*.

4°. *Логарифмическим декрементом затухания* называется безразмерная величина δ , равная натуральному логарифму отношения значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t+T$ (T — условный период колебаний),

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где N — число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

Связь между циклической частотой ω затухающих колебаний системы и логарифмическим декрементом затухания δ :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}.$$

5°. *Добротностью колебательной системы* называется безразмерная физическая величина Q , равная произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебаний системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t+T$, т. е. за один условный период затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Поскольку энергия $W(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды колебаний $A(t)$,

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}.$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания δ добротность колебательной системы $Q = \pi/\delta$. При этом условный период затухающих колебаний T практически равен периоду T_0 свободных незатухающих колебаний, так что $Q = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$. Например, добротность электрического колебательного

контура (IV.1.3.1°) $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, а добротность пружинного маятника (IV.2.1.2°) $Q = \frac{1}{b} \sqrt{kt}$.

6°. При увеличении коэффициента затухания β условный период затухающих колебаний возрастает и обращается в бесконечность при $\beta = \omega_0$. Если $\beta > \omega_0$, то дифференциальное уравнение движения системы

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

имеет следующее общее решение:

$$s = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где $\alpha_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ и $\alpha_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, а C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий. Если начальные значения (в момент

времени $t=0$) равны: $s=s_0$ и $\frac{ds}{dt}=v_0$, то

$$C_1 = -\frac{\alpha_2 s_0 + v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\alpha_1 s_0 + v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Такое движение системы не имеет колебательного характера и называется *апериодическим*. В зависимости от начальных условий возможны два типа апериодического движения системы (рис. IV.2.2). Движение типа *a* осуществляется в тех случаях, когда s_0 и v_0 противоположны по знаку и $|v_0| > |\alpha_1| s_0$. Во всех остальных случаях осуществляется движение типа *b*.

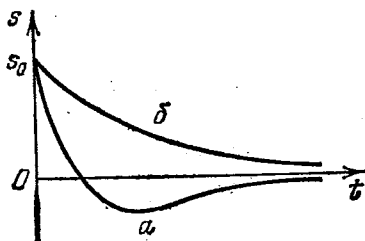


Рис. IV.2.2

§ IV.2.2. Вынужденные механические колебания

1°. Переменная внешняя сила, приложенная к системе и вызывающая ее вынужденные механические колебания, называется *вынуждающей*, или *возмущающей*, силой.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний простейшей линейной системы (IV.2.1.1°) — пружинного маятника (IV.2.1.2°), — происходящих вдоль оси *OX* под влиянием переменной внешней силы $F(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Если $F_x(t)$ — периодическая функция времени, то после приложения этой силы к маятнику вначале возникает *переходный режим вынужденных колебаний*. Маятник одновременно участвует в двух колебаниях:

$$x = x_1(t) + x_2(t).$$

Первый член соответствует свободным затухающим колебаниям *) маятника (IV.2.1.3°):

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Второй член соответствует незатухающим периодическим колебаниям маятника с частотой, равной частоте возмущающей силы $F_x(t)$.

Амплитудное значение $x_1(t)$, равное $A_0 e^{-\beta t}$, более или менее быстро уменьшается после начала вынужденных колебаний: за время $\tau_0 = 4,6/\beta$ амплитуда $x_1(t)$ уменьшается в 100 раз. Следовательно, через некоторое время t после начала колебаний ($t \sim \tau_0$) свободные колебания маятника практически прекращаются: $x(t) \approx x_2(t)$. Маятник переходит в состояние *установившихся вынужденных колебаний*, совершающихся с частотой возмущающей силы.

*) Предполагается, что $\beta < \omega_0$. В противном случае свободное движение маятника будет апериодическим (IV.2.1.6°), т. е.

$$x_1(t) = C_1 \exp[-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t] + C_2 \exp[-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t].$$

2°. Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону, т. е. $F_x = F_0 \cos \Omega t$, то установившиеся вынужденные колебания маятника также гармонические с той же частотой:

$$x = A \cos (\Omega t + \varphi_0).$$

Амплитуда этих колебаний A и сдвиг фаз φ_0 между смещением и возмущающей силой зависят от соотношения между циклическими частотами вынужденных колебаний Ω и свободных незатухающих колебаний маятника ω_0 :

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

При $\Omega = 0$ получим $\varphi_0(0) = 0$ и $A(0) = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ — статическое смещение

маятника из положения равновесия под действием постоянной силы $F_x = F_0$. При $\Omega \rightarrow \infty$ амплитуда $A(\Omega) \rightarrow 0$ и $\text{tg } \varphi_0 \rightarrow 0$, а $\varphi_0 \rightarrow -\pi$. Графики зависимости $A(\Omega)$ и $\varphi_0(\Omega)$ при различных значениях коэффициента затухания β показаны на рис. IV.2.3 и рис. IV.2.4.

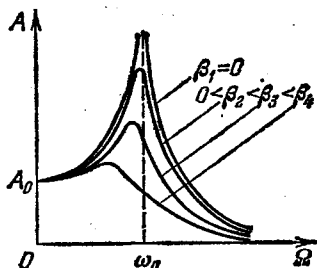


Рис. IV.2.3

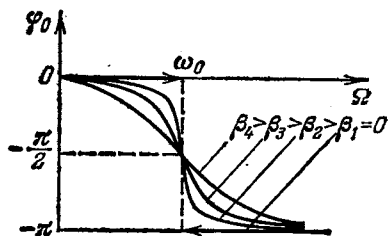


Рис. IV.2.4

3°. Амплитуда смещения в случае установившихся вынужденных гармонических колебаний маятника достигает максимума при циклической частоте колебаний

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2},$$

где ω — циклическая частота свободных затухающих колебаний маятника (IV.2.1.3°). Частота Ω_p называется *резонансной*.

Максимальная амплитуда

$$A_{\text{макс}} = A(\Omega_p) = \frac{F_0}{2m\beta\omega} = \frac{\pi F_0}{m\delta\omega^2},$$

где δ — логарифмический декремент затухания (IV.2.1.4°). Если $\beta \ll \omega_0$, то $\Omega_p \approx \omega_0$, $\varphi_0(\Omega_p) \approx -\pi/2$ и $A_{\text{макс}} \approx Q A_0$, где $Q \approx \pi/\delta$ — добротность маятника (IV.2.1.5°), а A_0 — статическое смещение (п. 2°).

Резкое возрастание амплитуды вынужденных механических колебаний при приближении циклической частоты возмущающей силы к значению Ω_p называется явлением *механического резонанса*. Соответственно графики зависимости A от Ω , изображенные на рис. IV.2.3, называются *резонансными кривыми*.

По мере увеличения коэффициента затухания β пики на резонансных кривых быстро сглаживаются (при малых β амплитуда $A_{\text{макс}} \sim 1/\beta$), а резонансная частота Ω_p медленно уменьшается.

4°. *Скорость маятника* при установившихся вынужденных гармонических колебаниях

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) = A_v \cos(\Omega t + \alpha).$$

Здесь $A_v = A\Omega$ и $\alpha = \varphi_0 + \pi/2$ — амплитуда скорости и сдвиг фаз между скоростью и возмущающей силой, причем

$$A_v = \frac{F_0 \Omega}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\Omega^2} + 4\beta^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}.$$

Амплитуда скорости максимальна при $\Omega = \omega_0$ и равна

$$(A_v)_{\text{макс}} = A_v(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\beta}.$$

В этом случае $\alpha = 0$, т. е. скорость маятника колеблется в одной фазе с возмущающей силой. При $\Omega \rightarrow \infty$ амплитуда $A_v \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow -\pi/2$, а при $\Omega \rightarrow 0$ амплитуда $A_v \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \pi/2$.

5°. *Ускорение маятника* при установившихся вынужденных гармонических колебаниях

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = A_a \cos(\Omega t + \gamma).$$

Здесь $A_a = A\Omega^2$ и $\gamma = \varphi_0 + \pi$ — амплитуда ускорения и сдвиг фаз между ускорением и возмущающей силой, причем

$$A_a = \frac{F_0 \Omega^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2\beta}{\Omega}\right)^2}}.$$

Амплитуда ускорения максимальна при

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right).$$

При $\Omega = 0$ амплитуда $A_a = 0$, а при $\Omega \rightarrow \infty$ амплитуда ускорения стремится к значению $A_a(\infty) = F_0/m$.

6°. При установившихся вынужденных колебаниях потери энергии колебательной системы, обусловленные диссипативными силами (I.3.1.7°), полностью компенсируются за счет работы, совершаемой над системой возмущающей силой. Например, работа, совершаемая за одно полное колебание силой сопротивления,

действующей на пружинный маятник,

$$A_1 = -b \int_0^T \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = -2m\beta A^2 \Omega^2 \int_0^T \sin^2 (\Omega t + \varphi_0) dt = -m\beta A^2 \Omega^2,$$

где $b = 2m\beta$ — коэффициент сопротивления (IV.2.1.2°).

Работа, совершаемая за то же время возмущающей силой $F_x = F_0 \cos \Omega t$,

$$\begin{aligned} A_2 &= F_0 \int_0^T \frac{dx}{dt} \cos \Omega t dt = -A\Omega F_0 \int_0^T \cos \Omega t \sin (\Omega t + \varphi_0) dt = \\ &= -\frac{1}{2} A\Omega F_0 \sin \varphi_0 = -A_1, \end{aligned}$$

так как $\sin \varphi_0 = -2m\beta A\Omega / F_0$.

7°. Если возмущающая сила, действующая на пружинный маятник, изменяется периодически, но не по гармоническому закону, то ее можно представить в виде суммы гармоник этой силы (IV.1.4.6°). Они имеют различные амплитуды, начальные фазы и циклические частоты, кратные $\Omega = 2\pi/T$, где T — период изменения возмущающей силы. Так как маятник является линейной колебательной системой (IV.2.1.1°), то каждая гармоника возмущающей силы действует на него так, как если бы других гармоник не было. Поэтому установившиеся вынужденные колебания маятника, вызываемые произвольной периодической возмущающей силой, можно рассматривать как результат наложения установившихся вынужденных колебаний этого маятника под действием каждой из гармоник возмущающей силы порознь. «Вклад» различных гармоник силы в результирующие колебания зависит от их частот и амплитуд. Благодаря явлению резонанса существенную роль играют лишь те гармоники возмущающей силы, циклические частоты которых близки к резонансной частоте маятника (п. 3°). Если коэффициент затухания маятника β мал, то маятник может совершать установившиеся вынужденные колебания, близкие к гармоническим, даже в тех случаях, когда вынуждающая сила далека от гармонической. Примером таких вынужденных колебаний могут служить колебания маятника, который периодически подвергается кратковременным внешним воздействиям в виде толчков, направленных в одну и ту же сторону и повторяющихся через одинаковые промежутки времени, равные периоду свободных колебаний маятника.

§ IV.2.3. Вынужденные электрические колебания

1°. Для осуществления вынужденных колебаний в электрическом колебательном контуре (IV.1.3.1°) в него нужно включить источник электрической энергии, э. д. с. \mathcal{E} которого изменяется с течением времени (рис. IV.2.5). В электротехнике источник электрической энергии, характеризующийся э. д. с. и внутренним электрическим сопротивлением, называется *источником э. д. с. (источником напряжения)*. По закону Ома для участка цепи $I - R - L - 2$ (III.8.2.3°) квазистационарного тока (IV.1.3.1°), возникающего в контуре при вынужденных колебаниях,

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}(t).$$

Здесь $\varphi_2 - \varphi_1 = q/C$ — разность потенциалов обкладок конденсатора, q — его заряд, а внутреннее электрическое сопротивление источника \mathcal{E} д. с. считается пренебрежимо малым по сравнению с R (такой источник \mathcal{E} д. с. называется *идеальным*). Из закона сохранения электрического заряда (III.1.1.3°) следует, что $I = dq/dt$. Поэтому дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний в контуре можно представить в форме, аналогичной уравнению вынужденных механических колебаний (IV.2.2.1°):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} \mathcal{E}(t).$$

Здесь $\beta = R/2L$ — коэффициент затухания свободных колебаний в контуре, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — циклическая частота свободных незатухающих колебаний (т. е. при $R=0$).

2°. Если вынуждающая \mathcal{E} д. с. $\mathcal{E}(t)$ изменяется по гармоническому закону: $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$, то при установившихся вынужденных колебаниях (IV.2.2.1°) заряд конденсатора колеблется гармонически с той же циклической частотой Ω :

$$q = q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Амплитуда q_0 и начальная фаза φ_0 находятся по формулам:

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\Omega \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}} = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

При $\Omega=0$ фаза $\varphi_0(0)=0$ и $q_0(0) = \mathcal{E}_0 C$ — заряд конденсатора при постоянной разности потенциалов между обкладками, равной \mathcal{E}_0 . При $\Omega \rightarrow \infty$ амплитуда $q_0 \rightarrow 0$, а $\varphi_0 \rightarrow -\pi$. График зависимости φ_0 от Ω показан на рис. IV.2.4, а график зависимости q_0 от Ω — на рис. IV.2.3, где $A = q_0$, а $A_0 = q_0(0) = \mathcal{E}_0 C$.

3°. Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) = I_0 \cos(\Omega t - \varphi).$$

Амплитуда тока $I_0 = q_0 \Omega$ и начальная фаза $-\varphi = (\varphi_0 + \pi/2)$ находятся по формулам:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}.$$

Графики зависимости I_0 от Ω при различных значениях R , называемые *резонансными кривыми колебательного контура*, показаны на рис. IV.2.6, а графики зависимости φ от Ω — на рис. IV.2.7. Резонансная циклическая частота Ω_p , соответствующая максимуму амплитуды тока в контуре при

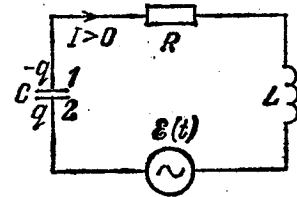


Рис. IV.2.5

вынужденных колебаниях, не зависит от R :

$$\Omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Амплитуда силы тока при резонансе $I_0(\Omega_p) = \mathcal{E}_0/R$, а сдвиг фаз между током и э. д. с. $\varphi(\Omega_p) = 0$. Если $\Omega < \omega_0$, то $\varphi < 0$, т. е. ток опережает э. д. с. по фазе и тем сильнее, чем меньше Ω ($\varphi = -\pi/2$ при $\Omega = 0$). Если $\Omega > \omega_0$, то $\varphi > 0$, т. е. ток отстает по фазе от э. д. с. и тем сильнее, чем больше Ω ($\varphi \rightarrow \pi/2$ при $\Omega \rightarrow \infty$).

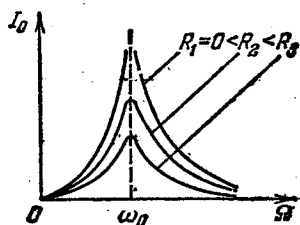


Рис. IV.2.6

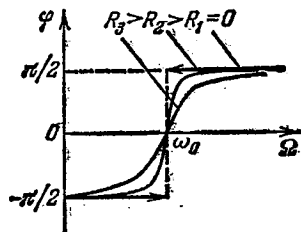


Рис. IV.2.7

4°. Разность потенциалов клемм идеального источника гармонической э. д. с. (рис. IV.2.5) равна его э. д. с.:

$$u = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t.$$

Падение потенциала на отдельных участках показанной на рис. IV.2.5 цепи переменного синусоидального тока $I = I_0 \cos(\Omega t - \varphi)$ — конденсаторе емкостью C , сопротивлении R и катушке индуктивностью L — равны:

$$u_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} = U_C \cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_R = IR = U_R \cos(\Omega t - \varphi),$$

$$u_L = L \frac{dI}{dt} = U_L \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Колебания u_R происходят в одной фазе с колебаниями тока I в цепи; u_L опережает ток по фазе на $\pi/2$, а u_C отстает от тока по фазе на $\pi/2$, причем

$$u_C + u_R + u_L = u = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t.$$

5°. Амплитудные значения u_C , u_L и u_R соответственно равны:

$$U_C = x_C I_0, \quad U_L = x_L I_0 \quad \text{и} \quad U_R = R I_0,$$

где $x_C = 1/\Omega C$ — емкостное сопротивление цепи, $x_L = \Omega L$ — индуктивное сопротивление цепи. Величина $x = x_L - x_C = \Omega L - \frac{1}{\Omega C}$ называется реактивным сопротивлением цепи, R называется активным сопротивлением цепи, а $z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$ — ее полным сопротивлением.

Формулы п. 3° для амплитуды синусоидального тока в цепи и его начальной фазы можно переписать в виде: $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{z}$ и $\text{tg } \varphi = \frac{x}{R}$, причем $\cos \varphi = \frac{R}{z}$ и $\sin \varphi = \frac{x}{z}$.

При резонансе $\Omega = 1/\sqrt{LC}$ и $x_L = x_C$, так что реактивное сопротивление цепи обращается в нуль, а полное сопротивление цепи достигает минимального значения, равного ее активному сопротивлению R :

$$x(\Omega_0) = 0 \quad \text{и} \quad z(\Omega_0) = z_{\text{мин}} = R.$$

$$\text{В этом случае } U_R = \mathcal{E}_0 \quad \text{и} \quad U_C = U_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

\mathcal{E}_0 . Действующим, или эффективным, значением периодического тока (соответственно э. д. с., напряжения и т. п.) называется среднее квадратичное значение тока за период T его изменения:

$$I_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}.$$

Для синусоидального тока и синусоидальной э. д. с.

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\text{эфф}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

Элементарная работа, совершаемая синусоидальным током за малое время dt в цепи, изображенной на рис. IV.2.5,

$$\delta A = iu dt = I_0 \mathcal{E}_0 \cos(\Omega t - \varphi) \cos \Omega t dt.$$

Мгновенная мощность тока в цепи

$$N = \frac{\delta A}{dt} = iu = I_0 \mathcal{E}_0 \cos(\Omega t - \varphi) \cos \Omega t.$$

Среднее за период значение мгновенной мощности называется активной мощностью P тока в электрической цепи:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos \varphi = I_{\text{эфф}} \mathcal{E}_{\text{эфф}} \cos \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ называется коэффициентом мощности. Так как $I_{\text{эфф}} = \mathcal{E}_{\text{эфф}}/z$, а $\cos \varphi = R/z$, то

$$P = \frac{R}{z^2} \mathcal{E}_{\text{эфф}}^2.$$

При резонансе $z = R$ и активная мощность максимальна:

$$P = \frac{\mathcal{E}_{\text{эфф}}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R}.$$

Г л а в а IV.3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

§ IV.3.1. Продольные и поперечные волны в упругой среде

1°. Тело называется упругим, а его деформации, вызываемые внешними воздействиями, называются упругими деформациями, если они полностью исчезают после прекращения этих воздействий. Согласно закону Гука упругие

деформации прямо пропорциональны вызывающим их внешним воздействиям, т. е. зависят от них линейно. При достаточно малых деформациях все тела практически можно считать упругими.

Упругие свойства тел зависят от характера теплового движения молекул и сил их взаимодействия. Например, газообразное тело беспрепятственно изменяет свою форму в соответствии с формой занимаемого им сосуда — газ не обладает *упругостью формы*. В то же время газу присуща *объемная упругость*, т. е. способность сопротивляться изменению его объема. Это свойство газа обусловлено тепловым движением его молекул и проявляется в изменении давления газа при изменении его объема V . По *закону Гюка для объемной деформации* изменение dp давления газа при малом изменении dV его объема прямо пропорционально относительной объемной деформации:

$$dp = -K \frac{dV}{V},$$

где K — *модуль объемной упругости* газа. Для идеального газа (II.1.4.1°) значение K зависит от вида термодинамического процесса сжатия (расширения) газа. При очень медленном изменении объема газа процесс можно считать изотермическим (II.1.3.7°), а при очень быстром — адиабатическим (II.1.3.7°). В первом случае $K = p$, а во втором $K = \kappa p$, где κ — показатель адиабаты (II.2.5.11°).

2°. Упругость кристаллического твердого тела обусловлена силами взаимного притяжения и отталкивания частиц (ионов, атомов или молекул), образующих это тело и совершающих беспорядочные тепловые колебания около узлов его кристаллической решетки. Силы взаимодействия частиц препятствуют деформациям кристаллической решетки, связанным с изменением как объема тела, так и его формы. Поэтому твердые тела помимо объемной упругости обладают упругостью формы, которая проявляется в их сопротивлении деформации сдвига (VII.1.3.9°).

Упругость жидкостей также обусловлена силами межмолекулярного взаимодействия. Однако вследствие того, что средняя продолжительность τ оседлого существования молекул жидкости (II.6.2.4°) очень мала, жидкости, подобно газам, обладают только объемной упругостью. Они проявляют упругость формы только по отношению к переменным деформациям сверхвысокой частоты, период которых меньше или порядка τ .

3°. *Упругими*, или *механическими, волнами* называются механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде. Тела, которые, воздействуя на среду, вызывают эти возмущения, называются *источниками волн*. Например, зрители в театре слышат речь и пение актеров, звучание музыкальных инструментов, благодаря доходящим до них колебаниям давления воздуха, вызываемых этими источниками звука.

Звуковыми, или *акустическими, волнами*, называются упругие волны малой интенсивности, т. е. слабые механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Звуковые волны, воздействуя на органы слуха человека, способны вызывать звуковые ощущения, если частоты ν соответствующих им колебаний лежат в пределах $16 \div 2 \cdot 10^4$ Гц (*слышимые звуки*). Упругие волны с частотами $\nu < 16$ Гц называются *инфразвуком*, а с частотами $\nu > 2 \cdot 10^4$ Гц — *ультразвуком* (часто упругие волны с $\nu > 10^9$ Гц называют *гиперзвуком*).

4°. Распространение упругих волн в среде не связано с переносом вещества *). В неограниченной среде оно состоит в вовлечении в вынужденные колебания все более и более удаленных от источника волн частей среды. При этом можно отвлечься от дискретного (молекулярного) строения среды, рассматривая ее как *сплошную среду*, непрерывно распределенную в пространстве и обладающую определенными упругими свойствами. Под *частицей* такой среды, совершающей вынужденные колебания, понимают малый элемент ее объема, размеры которого, однако, во много раз больше межмолекулярных расстояний, так что в нем содержится очень большое число молекул. Практически частицы среды можно считать точечными, так как даже в газе межмолекулярные расстояния крайне малы (порядка 10^{-8} м при нормальных условиях).

5°. Упругая волна называется *продольной*, если частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды и потому могут распространяться в любой среде — твердой, жидкой и газообразной. Примером являются звуковые волны в воздухе.

Упругая волна называется *поперечной*, если частицы среды колеблются, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Поперечные волны связаны с деформацией сдвига упругой среды и, следовательно, могут образовываться и распространяться только в средах, обладающих упругостью формы, т. е. в твердых телах. Примером поперечных волн могут служить волны, распространяющиеся вдоль струн музыкальных инструментов.

Особое место занимают *поверхностные волны* — распространяющиеся вдоль свободной поверхности жидкости (или поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей) возмущения этой поверхности, возникающие под влиянием внешних воздействий (падения тел, движения судов, ветра и т. п.). В образовании и распространении этих волн определяющую роль играют силы поверхностного натяжения и тяжести. В поверхностных волнах частицы жидкости одновременно совершают поперечные и продольные колебания, описывая эллиптические или более сложные траектории.

6°. Среда называется *однородной*, если ее физические свойства, существенные в рассматриваемых задачах, не изменяются от точки к точке. Среда, однородная в отношении одних физических свойств, может быть неоднородной в отношении других. Например, монокристаллическое тело однородно по своим упругим свойствам и в то же время оптически неоднородно для рентгеновских лучей.

Среда называется *изотропной*, если ее физические свойства, существенные в рассматриваемых задачах, одинаковы во всех направлениях. Среда, изотропная в отношении одних физических свойств, может быть анизотропной в отношении других. Например, кристаллы кубической системы оптически изотропны, а в отношении упругих свойств — анизотропны. Газы и жидкости в отсутствие внешних полей изотропны в отношении любых физических свойств.

7°. Среда называется *линейной*, если между величинами, характеризующими рассматриваемое внешнее воздействие на среду и вызываемое им изменение состояния среды, существует прямо пропорциональная связь. Например, упругая

*) Некоторый перенос вещества может осуществляться при распространении в среде сильных возмущений (например, ударных волн, возникающих при взрыве), когда колебания частиц среды становятся нелинейными.

среда, подчиняющаяся закону Гука (п. 1°), линейна по своим механическим свойствам. Диэлектрик является линейной средой по своим электрическим свойствам, если его диэлектрическая проницаемость (III.4.3.5°) не зависит от напряженности электрического поля. Аналогично, магнетик — линейная среда по своим магнитным свойствам, если его магнитная проницаемость (III.12.4.5°) не зависит от магнитной индукции поля.

§ IV.3.2. Уравнение бегущей волны

1°. *Бегущими волнами* называются волны, которые, в отличие от стоячих волн (IV.3.5.4°), переносят энергию в пространстве.

Уравнением упругой волны называется зависимость от координат и времени скалярных или векторных величин, характеризующих колебания среды при прохождении в ней рассматриваемой волны. Например, для волн в твердой среде такой величиной может служить вектор смещения частицы среды (IV.3.1.4°) из положения равновесия или три его проекции на оси координат. Для характеристики продольных волн в газе или жидкости обычно пользуются избыточным давлением колеблющейся среды, равным разности между ее переменным и равновесным давлениями.

Лучом называется линия, касательная к которой в каждой ее точке совпадает с направлением распространения волны, т. е. с направлением переноса энергии волной (IV.3.3.5°). В однородной среде (IV.3.1.6°) лучи имеют вид прямых линий.

2°. Упругая волна называется *синусоидальной*, или *гармонической*, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими (IV.1.1.3°). Частота этих колебаний называется *частотой волны*. Колебания давления в газообразной или жидкой среде при распространении в ней синусоидальной волны также совершаются по гармоническому закону с частотой, равной частоте волны. В поперечной синусоидальной волне частицы среды могут одновременно гармонически колебаться с частотой волны вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений, каждое из которых перпендикулярно направлению распространения волны. В зависимости от характера поляризации результирующих колебаний (IV.1.4.9°) различают следующие *типы поляризации поперечных синусоидальных волн*: *эллиптическую*, *циркулярную* (или *круговую*), *линейную* (или *плоскую*).

3°. Механические возмущения (деформации) распространяются в упругой среде с конечной скоростью v . Поэтому возмущение, вызываемое источником волн в момент времени t_0 , достигает произвольной точки M среды в момент времени $t > t_0$. Разность $t - t_0 = l/v$ тем больше, чем больший путь l проходит волна от источника до точки M . Соответственно колебания в точке M отстают по фазе от колебаний источника волн.

Волновой поверхностью, или *фронтом волны*, называется геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение. Для всех точек одной волновой поверхности разность $t - t_0$ одинакова. Через каждую точку среды, охваченной волновым движением, можно провести одну волновую поверхность, соответствующую значению фазы колебаний в этой точке в рассматриваемый момент времени. Множеству различных значений фазы колебаний соответствует семейство волновых поверхностей. В однородной изотропной среде (IV.3.1.6°) волновые поверхности ортогональны лучам (п. 1°).

4°. Волна называется *плоской*, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу. В плоской волне, распространяющейся вдоль оси OX , все величины s , характеризующие колебательное движение среды, зависят только от времени t и координаты x рассматриваемой точки M среды. Если нет поглощения волн в среде (IV.3.3.7°), то колебания в точке M отличаются от колебаний в начале координат O только тем, что они сдвинуты по времени на x/v , где v — скорость волны. Поэтому в плоской волне, распространяющейся вдоль положительного направления оси OX , s является функцией разности $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, так что *уравнение* такой *плоской волны* имеет вид:

$$s = f\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Соответственно уравнение плоской волны, распространяющейся в противоположном направлении:

$$s = f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

5°. *Уравнение плоской синусоидальной волны*, распространяющейся в непоглощающей среде вдоль положительного направления оси OX ,

$$s = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0 \right),$$

или

$$s = A \sin \left[\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{vT} x + \varphi_0 \right],$$

где $A = \text{const}$ — амплитуда колебаний, называемая *амплитудой волны*, $\omega = 2\pi/T$ — *циклическая (круговая) частота волны*, T — период колебаний, а φ_0 — начальная фаза колебаний (в момент времени $t=0$) в точках координатной плоскости $x=0$.

Величина $\Phi = \omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0$, равная фазе колебаний в произвольной точке с координатой x , называется *фазой плоской волны* (см. также п. 6°).

6°. Расстояние $\lambda = vT$, на которое распространяется синусоидальная волна за время, равное периоду колебаний, называется *длиной волны*. Длина волны равна расстоянию между двумя ближайшими точками среды, в которых разность фаз колебаний равна 2π .

Наряду с длиной волны используется другая характеристика синусоидальной волны — *волновое число*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} \text{ * }.$$

Поэтому уравнение плоской синусоидальной волны (п. 5°) можно также представить в виде:

$$s = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right) = A \sin (\omega t - kx + \varphi_0).$$

*) В физической оптике волновым числом часто называют величину $1/\lambda$, где λ — длина волны излучения в вакууме (ГОСТ 7601-78).

Соответственно фаза этой плоской волны $\Phi = \omega t - kx + \varphi_0$.

7°. *Волновым вектором* называется вектор \mathbf{k} , по модулю равный волновому числу k и направленный вдоль луча (п. 1°) в рассматриваемой точке M среды. Волновой вектор плоской синусоидальной волны не зависит от выбора точки M , и уравнение такой волны можно записать в форме:

$$s = A \sin [\omega t - kr + \alpha],$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки M , а α — начальная фаза колебаний в начале координат, т. е. в точке $\mathbf{r} = 0$.

Основываясь на формуле Эйлера (IV.1.1.7°), уравнение плоской синусоидальной волны можно записать в экспоненциальной форме, удобной для дифференцирования,

$$\tilde{s} = A e^{i(\omega t - kr + \alpha)},$$

где $\delta = \alpha - \pi/2$. Физический смысл имеет только действительная часть комплексной величины \tilde{s} , т. е. величина $s = \text{Re } \tilde{s}$. Поэтому, пользуясь \tilde{s} для нахождения какой-либо характеристики волны, нужно после выполнения всех математических операций отбросить мнимую часть полученного комплексного выражения.

8°. Волна называется *сферической*, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центр этих сфер называется *центром волны*. Такого рода волны возбуждаются в однородной изотропной среде уединенным точечным источником. Уравнение расходящейся сферической волны имеет вид:

$$s = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

где r — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки M среды, v — скорость волны.

В случае *синусоидальной сферической волны*

$$s = \frac{a_0}{r} \sin (\omega t - kr + \alpha),$$

где $A(r) = a_0/r$ — амплитуда волны (IV.3.3.6°), a_0 — физическая величина, численно равная амплитуде волны на единичном расстоянии от ее центра, α — начальная фаза колебаний в центре волны, а $\Phi = \omega t - kr + \alpha$ — фаза сферической волны.

Экспоненциальная форма записи уравнения синусоидальной сферической волны:

$$\tilde{s} = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \alpha)} = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \delta)},$$

где $\delta = \alpha - \pi/2$, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра волны в рассматриваемую точку M , а волновой вектор \mathbf{k} направлен в точке M радиально от центра волны.

Реальные источники волн всегда имеют конечные размеры. Однако их можно считать точечными, а волны, возбуждаемые ими в однородной изотропной среде, — сферическими, если расстояние r от источника до рассматриваемых точек среды значительно больше размеров источника. Если r очень велико, то любые малые участки волновых поверхностей практически можно считать плоскими.

9°. Распространение волн в однородной изотропной среде описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое называется *волновым*

уравнением:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Здесь s — физическая величина, которая характеризует возмущение, распространяющееся в среде со скоростью v , а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Этому уравнению удовлетворяют, в частности, плоская волна (п. 7°) и расходящаяся сферическая волна (п. 8°).

Функция s , характеризующая синусоидальную волну в однородной изотропной среде, одновременно удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\Delta s = -k^2 s,$$

где k — волновое число (п. 6°), и

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s,$$

где ω — циклическая частота волны.

10°. Скорость v распространения синусоидальной волны называется *фазовой скоростью*. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы синусоидальной волны. Например, в случае плоской синусоидальной волны (п. 6°) из условия $\omega t - kx + \phi_0 = \text{const}$ следует, что $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$. Соответственно в случае сферической синусоидальной волны (п. 8°) из условия $\omega t - kr + \alpha = \text{const}$ следует, что $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$.

§ IV.3.3. Фазовая скорость и энергия упругих волн

1°. *Фазовая скорость звуковых волн (скорость звука) в жидкости или газе*

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

где ρ — плотность невозмущенной среды, K — модуль объемной упругости среды (IV.3.1.1°). Частота слышимых звуковых волн $\nu > 16$ Гц, и процесс деформации среды можно считать адиабатическим (II.1.3.7°), т. е. $K = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_{\text{ад}}$. Для идеального газа (II.1.4.1°) связь между давлением p и объемом V в адиабатическом процессе: $pV^\kappa = \text{const}$, где κ — показатель адиабаты (II.2.5.11°), так что $K = \kappa p$. Поэтому *скорость звука в идеальном газе* равна:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}},$$

где μ — молярная масса газа, T — его абсолютная температура, R — универсальная газовая постоянная.

2°. Фазовая скорость поперечных упругих волн в однородной изотропной твердой среде

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G — модуль сдвига среды (VII.1.3.9°), ρ — ее плотность.

Распространение продольных волн в тонком длинном стержне связано с его продольным растяжением и сжатием. Соответственно фазовая скорость таких волн

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E — модуль Юнга (VII.1.3.6°) для материала стержня.

Скорость распространения поперечных волн вдоль струны, т. е. вдоль натянутой тонкой гибкой нити, равна:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

где F — сила натяжения струны, а ρ и S — плотность материала струны и площадь ее поперечного сечения.

3°. Упругая среда, в которой распространяются механические волны, обладает как кинетической энергией колебательного движения частиц, так и потенциальной энергией, обусловленной деформацией. Если v_1 — скорость частиц среды (IV.3.1.1°), то объемная плотность кинетической энергии среды

$$w_k = \frac{dW_k}{dV} = \frac{1}{2} \rho v_1^2,$$

где ρ — плотность среды, dW_k — кинетическая энергия всех частиц в малом объеме dV среды, выбранном таким образом, что в его пределах скорость v_1 всюду одинакова.

Объемная плотность потенциальной энергии упруго деформированной среды

$$w_n = \frac{dW_n}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 \varepsilon^2,$$

где dW_n — потенциальная энергия однородно деформированного малого участка среды объемом dV , v — фазовая скорость волны в среде, ε — относительная деформация.

Под объемной плотностью энергии упругих волн понимают объемную плотность w механической энергии среды, обусловленную распространением этих волн:

$$w = w_k + w_n = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v^2 \varepsilon^2).$$

4°. Если в среде распространяется продольная плоская бегущая волна (IV.3.2.4°), то $v_1 = \partial s / \partial t$, где s — смещение частиц, и $\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x} = - \left(\frac{v_1}{v} \right)$, так что

$$w_n = w_k \quad \text{и} \quad w = \rho v_1^2 = \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2.$$

В каждой точке среды, охваченной волновым движением, w_k и w_n являются одинаковыми функциями времени. Соответственно и w изменяется с те-

чением времени. Эта закономерность справедлива для любых бегущих волн в упругой среде независимо ни от формы их волновых поверхностей, ни от типа деформации среды. Она вытекает из закона сохранения энергии применительно к процессу распространения колебаний в упругой среде. Для вовлечения в колебательное движение все более и более удаленных от источника волн областей среды необходимо затрачивать энергию, сообщаемую среде источником. Следовательно, распространение упругих волн неразрывно связано с передачей энергии от одних участков среды к другим. Именно поэтому объемная плотность w энергии волн зависит как от координат, так и от времени.

Для плоской бегущей синусоидальной волны в непоглощающей среде (IV.3.2.5°)

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 [1 + \cos 2(\omega t - kx + \varphi_0)],$$

где $A = \text{const}$ — амплитуда волны.

В случае расходящейся сферической синусоидальной волны в непоглощающей среде (IV.3.2.8°)

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kr + \alpha),$$

где $A = a_0/r$ — амплитуда волны.

Среднее за период значение объемной плотности энергии

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.$$

6°. Скорость переноса энергии волной равна скорости перемещения в пространстве поверхности, соответствующей максимальному значению объемной плотности w энергии волны. Для синусоидальных волн эта скорость равна фазовой скорости v .

Потоком энергии $d\Phi_w$ сквозь малую площадку dS называется отношение энергии dW , передаваемой через эту площадку за малый промежуток времени, к его величине dt :

$$d\Phi_w = dW/dt.$$

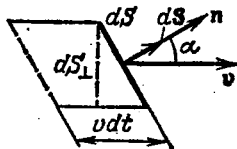


Рис. IV.3.1

Если v — вектор скорости переноса энергии волной (рис. IV.3.1), то

$$dW = wv dt dS \cos \alpha = w(v dS) dt$$

$$d\Phi_w = w(v dS) = (U dS),$$

где w — объемная плотность энергии волны, $dS = n dS$ — вектор площадки dS , n — единичный вектор нормали к площадке, α — угол между v и dS .

Вектор $U = wv$, направленный в сторону переноса энергии волной, называется вектором Умова (вектором плотности потока энергии волны). По модулю он равен отношению потока энергии $d\Phi_w$ сквозь малую площадку dS к площади $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ проекции этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению переноса энергии: $U = d\Phi_w/dS_{\perp}$.

6°. Интенсивностью волны I называется модуль среднего значения вектора Умова. Интенсивность волны численно равна энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, нормальной к направлению распространения волны. Интенсивность бегущей синусоидальной волны

пропорциональна квадрату ее амплитуды. Для плоской и сферической синусоидальных волн

$$I = |\langle U \rangle| = v \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2.$$

Если сферическая волна распространяется в непоглощающей среде, то за единицу времени через любую сферическую поверхность радиуса r , центр которой находится в центре волны, передается одно и то же количество энергии, равное энергии, расходуемой за такое же время источником волны: $I 4\pi r^2 = \text{const}$. Таким образом, интенсивность и амплитуда сферической волны убывают по мере удаления от центра волны по законам:

$$I(r) = \frac{i_0}{r^2} \quad \text{и} \quad A(r) = \frac{a_0}{r},$$

где i_0 и a_0 — физические величины, численно равные интенсивности и амплитуде волны на расстоянии $r=1$ м от центра волны.

Таким же способом можно доказать, что в случае плоской синусоидальной волны в непоглощающей среде амплитуда волны A не зависит от координат.

7°. Преобразование энергии волн в другие виды энергии, происходящее при распространении волн в среде, называется *поглощением волн*. В однородной среде поглощение упругих волн обусловлено главным образом процессами внутреннего трения (II.3.8.4°) и теплопроводности (II.3.8.5°). Амплитуда A и интенсивность I плоской волны, распространяющейся в поглощающей среде вдоль положительного направления оси Ox , изменяются по экспоненциальному закону:

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x} \quad \text{и} \quad I(x) = I_0 e^{-2\alpha x}.$$

Здесь A_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность волны в точках $x=0$, α — *линейный коэффициент поглощения упругих волн*, зависящий от свойств среды и частоты волны.

8°. *Дисперсией волн* называется зависимость фазовой скорости синусоидальных волн в среде от их частоты. Среда, в которой это явление наблюдается, называется *диспергирующей средой*. Дисперсия звуковых волн в безграничной среде зависит от свойств среды и всегда сопровождается поглощением звука.

§ IV.3.4. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость

1°. *Принцип суперпозиции (наложения) волн*: в линейной среде (IV.3.1.7°) волны распространяются независимо друг от друга, так что результирующее возмущение в какой-либо точке среды при одновременном распространении в ней нескольких волн равно сумме возмущений, соответствующих каждой из этих волн порознь.

Например, если в линейной среде одновременно распространяется n различных механических волн, то результирующие смещение s , скорость v и ускорение a частиц среды в произвольный момент времени t равны:

$$s = \sum_{i=1}^n s_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \quad \text{и} \quad a = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Здесь s_i , v_i и a_i — значения смещения, скорости и ускорения, которые имели бы рассматриваемые частицы в тот же момент времени t , если бы в среде распространялась одна только i -я волна.

2°. Основываясь на принципе суперпозиции волн и разложении Фурье (IV.1.4.6° и IV.1.4.7°), можно заменить любую несинусоидальную волну эквивалентной ей системой синусоидальных волн, т. е. представить в виде *группы волн*, или *волнового пакета*. Совокупность значений частот этих синусоидальных волн

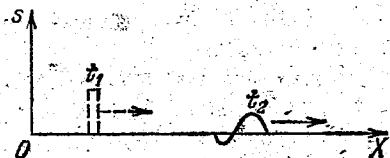


Рис. IV.3.2



Рис. IV.3.3

называется *спектром частот* (или просто *спектром*) рассматриваемой несинусоидальной волны. В зависимости от характера колебаний, возбуждаемых волной, спектр частот последней может быть дискретным (IV.1.4.6°) или непрерывным (IV.1.4.7°).

Закономерность распространения в линейной среде произвольного возмущения (сигнала), представляющего собой несинусоидальную волну, проста только при условии, что среда недиспергирующая (IV.3.3.8°). В этом случае сигнал перемещается в среде, не изменяя своей «формы», так как все синусоидальные волны, образующие эту группу, имеют одинаковые фазовые скорости, равные скорости сигнала.

В диспергирующей среде синусоидальные составляющие группы волн, соответствующей несинусоидальной волне, распространяются с разными скоростями. Поэтому группа волн по мере распространения «расплывается», так что «форма» сигнала изменяется. Например, если в момент времени t_1 сигнал, распространяющийся в диспергирующей среде вдоль оси Ox , имел «форму», показанную на рис. IV.3.2 штриховой линией, то в момент времени $t_2 > t_1$ он имеет уже иную «форму», изображенную сплошной линией.

3°. Простейшей группой волн является *квазисинусоидальная плоская волна*, получающаяся в результате наложения двух распространяющихся вдоль оси Ox плоских волн с одинаковыми амплитудами и близкими по значению частотами и волновыми числами:

$$s = A_0 \sin(\omega t - kx) + A_0 \sin[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ = 2A_0 \cos\left(\frac{t d\omega - x dk}{2}\right) \sin(\omega t - kx).$$

Зависимость s от x в некоторый фиксированный момент времени показана на рис. IV.3.3. Эта волна отличается от синусоидальной тем, что ее амплитуда

$$A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{t d\omega - x dk}{2}\right) \right|$$

— медленно меняющаяся функция координаты x и времени t .

За скорость распространения этой несинусоидальной волны принимают скорость u перемещения точки M , в которой амплитуда A имеет какое-либо фик-

сированное значение (например, $A=0$ или $A=2A_0$). Следовательно, точка M движется по закону: $t d\omega - x dk = \text{const}$. Откуда

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

Скорость u называется *групповой скоростью*. Она равна скорости переноса энергии квазисинусоидальной волной. Групповая скорость $u = d\omega/dk$ пригодна для описания переноса энергии (передачи сигнала) посредством несинусоидальных волн, имеющих иной спектр частот, при условии, что спектр не очень широк, а дисперсия волн в среде для этих частот не слишком велика.

Связь между групповой ($u = d\omega/dk$) и фазовой ($v = \omega/k$) скоростями волн имеет вид:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

где λ — длина волны (IV.3.2.6°). В недиспергирующей среде $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

§ IV.3.5. Интерференция волн. Стоячие волны

1°. Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз не зависит от времени. Когерентным волнам соответствуют когерентные колебания (IV.1.4.3°). Источники когерентных волн называются *когерентными источниками*. Синусоидальные волны, частоты которых одинаковы, когерентны всегда. Волны, частоты которых различны, когерентны только в течение времени когерентности возбуждаемых ими колебаний (IV.1.4.4°).

При наложении некогерентных синусоидальных волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2 (рис. IV.3.4), квадрат амплитуды A результирующих негармонических колебаний в произвольной точке M периодически изменяется с течением времени t по закону (см. (IV.1.4.2°) и (IV.3.2.8°)):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2r - k_1r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)].$$

Здесь A_1 и A_2 , ω_1 и ω_2 , k_1 и k_2 , α_1 и α_2 — амплитуды в точке M , циклические частоты, волновые числа и начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн. Период изменения A^2 равен $T = 2\pi/|\omega_2 - \omega_1|$.

Среднее за период значение квадрата амплитуды

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2.$$

При наложении некогерентных волн происходит сложение квадратов их амплитуд.

2°. *Интерференцией волн* называется явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Интерферировать могут только когерентные волны, которым соответствуют колебания, совершающиеся вдоль одного и того же или близких направлений.

При наложении когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2 (рис. IV.3.4),

$$s_1 = A_1 \sin(\omega t - kr_1 + \alpha_1) = A_1 \sin \Phi_1$$

и

$$s_2 = A_2 \sin(\omega t - kr_2 + \alpha_2) = A_2 \sin \Phi_2,$$

амплитуда A и фаза Φ результирующих гармонических колебаний в точке M ($s = s_1 + s_2 = A \sin \Phi$) определяются соотношениями (IV.1.4.3°):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)],$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2}{A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2}.$$

Поскольку для колебаний когерентных источников S_2 и S_1 разность начальных фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}$, результат интерференции двух волн в различных точках M зависит от величины $\Delta = r_2 - r_1$, называемой *разностью хода волн*. В интерференционных максимумах амплитуда результирующих колебаний $A = A_1 + A_2$, а в минимумах $A = |A_1 - A_2|$. Максимумы наблюдаются в точках M , удовлетворяющих условию:

$$k\Delta - (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm 2m\pi,$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ — *порядок интерференционного максимума*.

Условие интерференционных минимумов имеет вид:

$$k\Delta - (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm (2m - 1)\pi,$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ — *порядок интерференционного минимума*.

Так как волновое число $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны в данной среде, то условия интерференционных максимумов и минимумов можно представить в форме:

$$\Delta = \pm m\lambda + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \lambda \text{ — максимумы,}$$

$$\Delta = \pm (2m - 1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \lambda \text{ — минимумы.}$$

Наконец, если $\alpha_2 = \alpha_1$, то условия имеют вид:

$$\Delta = \pm m\lambda \text{ (максимумы) и } \Delta = \pm (2m - 1) \lambda/2 \text{ (минимумы).}$$

На прямой ab , проходящей параллельно линии источников S_1S_2 , на расстоянии L от нее (рис. IV.3.4), центральный максимум нулевого порядка находится в точке O , равноудаленной от S_1 и S_2 . Если расстояние между источниками $l \ll L$, то для точки M на прямой ab , отстоящей от O на расстоянии $z \ll L$, разность хода волн

$$\Delta = \frac{lz}{L}.$$

Максимумам m -го и $(m+1)$ -го порядков соответствуют значения

$$z_m = \frac{m\lambda L}{l} \text{ и } z_{m+1} = \frac{(m+1)\lambda L}{l},$$

так что расстояние между соседними максимумами равно $\lambda L/l$.

3°. При интерференции волн отсутствует простое суммирование их энергий. В интерференционных максимумах интенсивность результирующей волны больше

суммы интенсивностей накладывающихся волн, а в интерференционных минимумах — меньше их суммы. Интерференция волн приводит к перераспределению энергии колебаний между соседними областями среды. Однако в среднем для большой области пространства энергия результирующей волны равна сумме энергий интерферирующих волн. Этот результат является следствием закона сохранения и превращения энергии.

4°. Частным случаем интерференции волн являются стоячие волны. *Стоячей волной* называется волна, образующаяся в результате наложения двух бегущих синусоидальных волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые частоты и амплитуды, а в случае поперечных волн еще и одинаковую поляризацию (IV.3.2.2°). Поперечная стоячая волна образуется, например, на натянутой упругой нити, один конец которой закреплен, а другой приводится в колебательное движение.

При наложении двух когерентных бегущих плоских волн вида

$$s_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad s_2 = A \sin(\omega t + kx + \alpha),$$

где α — разность фаз волн в точках $x=0$, образуется *плоская стоячая волна*, описываемая уравнением:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Амплитуда стоячей волны $A_{ст}$, в отличие от амплитуды A бегущих волн, является периодической функцией координаты x :

$$A_{ст} = 2A \left| \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \right|.$$

5°. Точки, в которых амплитуда стоячей волны $A_{ст} = 0$, называются *узлами стоячей волны*, а точки, в которых амплитуда $A_{ст}$ максимальна ($A_{ст} = 2A$), называются *пучностями стоячей волны*. Положение узлов и пучностей находится из условий:

$$kx + \frac{\alpha}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{узлы}),$$

$$kx + \frac{\alpha}{2} = m\pi \quad (\text{пучности}),$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Расстояния между двумя соседними узлами и между двумя соседними пучностями одинаковы и равны половине длины λ бегущих волн. Эту величину называют *длиной стоячей волны*: $\lambda_{ст} = \lambda/2$. Расстояние между соседними узлом и пучностью стоячей волны равно $\lambda_{ст}/2$.

6°. В бегущей волне фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки. В стоячей волне все точки между двумя узлами колеблются с различными амплитудами, но с теми же фазами (синфазно), так как аргумент синуса в уравнении стоячей волны (п. 4°) не зависит от координаты x . При переходе через узел фаза колебаний изменяется скачком на π , так как при этом $\cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right)$ изменяет свой знак на противоположный.

На рис. IV.3.5 показан характер движения различных точек натянутой упругой нити длины l при установившейся в ней поперечной стоячей волне. Левый

конец нити O приводится в гармонические колебания, а правый N закреплен неподвижно. В этом случае при отражении волны от места закрепления ее фаза изменяется на π , так что в месте закрепления нити образуется узел стоячей волны. В точке O ($x=0$) разность фаз отраженной и падающей волн $\alpha = -(2kl + \pi)$. Кружками на рис. IV.3.5 обозначены узлы стоячей волны, а момент времени t_0 выбран так, что $\sin\left(\omega t_0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 0$.

7°. В стоячей волне (п. 4°) скорость колебательного движения частиц среды

$$v_x = \frac{\partial s}{\partial t} = 2A\omega \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right),$$

а относительная деформация среды

$$s = \frac{\partial s}{\partial x} = -2Ak \sin\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right) = \\ = 2Ak \sin\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, в отличие от бегущей волны (IV.3.3.4°), в стоячей волне v_x опережает s по фазе на $\pi/2$, так что в те моменты времени, когда v_x достигает амплитудного значения, s обращается в нуль и наоборот. Кроме того, амплитуды v_x и s зависят от координаты x и притом различным образом: в пучностях стоячей волны (п. 5°) располагаются пучности скорости частиц и узлы деформации среды, а в узлах стоячей волны — пучности деформации и узлы скорости.

В упругой стоячей волне энергия периодически преобразуется из потенциальной энергии, локализованной в основном вблизи пучностей деформации, в кинетическую, локализованную в основном вблизи пучностей скорости, и обратно. Поэтому энергия периодически мигрирует от узлов стоячей волны, к ее пучностям и обратно. Однако в самих узлах и пучностях плотность потока энергии тождественно равна нулю. Среднее за период значение плотности потока энергии равно нулю в любой точке стоячей волны, так как две бегущие волны, образующие стоячую, переносят за период равные количества энергии в прямо противоположных направлениях. В силу указанной особенности стоячие волны и получили свое название.

8°. В случае свободных колебаний струн, стержней и столбов газа в них устанавливаются стоячие волны, частоты которых удовлетворяют определенным условиям, т. е. могут принимать только определенные дискретные значения, называемые *собственными частотами колебаний* соответствующей колебательной системы.

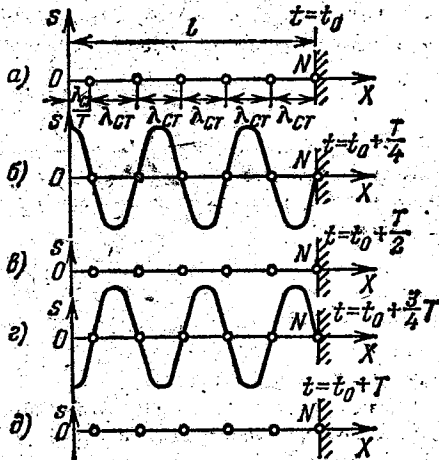


Рис. IV.3.5

На жестко закрепленных концах струн или стержней располагаются узлы смещения (пучности деформации), а на свободных концах стержней — пучности смещения (узлы деформации). При колебаниях цилиндрического столба газа в трубе у закрытого конца трубы располагается пучность давления, а у открытого — узел давления.

Если l — длина струны, стержня или столба газа, v — фазовая скорость волны, а λ — ее длина, то для струн или стержней, закрепленных на обоих концах, и столбов газа в трубах, закрытых или открытых с обоих концов, на длине l укладывается целое число длин стоячей волны $\lambda_{ст} = \lambda/2$:

$$l = m\lambda_{ст} = m\lambda/2, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

Собственные частоты колебаний таких систем

$$\nu = \frac{mv}{2l}.$$

Для стержней, один конец которых закреплен, а другой свободен, и для труб, закрытых с одного конца и открытых с другого,

$$l = (2m-1) \frac{\lambda_{ст}}{2} = (2m-1) \frac{\lambda}{4}$$

и собственные частоты колебаний

$$\nu = \frac{(2m-1)v}{4l}.$$

§ IV.3.6. Эффект Доплера в акустике

Г. *Эффектом Доплера* называется изменение частоты волн, регистрируемой приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника. Например, при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося поезда тон звукового сигнала последнего выше, а при удалении поезда — ниже тона сигнала, подаваемого тем же поездом, когда он стоит на станции.

Пусть приемник П звуковых волн в газобразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется от приемника со скоростью v_1 вдоль соединяющей их прямой (рис. IV.3.6, а). Источник смещается в среде за время, равное периоду T_0 его колебаний, на расстояние $v_1 T_0 = v_1 / \nu_0$, где ν_0 — частота колебаний источника. Поэтому при движении источника длина волны в среде λ отлична от ее значения λ_0 при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + v_1 T_0 = (v + v_1) T_0 = (v + v_1) / \nu_0,$$

где v — фазовая скорость волны в среде. Частота волны, регистрируемая приемником,

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{v}}.$$

Если вектор v_1 скорости источника направлен под произвольным углом θ_1 к радиус-вектору R , соединяющему неподвижный приемник с источником

(рис. IV.3.6, б), то

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_1 \cos \theta_1}{u}}$$

2°. Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью v_2 вдоль соединяющей их прямой (рис. IV.3.6, в), то длина волны в среде $\lambda = \lambda_0 = v/v_0$. Однако скорость распространения волны относительно приемника равна $v + v_2$, так что частота волны, регистрируемая приемником,

$$v = \frac{v + v_2}{\lambda_0} = v_0 \left(1 + \frac{v_2}{v} \right).$$

В случае, когда скорость v_2 направлена под произвольным углом θ_2 к радиусу-вектору R , соединяющему движущийся приемник с неподвижным источником (рис. IV.3.6, г),

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_2 \cos \theta_2}{u} \right).$$

3°. В самом общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями (рис. IV.3.6, д),

$$v = v_0 \frac{1 + \frac{v_2 \cos \theta_2}{u}}{1 + \frac{v_1 \cos \theta_1}{u}}$$

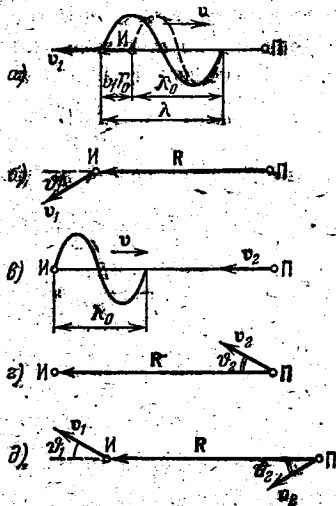


Рис. IV.3.6

Эту формулу можно также представить в виде:

$$v = v_0 \left\{ 1 - \frac{V \cos \theta}{u} \left[1 - \frac{v_1 \cos \theta_1}{u} + \left(\frac{v_1 \cos \theta_1}{u} \right)^2 - \dots \right] \right\},$$

где $V = v_1 - v_2$ — скорость источника волны относительно приемника, а θ — угол между векторами V и R . Величина $V \cos \theta$, равная проекции V на направление R , называется *лучевой скоростью источника*. Если $v_1 \ll v$, то

$$v \approx v_0 \left(1 - \frac{V \cos \theta}{u} \right).$$

Глава IV.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ IV.4.1. Свойства электромагнитных волн

1°. *Электромагнитными волнами* называются возмущения электромагнитного поля (т. е. переменное электромагнитное поле), распространяющиеся в пространстве. Утверждение о существовании электромагнитных волн является непосредственным следствием уравнений Максвелла (III, 14,5.1°). Для электромагнитного

поля вдали от порождающих его свободных электрических зарядов (III.4.3.1°) и макроскопических токов (III.12.4.1°) эти уравнения имеют вид *)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

2°. Если среда — однородный и изотропный диэлектрик (IV.3.1.6°), не обладающий сегнетоэлектрическими (III.4.5.1°) или ферромагнитными (III.12.5.1°) свойствами, то $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$, где ϵ и μ — постоянные скалярные величины, не зависящие ни от координат, ни от времени. В этом случае уравнения Максвелла (п. 1°) можно переписать в форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

или в проекциях на оси декартовых координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

3°. Из уравнений Максвелла (п. 2°) следует, что векторы напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} переменного электромагнитного поля и все их проекции на оси декартовых координат удовлетворяют в однородной, изотропной, непроводящей среде волновому уравнению (IV.3.2.9°):

$$\begin{aligned} \Delta E - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, & \Delta \mathbf{H} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta E_x - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0, & \Delta E_y - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0, & \Delta E_z - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta H_x - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} &= 0, & \Delta H_y - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} &= 0, & \Delta H_z - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, переменное электромагнитное поле действительно распространяется в пространстве в виде волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad \text{где} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

В вакууме $\epsilon = \mu = 1$. Поэтому c — скорость электромагнитных волн в вакууме.

4°. Электромагнитные волны — поперечные волны: векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} поля волны лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, т. е. к вектору ее скорости \mathbf{v} в рассматриваемой точке поля. В этом проще всего убедиться на примере плоской волны, распространяющейся вдоль

*) В главе IV.4 все уравнения записаны в СИ.

положительного направления оси Ox (IV.3.2.4°):

$$E = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{и} \quad H = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Векторы E и H и их проекции на оси координат не зависят от y и z :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Из уравнений Максвелла (п. 2°) следует, что для поля плоской волны

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0,$$

т. е. E_x и H_x не зависят ни от координат, ни от времени. Поэтому для переменного поля плоской волны $E_x = H_x = 0$ и векторы E и H перпендикулярны и направлению распространения волны:

$$E = E_y j + E_z k \quad \text{и} \quad H = H_y j + H_z k,$$

где j и k — орты осей координат.

5°. Векторы E и H поля электромагнитной волны взаимно перпендикулярны, так что v , E и H образуют правую тройку векторов (рис. IV.4.1). Действительно, для поля плоской волны (п. 4°)

$$E_y = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad E_z = f_2\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$H_y = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{и} \quad H_z = \varphi_2\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Из уравнений Максвелла (п. 2°) следует, что

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{dE_y}{d\xi} = \sqrt{\mu\mu_0} \frac{dH_z}{d\xi}$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{dE_z}{d\xi} = -\sqrt{\mu\mu_0} \frac{dH_y}{d\xi},$$

где $\xi = t - \frac{x}{v}$. Поэтому для переменного поля плоской волны

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_z, \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_y \quad \text{и} \quad E H = 0.$$

Взаимно перпендикулярные векторы E и H колеблются в одной фазе — они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений. Модули их связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H,$$

которое справедливо для любой бегущей электромагнитной волны (IV.3.2.1°) независимо от формы ее волновых поверхностей (IV.3.2.3°).

6°. *Монохроматической волной* называется электромагнитная волна одной определенной частоты ν , т. е. синусоидальная электромагнитная волна. В каждой точке электромагнитного поля монохроматической волны проекции векторов E

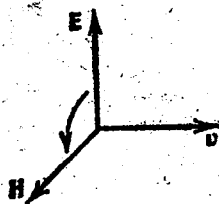


Рис. IV.4.1

и H на оси координат инерциальной системы отсчета совершают гармонические колебания (IV.1.1.3°) одинаковой частоты, равной частоте волны ν . Например, в случае *монокроматической плоской волны*, распространяющейся вдоль положительного направления оси OX ,

$$E_y = A_1 \sin(\omega t - kx), \quad H_z = -\sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_x,$$

$$E_z = A_2 \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_y,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая (круговая) частота волны, k — волновое число (IV.3.2.6°), A_1 и A_2 — амплитуды E_y и E_z , а φ — разность фаз колебаний E_z и E_y .

7°. При произвольном значении φ (п. 6°) плоская монокроматическая волна *эллиптически поляризована*, т. е. в каждой точке поля волны векторы E и H , оставаясь взаимно перпендикулярными, изменяются с течением времени так, что их концы описывают эллипсы, лежащие в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны:

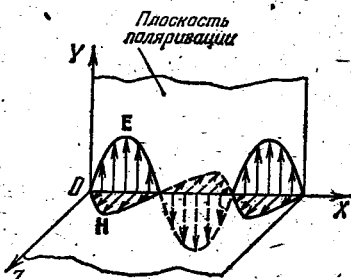


Рис. IV.4.2

$$\frac{E_y^2}{A_1^2} + \frac{E_z^2}{A_2^2} - \frac{2E_y E_z}{A_1 A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi,$$

и

$$\frac{H_y^2}{A_2^2} + \frac{H_z^2}{A_1^2} + \frac{2H_y H_z}{A_1 A_2} \cos \varphi = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0} \sin^2 \varphi.$$

В частности, если $A_1 = A_2$ и $\varphi = \pm(2m+1)\pi/2$, где $m=0, 1, 2, \dots$, то эллипсы превращаются в окружности:

$$E_y^2 + E_z^2 = A_1^2 \quad \text{и} \quad H_y^2 + H_z^2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0} A_1^2.$$

Такая волна называется *циркулярно поляризованной* (поляризованной по кругу).

Если $\varphi = \pm m\pi$, где $m=0, 1, 2, \dots$, то эллипсы вырождаются в прямые:

$$\frac{E_y}{A_1} \pm \frac{E_z}{A_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{H_y}{A_2} \mp \frac{H_z}{A_1} = 0.$$

Такая волна называется *линейно поляризованной* (плоско поляризованной). На рис. IV.4.2 показаны значения векторов E и H воя плоской линейно поляризованной монокроматической волны в различных точках луча (оси OX), взятые в один и тот же момент времени. Оси OY и OZ проведены в направлениях колебаний соответственно векторов E и H , так что $E_z = H_y = 0$. Согласно новой терминологии плоскость, проходящая через электрический вектор E и луч, называется *плоскостью поляризации* линейно поляризованной волны. Прежде эту плоскость называли *плоскостью колебаний* волны, а под плоскостью поляризации понимали плоскость, проходящую через магнитный вектор H и луч (такая терминология еще часто встречается в литературе).

8°. Произвольную плоскую монохроматическую волну можно представить в виде совокупности двух одновременно распространяющихся в том же направлении плоских монохроматических волн той же частоты, которые линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Например, монохроматическую плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси OX (п. 6°), можно рассматривать как результат суперпозиции y -волны ($E_1 = E_y$) и z -волны ($E_2 = E_z$),

§ IV.4.2. Энергия электромагнитных волн

1°. *Объемная плотность энергии электромагнитного поля в линейной изотропной среде (IV.3.1.7°)*

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где ε и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Из соотношения между модулями векторов E и H поля электромагнитной волны (IV.4.1.5°) следует, что *объемная плотность энергии электромагнитных волн*

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH,$$

где c — скорость электромагнитных волн в вакууме (IV.4.1.3°).

2°. В случае плоской линейно поляризованной монохроматической волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси OX , напряженность поля $E = A \sin(\omega t - kx)$. Соответственно объемная плотность энергии этой волны

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 A^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Значение w в каждой точке поля периодически колеблется с частотой ω/π в пределах от 0 до $w_{\max} = \varepsilon\varepsilon_0 A^2$. Среднее за период значение w пропорционально квадрату амплитуды напряженности поля:

$$\langle w \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} w dt = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 A^2.$$

Если плоская монохроматическая волна имеет произвольную (эллиптическую) поляризацию (IV.4.1.7°), то согласно (IV.4.1.8°)

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 [A_1^2 \sin^2(\omega t - kx) + A_2^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)]$$

и

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 (A_1^2 + A_2^2).$$

3°. Вектор плотности потока энергии (IV.3.3.5°) электромагнитной волны называется *вектором Умова — Пойнтинга* \mathbf{P} (иногда его называют *вектором Пойнтинга*). Скорость переноса энергии бегущей монохроматической волной равна фазовой скорости этой волны $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ (IV.3.3.5°). Поэтому вектор Умова — Пойнтинга для такой волны

$$\mathbf{P} = w\mathbf{v} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

В случае плоской линейно поляризованной монохроматической волны (п. 2°) вектор Умова — Пойнтинга направлен в сторону распространения волны и числен-

но равен:

$$P = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} A^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Если плоская монохроматическая волна эллиптически поляризована (IV.4.1.7°), то

$$P = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} [A_1^2 \sin^2(\omega t - kx) + A_2^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)].$$

4°. *Интенсивностью электромагнитной волны* называется физическая величина I , численно равная энергии, которую переносит волна за единицу времени через единицу площади поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны. Интенсивность электромагнитной волны равна модулю среднего значения вектора Умова — Пойнтинга за период его полного колебания:

$$I = \langle \mathbf{P} \rangle.$$

Интенсивность бегущей монохроматической волны

$$I = \langle w \rangle v,$$

где v — фазовая скорость волны, $\langle w \rangle$ — среднее значение объемной плотности энергии поля волны.

Интенсивность плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны (п. 2°) прямо пропорциональна квадрату амплитуды A колебаний вектора E поля волны:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} A^2.$$

Если плоская монохроматическая волна эллиптически поляризована (IV.4.1.7°), то ее интенсивность равна сумме интенсивностей y - и z -волн, образующих рассматриваемую волну (IV.4.1.8°):

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} (A_1^2 + A_2^2).$$

Примечание. Под *интенсивностью света*, т. е. рассматриваемых в оптике электромагнитных волн, обычно понимают просто квадрат амплитуды колебаний напряженности E поля световой волны.

5°. Интенсивность I сферической линейно поляризованной монохроматической волны связана с амплитудой A колебаний вектора E так же, как и в случае плоской волны (п. 4°). Однако амплитуда и интенсивность сферической волны убывают по мере увеличения расстояния r от центра волны (IV.3.3.6°): $A = a_0/r$ и $I = i_0/r^2$.

6°. Электромагнитные волны производят давление на встречающиеся на их пути препятствия, которые поглощают и отражают эти волны. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под влиянием электрического поля волны заряженные частицы вещества приходят в упорядоченное движение и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца (III.10.1.5°).

Согласно теории Максвелла давление электромагнитных волн

$$p = \frac{I}{v} (1 + R) \cos^2 i = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 i,$$

где I — интенсивность падающей на препятствие волны, v — ее скорость, $\langle w \rangle$ — среднее значение объемной плотности энергии волны, i — угол падения (IV.4.5.2°) и R — коэффициент отражения (IV.4.5.6°).

§ IV.4.3. Излучение электромагнитных волн

1°. Процесс возбуждения электромагнитных волн какой-либо системой в окружающем пространстве называется *излучением* этих волн, а сама система называется *излучающей системой*. Поле электромагнитных волн называется *полем излучения*. Согласно представлениям классической электродинамики электромагнитные волны возбуждаются электрическими зарядами, движущимися с ускорением (в частности, электрической цепью, ток в которой изменяется). В веществе возможно также излучение Вавилова — Черенкова (V.3.6.1°).

Простейшей излучающей системой является электрический диполь (III.2.2.4°), момент p_e которого изменяется с течением времени. Такой «колеблющийся» диполь называется *осциллятором*, или *элементарным вибратором*. Осцилляторами широко пользуются в физике для моделирования и расчета полей излучения реальных систем.

Если излучающая система электронейтральна, а ее размеры малы по сравнению с длиной λ излучаемых волн, то в *волновой зоне* системы, т. е. в точках, отстоящих от системы на расстояниях $g \gg \lambda$, поле излучения близко к полю излучения осциллятора, имеющего такой же электрический момент, как и вся излучающая система.

2°. *Линейным гармоническим осциллятором* называется электрический диполь, момент p_e которого изменяется по гармоническому закону:

$$p_e = p_0 \sin \omega t, \quad \text{где } p_0 = \text{const.}$$

В точке M волновой зоны линейного гармонического осциллятора, находящегося в вакууме, векторы E и H поля излучения в момент времени t равны:

$$E(t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r^3} [[p_0 r] r] \sin(\omega t - kr),$$

$$H(t) = -\frac{\omega^2}{4\pi cr^2} [p_0 r] \sin(\omega t - kr),$$

где r — радиус-вектор, проведенный из точки O , где находится диполь, в точку M (рис. IV.4.3). Векторы E и H взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору r , так что E , H и r образуют правую тройку. Вектор E направлен по касательной к меридиану, а вектор H — по касательной к широтному кругу, проведенному через точку M на сфере радиуса r с центром в точке O .

3°. Вектор Умова — Пойнтинга в точке M волновой зоны линейного гармонического осциллятора

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2 \phi}{16\pi^2 cr^3} r \sin^2(\omega t - kr),$$

где ϕ — угол между векторами p_0 и r .

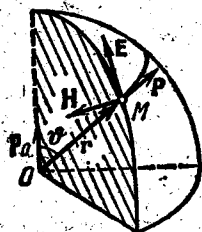


Рис. IV.4.3

Интенсивность электромагнитной волны в точке M

$$I = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 cr^2}$$

Зависимость I от θ при фиксированном значении r , изображенная в полярных координатах (рис. IV.4.4), называется *полярной диаграммой направленности излучения осциллятора (диполя)*. Диполь сильнее всего излучает в направлениях, составляющих с его осью угол $\theta = \pi/2$, т. е. в плоскости, проходящей через середину диполя перпендикулярно его оси. Вдоль своей оси ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) диполь не излучает совсем.

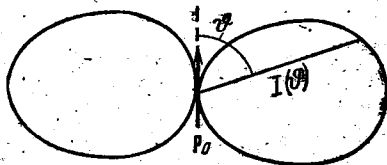


Рис. IV.4.4

Средняя мощность излучения линейного гармонического осциллятора

$$\langle N \rangle = 2\pi r^2 \int_0^\pi I \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$$

4°. Мгновенная мощность излучения заряда q , движущегося с ускорением a ,

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

Если заряд совершает гармонические колебания с амплитудой l_0 и циклической частотой ω , то средняя мощность его излучения

$$\langle N \rangle = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 l_0^2}{12\pi c}$$

Согласно классической теории, излучение света атомами обусловлено колебаниями в них электронов. Благодаря расходу энергии на излучение эти колебания постепенно затухают, т. е. их амплитуда изменяется по закону (IV.2.1.3°): $l_0 = l_{00} \exp(-\beta t)$, где l_{00} — начальная амплитуда, а β — коэффициент затухания.

Энергия колебаний электрона (IV.1.2.2°) $W = \frac{1}{2} m_e \omega^2 l_0^2$, где m_e — масса электрона. Так как $-dW = \langle N \rangle dt = 2\beta W dt$ и $q = -e$, то время релаксации (IV.2.1.3°) этих колебаний, называемое *средним временем высвечивания атома*,

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{12\pi c m_e}{\mu_0 e^2 \omega^3}$$

Для видимого света $\omega \sim 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ и $\tau \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$.

§ IV.4.4. Шкала электромагнитных волн

1°. В зависимости от частоты ν (или длины волны в вакууме $\lambda = c/\nu$, где c — скорость электромагнитных волн в вакууме), а также способа излучения и регистрации различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны, оптическое излучение, рентгеновское излучение и гамма-лучи.

Радиоволнами называются электромагнитные волны, длина λ которых в вакууме больше $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ (соответственно $\nu < 6 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$). В связи с особенностями распространения и генерации весь диапазон радиоволн принято делить на 9 поддиапазонов (табл. IV.4.1).

Таблица IV.4.1

Название поддиапазона	Длина волны, м.	Частота, Гц
Сверхдлинные волны	более 10^6	менее $3 \cdot 10^4$
Длинные волны	$10^4 - 10^5$	$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$
Средние волны	$10^3 - 10^4$	$3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^6$
Короткие волны	$10^2 - 10^3$	$3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7$
Метровые волны	10—1	$3 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8$
Дециметровые волны	1—0,1	$3 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^9$
Сантиметровые волны	0,1—0,01	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{10}$
Миллиметровые волны	$10^{-2} - 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{11}$
Субмиллиметровые волны	$10^{-3} - 5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{11} - 6 \cdot 10^{12}$

2°. Деление радиочастот на 12 диапазонов согласно международному регламенту радиосвязи и соответствующее деление радиоволн по их длине в вакууме приведено в табл. IV.4.2.

Таблица IV.4.2

Наименование диапазона радиочастот		Границы диапазонов	Наименование диапазона радиоволн	Границы диапазонов
Основной термин	Параллельный термин		Параллельный термин	
1-й диапазон	Крайне низкие, КНЧ	3—30 Гц	Декаметровые	100—10 Мм
2-й то же	Сверхнизкие, СНЧ	30—300 Гц	Метровые	10—1 Мм
3-й	Инфранизкие, ИНЧ	0,3—3 кГц	Гектокилометровые	1000—100 км
4-й	Очень низкие, ОНЧ	3—30 кГц	Метрические	100—10 км
5-й	Низкие частоты, НЧ	30—300 кГц	Километровые	10—1 км
6-й	Средние частоты, СЧ	0,3—3 МГц	Гектометровые	1—0,1 км
7-й	Высокие частоты, ВЧ	3—30 МГц	Дециметровые	100—10 м
8-й	Очень высокие, ОВЧ	30—300 МГц	Метровые	10—1 м
9-й	Ультравысокие, УВЧ	0,3—3 ГГц	Дециметровые	1—0,1 м
10-й	Сверхвысокие, СВЧ	3—30 ГГц	Сантиметровые	10—1 см
11-й	Крайне высокие, КВЧ	30—300 ГГц	Миллиметровые	10—1 мм
12-й	Гипервысокие, ГВЧ	0,3—3 ТГц	Децимиллиметровые	1—0,1 мм

3°. *Оптическим излучением*, или *светом*, называются электромагнитные волны (электромагнитное излучение), длины которых в вакууме лежат в диапазоне от 10 нм до 1 мм (границы условны). К оптическому излучению относятся инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения*).

Инфракрасным излучением (ИК) называется электромагнитное излучение, испускаемое нагретыми телами, длины волн которого в вакууме лежат в пределах от 1 мм до 770 нм (1 нм = 10^{-9} м).

Видимым излучением, или *видимым светом*, называется электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме от 770 до 380 нм, которое способно непосредственно вызывать зрительное ощущение в человеческом глазе.

Ультрафиолетовым излучением (УФ) называется электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме от 380 до 10 нм.

4°. *Рентгеновским излучением*, или *рентгеновскими лучами*, называется электромагнитное излучение, которое возникает при взаимодействии заряженных частиц и фотонов (V.6.1.4°) с атомами вещества и характеризуется длинами волн в вакууме, лежащими в широком диапазоне с условными границами от 10—100 нм до 0,01—1 пм (1 пм = 10^{-12} м).

Гамма-излучением, или *гамма-лучами*, называется электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме менее 0,1 нм, которое испускается возбужденными атомными ядрами при радиоактивных превращениях и ядерных реакциях, а также возникает при распаде частиц, аннигиляции пар «частица — античастица» (VIII.2.1.7°) и других процессах.

§ IV.4.5. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектрических сред

1°. *Показателем преломления (абсолютным показателем преломления) среды* называется величина n , равная отношению скорости c электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости v в среде: $n = cv$. Из IV.4.1.3° следует, что $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, где ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для среды, не обладающей ферромагнитными свойствами, $\mu \approx 1$ и $n \approx \sqrt{\epsilon}$.

Относительным показателем преломления двух сред (второй среды по отношению к первой) называется величина n_{21} , равная отношению показателей преломления этих сред: $n_{21} = n_2/n_1$. Для неферромагнитных сред $n_{21} = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$.

2°. Электромагнитная волна, падая на границу раздела двух сред, частично отражается от поверхности раздела, а частично преломляется, переходя во вторую среду. На рис. IV.4.5 линия AB — плоская граница раздела сред. Лучи l , l' и 2 характеризуют направления распространения падающей, отраженной и преломленной плоских волн. Они называются соответственно *падающим лучом*, *отраженным лучом* и *преломленным лучом*, а углы между ними и перпендикуляром ab к

* Согласно рекомендации Комитета Научно-технической терминологии АН СССР («Физическая оптика» (терминология), Сборник рекомендуемых терминов, вып. 74, «Наука», 1968) в оптическое излучение включается также и рентгеновское излучение; соответственно диапазон длин волн оптического излучения устанавливается от 0,1 Å (10^{-11} м) до 1 см.

поверхности раздела сред, проведенным в точке падения O , называются: i — *угол падения*, i' — *угол отражения* и r — *угол преломления*.

Плоскостью падения называется плоскость, проходящая через падающий луч и перпендикуляр к поверхности раздела сред в точке падения.

3°. Закономерности отражения и преломления электромагнитных волн на поверхности раздела двух диэлектрических сред можно получить, исходя из граничных условий для электромагнитного поля (III.14.5.4°). В первой среде на поле падающей волны (E^0, H^0) накладывается поле отраженной волны ($E^{отр}, H^{отр}$). Во второй среде имеется поле только преломленной (проходящей в эту среду) волны ($E^{пр}, H^{пр}$). Поэтому граничные условия имеют вид (предполагается, что $\mu_2 = \mu_1 = 1$):

$$\begin{aligned} E_{\tau}^0 + E_{\tau}^{отр} &= E_{\tau}^{пр}, & \varepsilon_1 (E_n^0 + E_n^{отр}) &= \varepsilon_2 E_n^{пр}, \\ H_{\tau}^0 + H_{\tau}^{отр} &= H_{\tau}^{пр}, & H_n^0 + H_n^{отр} &= H_n^{пр}. \end{aligned}$$

Здесь E_{τ}, H_{τ} и E_n, H_n — проекции векторов E и H соответственно на касательную плоскость и нормаль к границе раздела сред. Из этих соотношений вытекает, что при падении на гладкую плоскую поверхность раздела сред плоской монохроматической волны выполняются (независимо от характера поляризации этой волны) следующие законы:

- а) отраженная и преломленная волны также являются монохроматическими волнами той же частоты, что и падающая;
- б) *закон отражения* — отраженный луч лежит в плоскости падения, причем угол отражения равен углу падения ($i' = i$);
- в) *закон преломления*. — преломленный луч лежит в плоскости падения, а угол преломления связан с углом падения соотношением:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (\text{закон Снеллиуса}).$$

4°. С помощью граничных условий (п. 3°) можно также найти соотношения между фазами, амплитудами и интенсивностями падающей, отраженной и преломленной монохроматических волн. Для этого достаточно, согласно IV.4.1.8°,

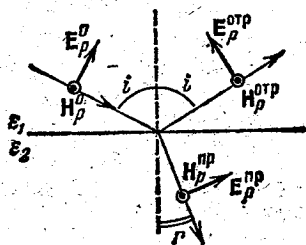


Рис. IV.4.6

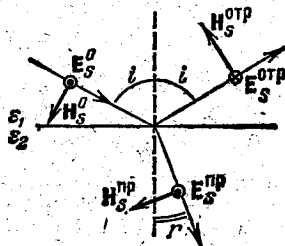


Рис. IV.4.7

знать указанные соотношения для линейно поляризованных волн двух типов: *p-волны*, вектор $E = E_p$ которой лежит в плоскости падения, а вектор $H = H_p$ перпендикулярен к ней (рис. IV.4.6), и *s-волны*, вектор $E = E_s$ которой перпендикулярен плоскости падения, а вектор $H = H_s$ лежит в ней (рис. IV.4.7).

Связь между амплитудами колебаний вектора E в падающей (A_p^0), отраженной ($A_p^{\text{отр}}$) и преломленной ($A_p^{\text{пр}}$) волнах в случае p - и s -волн выражается формулами Френеля:

$$A_p^{\text{отр}} = -A_p^0 \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}, \quad A_p^{\text{пр}} = A_p^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)},$$

$$A_s^{\text{отр}} = -A_s^0 \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad A_s^{\text{пр}} = A_s^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}.$$

В частности, при нормальном падении волн на поверхность раздела сред ($i=r=0$)

$$A_p^{\text{отр}} = -A_p^0 \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}, \quad A_p^{\text{пр}} = A_p^0 \frac{2}{n_{21} + 1},$$

$$A_s^{\text{отр}} = -A_s^0 \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}, \quad A_s^{\text{пр}} = A_s^0 \frac{2}{n_{21} + 1}.$$

В формулах Френеля A_p^0 и A_s^0 — величины положительные, а $A_p^{\text{пр}}$ и $A_s^{\text{пр}}$ при любых возможных значениях угла падения и угла преломления также положительны, что свидетельствует о совпадении фаз преломленной и падающей волн. Величины $A_p^{\text{отр}}$ и $A_s^{\text{отр}}$ могут быть как отрицательными, так и положительными. В первом случае, изображенном на рис. IV.4.6 и IV.4.7, фаза колебаний вектора E изменяется при отражении на π (фаза колебаний вектора H при этом не изменяется). Во втором случае отражение происходит без изменения фазы колебаний вектора E (соответственно фаза колебаний вектора H изменяется на π).

5°. Значения сдвига фаз колебаний вектора E при отражении электромагнитных волн p - и s -типа в зависимости от условий (от угла падения i и относительного показателя преломления сред n_{21}) приведены в табл. IV.4.3.

Таблица IV.4.3

Условия Тип волны	$i+r < \pi/2$ ($i < i_{\text{Бр}}$)		$i+r > \pi/2$ ($i > i_{\text{Бр}}$)	
	$n_{21} > 1$ ($i > r$)	$n_{21} < 1$ ($i < r$)	$n_{21} > 1$ ($i > r$)	$n_{21} < 1$ ($i < r$)
p -волна	π	0	0	π
s -волна	π	0	π	0

Угол падения $i_{\text{Бр}}$, при котором отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны, называется *углом Брюстера*. Если $i = i_{\text{Бр}}$, то $i+r = \pi/2$ и из закона преломления волн (п. 3°) следует, что $\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n_{21}$. Из формул Френеля (п. 4°) видно, что при $i = i_{\text{Бр}}$ амплитуда $A_p^{\text{отр}} = 0$, т. е. p -волна не отражается от поверхности раздела сред, а полностью проходит из 1-й среды во 2-ю.

6°. Коэффициентом отражения R электромагнитной волны от поверхности раздела двух сред называется отношение интенсивностей (IV.4.2.4°) отраженной и падающей волн:

$$R = (I_{\text{отр}}/I^0) = (A_{\text{отр}}/A^0)^2.$$

Коэффициенты отражения p - и s -волн равны:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}, \quad R_s = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

В частности, при нормальном падении волны на поверхность раздела сред ($i=r=0$)

$$R_p = R_s = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2.$$

Если падающая волна поляризована произвольным образом, то коэффициент отражения

$$R = \frac{I_p^{\text{отр}} + I_s^{\text{отр}}}{I_p^0 + I_s^0} = \frac{R_p I_p^0 + R_s I_s^0}{I_p^0 + I_s^0},$$

где I_p^0 и I_s^0 — интенсивности p - и s -составляющих падающей волны, интенсивность которой $I^0 = I_p^0 + I_s^0$.

T . Коэффициентом пропускания T называется отношение интенсивностей проходящей (преломленной) и падающей волн:

$$T = \frac{I_{\text{пр}}}{I^0} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \left(\frac{A_{\text{пр}}}{A^0} \right)^2 = n_{21} \left(\frac{A_{\text{пр}}}{A^0} \right)^2.$$

Коэффициенты пропускания для p - и s -волн:

$$T_p = \frac{4 \cos^2 i \sin i \sin r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)}, \quad T_s = \frac{4 \cos^2 i \sin i \sin r}{\sin^2(i+r)}.$$

В частности, при нормальном падении волны на поверхность раздела сред ($i=r=0$)

$$T_p = T_s = \frac{4n_{21}}{(n_{21} + 1)^2}.$$

8°. Если $n_{21} = (n_2/n_1) < 1$, то угол преломления больше угла падения: $\sin r = \sin i/n_{21}$ и $r > i$. Угол падения, при котором угол преломления становится равным $\pi/2$, называется *предельным углом* $i_{\text{пр}}$ (или *критическим углом*). Угол $i_{\text{пр}} = \arcsin n_{21}$. Если $i \geq i_{\text{пр}}$, то интенсивности отраженной и падающей волн одинаковы, т. е. волна полностью отражается от поверхности раздела сред ($R=1$). Это явление называется *полным внутренним отражением*.

§ IV.4.6. Эффект Доплера

1°. При движении источника и приемника электромагнитных волн друг относительно друга наблюдается эффект Доплера (IV.3.6.1°). Закономерности этого явления для электромагнитных волн можно установить на основе специальной теории относительности. Пусть приемник Π неподвижен относительно инерциальной системы отсчета K , а источник I движется относительно K вдоль положительного направления оси OX со скоростью V (рис. IV.4.8). Источник I неподвижен в системе отсчета K' и находится в ее начале координат. Оси координат систем K' и K попарно параллельны (ось $O'X'$ совпадает с OX). На рис. IV.4.8

показано положение источника I в момент времени $t=t'=0$, когда источник проходит через начало координат системы отсчета K . Согласно принципу относительности Эйнштейна (1.5.1.2°) уравнения сферической монохроматической волны (IV.3.2.8°), посылаемой источником в этот момент времени в направлении приемника Π , в системах отсчета K и K' имеют тождественный вид:

$$\tilde{s} = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t + kx \cos \theta + ky \sin \theta + \delta)} \quad (a)$$

и

$$\tilde{s}' = \frac{a_0'}{r'} e^{i(\omega' t' + k' x' \cos \theta' + k' y' \sin \theta' + \delta')} \quad (б)$$

Здесь $\omega' = \omega_0$ и ω — циклические частоты колебаний источника и приемника, $k = \omega/c$ и $k' = \omega'/c$ — волновые числа (предполагается, что волна распространяется в вакууме), а θ и θ' — углы между направлением наблюдения и скоростью V (ось OX), измеренные в системах отсчета приемника K и источника K' .

Выражение (б) должно получаться из (а) путем замены переменных x, y и t на x', y' и t' в соответствии с преобразованиями Лоренца (1.5.3.2°)

$$\begin{aligned} \omega' t' + k' x' \cos \theta' + k' y' \sin \theta' + \delta' &= \\ &= \omega \left(\frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) + k \left(\frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) \cos \theta + ky' \sin \theta + \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta \right), \\ k' \cos \theta' &= \frac{k}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \left(\cos \theta + \frac{V}{c} \right), \\ k' \sin \theta' &= k \sin \theta \quad \text{и} \quad \delta' = \delta. \end{aligned}$$

Поэтому соотношения, описывающие эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме, имеют вид:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta}$$

2°. При небольших скоростях движения источника волн относительно приемника ($V \ll c$) релятивистская формула для эффекта Доплера (п. 1°) совпадает с классической (IV.3.6.3°):

$$\nu \approx \nu_0 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right).$$

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой ($\theta = 0, \pi$), то наблюдается продольный эффект Доплера. В случае сближения источника и приемника ($\theta = \pi$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} > \nu_0,$$

а в случае их взаимного удаления ($\vartheta=0$)

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}} < v_0.$$

3°. Из релятивистской теории эффекта Доплера (п. 1°) следует существование *поперечного эффекта Доплера*, наблюдающегося при $\vartheta=\pi/2$ и $\vartheta=3\pi/2$, т. е. в тех случаях, когда источник движется перпендикулярно к линии наблюдения:

$$v = v_0 \sqrt{1-(V/c)^2}.$$

Поперечный эффект Доплера значительно слабее продольного (ввиду малости V/c). Этот эффект обусловлен различием хода времени в системах отсчета, связанных с приемником и источником волн. Поэтому обнаружение на опыте поперечного эффекта Доплера явилось одним из важнейших экспериментальных подтверждений специальной теории относительности.

4°. Эффект Доплера, связанный с тепловым движением излучающих свет атомов газа, вызывает *доплеровское уширение спектральных линий*. Интервал частот света, регистрируемых приемником, простирается от $v_0 - \frac{\Delta v_D}{2}$ до

$v_0 + \frac{\Delta v_D}{2}$, где v_0 — частота монохроматического излучения неподвижного атома.

Величина доплеровского уширения $\Delta v_D \sim \sqrt{T/m}$, где T — абсолютная температура газа, а m — масса атома.

Глава V.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

§ V.1.1. Монохроматичность и временная когерентность света

1°. *Оптикой* называется раздел физики, занимающийся изучением природы света (IV.4.4.3°), закономерностей его искуствания, распространения и взаимодействия с веществом. В *волновой оптике* рассматриваются оптические явления, в которых проявляется волновая природа света (например, явления интерференции, дифракции, поляризации и дисперсии света). Так как свет представляет собой электромагнитные волны, то в основе волновой оптики лежат уравнения Максвелла (III.14.5.1°) и вытекающие из них соотношения для электромагнитных волн (IV.4.1). В классической волновой оптике рассматриваются среды, линейные по своим оптическим свойствам (IV.3.1.7°), т. е. такие, диэлектрическая ϵ и магнитная μ проницаемости которых не зависят от интенсивности света (IV.4.2.4°). Поэтому в волновой оптике справедлив принцип суперпозиции (IV.3.4.1°).

Явления, наблюдающиеся при распространении света в оптически нелинейных средах, исследуются в *нелинейной оптике*. Нелинейные оптические эффекты становятся существенными при очень больших интенсивностях света, излучаемого мощными лазерами (VI.2.6.8°).

2°. Экспериментально установлено, что действие света на фотоземлет, фотопленку, флюоресцирующий экран и др. устройства для его регистрации определяется вектором электрической напряженности E электромагнитного поля световой волны, который поэтому иногда называют *световым вектором*. К такому же выводу приводит и классическая электронная теория, согласно которой процессы, вызываемые светом в веществе, связаны с действием поля световой волны на заряженные частицы вещества — электроны и ионы. Частота видимого и более коротковолнового света столь велика ($\nu \geq 10^{15}$ Гц), что сколько-нибудь значительные по амплитуде вынужденные колебания могут совершать только электроны. Сила, действующая на электрон со стороны электромагнитного поля (III.10.1.6°),

$$F = -e \{ E + [v_1 B] \} = -e \{ E + \mu_0 [v_1 H] \}.$$

Здесь $-e$ и v_1 — заряд и скорость электрона, а $B = \mu_0 H$ — вектор магнитной индукции. Из (IV.4.1.5°) следует, что абсолютная величина магнитной составляющей силы F значительно меньше ее электрической составляющей:

$$\mu_0 | [v_1 H] | \ll \mu_0 v_1 H = \frac{v_1}{v} E \ll E \quad \text{и} \quad F \approx -eE,$$

так как скорость электромагнитных волн $v \sim 10^8$ м/с, а скорость электрона в атоме при вынужденных колебаниях под действием света $v_1 \sim 10^6$ м/с.

3°. При наложении света от двух нелазерных источников *) (например, одинаковых газоразрядных ламп) или даже от разных участков одного и того

*) Имеются в виду обычные источники света (лампы накаливания и газоразрядные, электрическая дуга и т. п.), основанные на явлении спонтанного излучения (VI.2.6.6°).

же источника интерференция (IV.3.5.2°) не наблюдается. Следовательно, независимые источники света некогерентны (IV.3.5.1°), а их излучение немонохроматично (IV.4.1.6°). Причины этого заключены в самом механизме излучения света атомами (молекулами, ионами) источника света. Возбужденный атом излучает в течение очень короткого промежутка времени высвечивания $\tau \sim 10^{-8}$ с (IV.4.3.4°), после чего он, расстратив свою избыточную энергию на излучение, возвращается в нормальное (невозбужденное) состояние. Через некоторый промежуток времени атом может вновь возбудиться, получив энергию извне, и начать излучать. Такое прерывистое излучение света атомами в виде отдельных кратковременных импульсов — *кругов волны* — характерно для любого источника света независимо от вида конкретных процессов, происходящих в нем и вызывающих возбуждение его атомов. При спонтанном излучении (VI.2.6.6°) атомы излучают независимо друг от друга со случайными начальными фазами, беспорядочно изменяющимися от одного акта излучения атома к другому. Поэтому спонтанно излучающие атомы представляют собой некогерентные источники света.

Иначе обстоит дело в случае вынужденного излучения, возникающего в неравновесной (активной) среде под действием переменного электромагнитного поля (VI.2.6.1°). Вынужденное излучение *вокруг* частиц системы когерентно с возбуждающим его монохроматическим излучением, имеет ту же частоту, поляризацию и направление распространения. Эти особенности вынужденного излучения используются в квантовых генераторах — лазерах и мазерах (VI.2.6.8°).

4°. Реальная волна, излучаемая в течение ограниченного промежутка времени и охватывающая ограниченную область пространства, не является монохроматической. Спектр ее циклических частот (IV.1.4.7°) имеет конечную ширину $\Delta\omega$, т. е. включает циклические частоты от $\omega - \Delta\omega/2$ до $\omega + \Delta\omega/2$. Такую волну можно приближенно рассматривать в течение промежутка времени $\Delta t < \tau_{\text{ког}} = \pi/\Delta\omega$ как монохроматическую волну с циклической частотой ω . Величина $\tau_{\text{ког}}$ называется *временем когерентности монохроматической волны*. За промежуток времени, равный $\tau_{\text{ког}}$, разность фаз колебаний, соответствующих волнам с частотами $\omega + \Delta\omega/2$ и $\omega - \Delta\omega/2$, изменяется на π . Волна с циклической частотой ω и фазовой скоростью v распространяется за это время на расстояние $l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}} = \pi v/\Delta\omega$.

Величина $l_{\text{ког}}$ называется *длиной когерентности* или *длиной гармонического цуа*, соответствующего рассматриваемой немонохроматической волне. Чем данная волна ближе к монохроматической, тем меньше ширина $\Delta\omega$ спектра ее частот и тем больше ее время и длина когерентности. Например, для видимого солнечного света, имеющего сплошной спектр частот от $4 \cdot 10^{14}$ до $8 \cdot 10^{14}$ Гц, $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-14}$ с и $l_{\text{ког}} \sim 10^{-6}$ м. Время когерентности вынужденного излучения значительно больше времени высвечивания атома (IV.4.3.4°). Например, для лазеров непрерывного действия $\tau_{\text{ког}}$ достигает 10^{-2} с, а $l_{\text{ког}} \sim 10^8$ м.

§ V.1.2. Интерференция света. Пространственная когерентность

1°. Для получения когерентных световых волн с помощью обычных (нелазерных) источников применяют метод *разделения света* от одного источника на две или несколько систем волн. В каждой из них представлено излучение одних и тех же атомов источника, так что в силу общности происхождения эти си-

стемы волн когерентны между собой и интерферируют при наложении. Разделение света на когерентные системы волн можно осуществить путем его отражения или преломления.

На рис. V.1.1 показана в качестве примера схема, называемая *бизеркалом Френеля*. Свет от точечного источника S падает на два плоских зеркала A_1O и A_2O , расположенных перпендикулярно к плоскости рисунка и соединенных по линии O . Угол α между плоскостями зеркал очень мал. Свет от источника S распространяется после отражения от зеркал в виде двух пучков с центрами в точках S_1 и S_2 , являющихся мнимыми изображениями источника S в зеркалах. Эти пучки когерентны и при наложении дают на экране \mathcal{E} интерференционную картину (область BC , называемая *полем интерференции*). Результат интерференции в некоторой точке M экрана зависит от длины волн света λ и разности хода волн (IV.3.5.2°) от когерентных мнимых источников S_1 и S_2 до точки M :

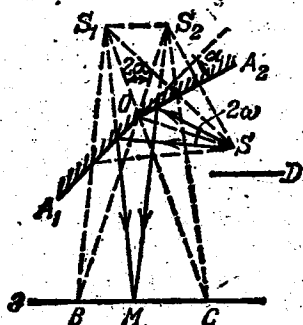


Рис. V.1.1

$$\Delta = r_2 - r_1 = MS_2 - MS_1.$$

Начальные фазы колебаний источников S_1 и S_2 одинаковы. Поэтому условия интерференционных максимумов и минимумов (IV.3.5.2°) имеют вид:

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \text{ — максимум } m\text{-го порядка} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$r_2 - r_1 = \pm (2m - 1) \frac{\lambda}{2} \text{ — минимум } m\text{-го порядка} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Угол 2ω при вершине S между двумя лучами света, которые после отражения от зеркал A_1O и A_2O сходятся в точке M интерференционной картины, назы-

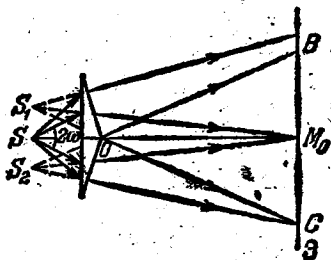


Рис. V.1.2

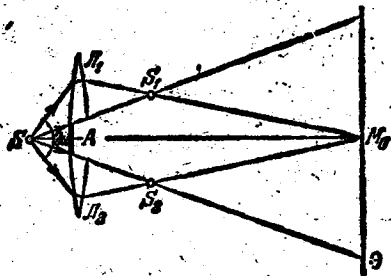


Рис. V.1.3.

вается *апертурой интерференции*. Этот угол обычно мало меняется при изменении положения точки M в пределах интерференционного поля.

2°. Схемы наблюдения интерференции света с помощью *бипризмы Френеля* (рис. V.1.2) и *бипризм Бийе* (рис. V.1.3) подобны схеме с бизеркалом. Бипризма состоит из двух одинаковых трехгранных призм, сложенных основаниями и изготовленных как одно целое. Преломляющие углы α при верхней и нижней вершине бипризмы очень малы (порядка долей градуса). Свет от источника S

преломляется в бипризме и распространяется за ней в виде двух систем волн, соответствующих когерентным мнимым источникам света S_1 и S_2 . Интерференция этих волн наблюдается в области их перекрытия на экране \mathcal{E} .

Билинза представляет собой две половины L_1 и L_2 собирающей линзы, разрезанной по диаметру. Обе половины слегка разведены, благодаря чему они дают два не совпадающих между собой действительных изображения S_1 и S_2 точечного источника света S . Интерференция света от этих когерентных вторичных источников наблюдается на экране \mathcal{E} . Промежуток между частями L_1 и L_2 билинзы закрыт непрозрачным экраном A .

На рис. V.1.2 и V.1.3 показаны значения апертуры интерференции 2ω для центральной точки M_0 интерференционной картины, получаемой с помощью бипризмы и билинзы.

3°. *Шириной интерференционной полосы* называется расстояние между двумя соседними интерференционными максимумами (или минимумами). В случае биезеркала Френеля и аналогичных ему схем осуществления интерференции (бипризма, билинза и т. п.) ширина интерференционной полосы равна ($V.3.5.2^\circ$) $\lambda L/l$. Здесь l — расстояние между источниками S_1 и S_2 , а L — расстояние от них до экрана \mathcal{E} . Длина волны видимого света очень мала ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м). Поэтому для получения интерференционных полос такой ширины, чтобы их можно было различать глазом, должно выполняться условие: $l \ll L$. Соответственно угол α в биезеркале и преломляющие углы α у бипризмы должны быть очень малы.

Возможность наблюдения интерференционных полос зависит также от их контрастности, т. е. от степени различия освещенностей экрана в максимумах и минимумах. Освещенность пропорциональна интенсивности I падающего света. Количественной характеристикой контрастности интерференционной картины служит безразмерная величина — *видимость полос*

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

где I_{\max} и I_{\min} — значения интенсивности света в интерференционных максимумах и минимумах на экране. Глаз уверенно различает полосы, если их видимость $V > 0,1$, т. е. если $I_{\min} < 0,82 I_{\max}$.

При наложении двух одинаково поляризованных когерентных монохроматических волн, амплитуды и интенсивности которых равны A_1, I_1 и A_2, I_2 , видимость интерференционных полос

$$V = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}$$

Видимость полос максимальна ($V=1$), если $A_1=A_2$.

4°. В интерференционной схеме типа биезеркала Френеля, освещаемого точечным источником S (рис. V.1.1), накладывающиеся волны, в действительности, никогда не бывают идеально монохроматическими (V.1.1.3°). Соответственно эти волны только *частично когерентны*. Они способны интерферировать лишь при условии, что колебания, возбуждаемые ими в рассматриваемой точке M экрана, соответствуют одному и тому же гармоническому пугу излучения источника S (V.1.1.4°), т. е. если

$$|r_2 - r_1| < v\tau_{\text{ког}} \quad \text{или} \quad |r_2 - r_1| < l_{\text{ког}}$$

Здесь $r_2 - r_1$ — разность хода накладывающихся волн, v — их скорость, а $\tau_{\text{ког}}$ и $l_{\text{ког}}$ — время и длина когерентности света источника S (V.1.1.4°). В точке M осуществляется сложение *частично когерентных колебаний*, возбуждаемых одним и тем же источником S в различные моменты времени t и $t + \tau$, где $\tau = |r_2 - r_1|/v$. Поэтому видимость интерференционной картины в такого рода установках существует в том виде, в каком она существует в установках с *временной когерентностью колебаний*, которая ограничивается степенью монохроматичности света источника S , т. е. временем его когерентности $\tau_{\text{ког}}$ (V.1.1.4°). При $\tau \ll \tau_{\text{ког}}$ складываемые колебания практически полностью когерентны и видимость интерференционных полос (при равной интенсивности накладываемых волн) $V \approx 1$. Если же $\tau \gg \tau_{\text{ког}}$, то складываемые колебания некогерентны и не интерферируют ($V = 0$).

Таким образом, для наблюдения интерференции света при больших разностях хода $r_2 - r_1$ (соответственно, при больших значениях τ), необходимо, чтобы свет обладал достаточно большим временем когерентности, т. е. чтобы он имел достаточно высокую степень монохроматичности.

5°. Положения на экране всех интерференционных максимумов, кроме максимума нулевого порядка, зависят от длины волны света. Для двух длин волн λ_1 и λ_2 максимумы m -го порядка смещены друг относительно друга тем сильнее, чем больше m . Поэтому с ростом m ухудшается видимость интерференционных полос, получающихся при освещении бисеркала Френеля монохроматическим светом: полосы, соответствующие свету с разными значениями λ , накладываются друг на друга, и интерференционная картина смазывается.

Пусть длины волн света заключены в пределах от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, а циклические частоты — от ω до $\omega - \Delta\omega$, где $\Delta\omega = 2\pi \Delta\lambda/\lambda^2$. Тогда, согласно критерию Рэлея, интерференционная картина остается еще различимой до максимума порядка m_0 для света с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda > 0$), который накладывается на экране на ближайший к нему интерференционный минимум для света с длиной волны λ :

$$m_0(\lambda + \Delta\lambda) = (2m_0 + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{откуда} \quad m_0 = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

Таким образом, интерференцию можно наблюдать при разностях хода волн, удовлетворяющих условию:

$$|r_2 - r_1| \leq \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = \frac{\pi v}{\Delta\omega} = v\tau_{\text{ког}}.$$

Этот результат согласуется с оценкой, произведенной в п. 4° на основе представлений о временной когерентности колебаний.

6°. Частично когерентный свет, общая интенсивность которого равна I , можно рассматривать как совокупность двух составляющих — когерентной с интенсивностью γI , где γ — степень когерентности света, и некогерентной с интенсивностью $(1 - \gamma)I$. При наложении частично когерентных волн интерферируют только их когерентные составляющие. Некогерентные составляющие создают равномерный фон интерференционной картины. Поэтому по мере уменьшения степени когерентности света видимость интерференционных полос V уменьшается:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \gamma.$$

Если интенсивности частично когерентных волн одинаковы, то $V = \gamma$.

7°. Обычно в интерференционной установке с бисеркалом (или бипризмой) используют не точечный источник света S , а ярко освещенную узкую щель, параллельную ребру O бисеркала. В этом случае интерференционные картины, получающиеся на экране от разных участков по длине щели, сдвинуты друг относительно друга вдоль направления щели S . Соответственно на экране наблюдается система интерференционных полос, параллельных ребру O бисеркала.

Видимость интерференционных полос уменьшается по мере увеличения ширины щели S . Это связано с тем, что интерференционные полосы, получающиеся на экране от различных узких щелей, на которые можно мысленно разбить щель S , смещены друг относительно друга. Интерференционная картина в монохроматическом свете с длиной волны λ получается отчетливой, если выполняется приближенное условие:

$$b \sin \omega \leq \lambda/4,$$

где b — ширина щели, а 2ω — апертура интерференции (н. д°).

8°. На рис. V.1.4 показана принципиальная схема осуществления интерференции света по методу Юнга. Источником света служит ярко освещенная узкая щель S в экране A_1 . Свет от нее падает на второй непрозрачный экран A_2 , в котором имеются две одинаковые узкие щели S_1 и S_2 , параллельные S . В пространстве за экраном A_2 распространяются две системы цилиндрических волн, интерференция которых наблюдается на экране \mathcal{E} . Видимость интерференционных полос при небольших разностях хода определяется главным образом степенью согласованности протекания колебаний в точках щелей S_1 и S_2 , которые можно рассматривать в качестве «источников» интерферирующих на экране волн.

9°. Когерентность колебаний, которые совершаются в один и тот же момент времени в разных точках плоскости Q , перпендикулярной направлению распространения волны, называют *пространственной когерентностью* (в отличие от временной когерентности колебаний, совершающихся в одной и той же точке, но в разные моменты времени).

Пространственная когерентность зависит от условий излучения и формирования световых волн. Например, световая волна, излучаемая точечным источником, обладает полной пространственной когерентностью. В случае идеальной плоской волны амплитуда и фаза колебаний во всех точках плоскости Q одинаковы, т. е. также имеется полная пространственная когерентность. Пространственная когерентность сохраняется также по всему поперечному сечению луча света, излучаемого лазером.

В реальной волне, излучаемой множеством независимых атомов протяженного нелазерного источника света, разность фаз колебаний в двух точках K_1 и K_2 плоскости Q — случайная функция времени. Случайные значения этой разности фаз возрастают с увеличением расстояния между точками. В качестве *длины пространственной когерентности* принимается расстояние l_c между точками

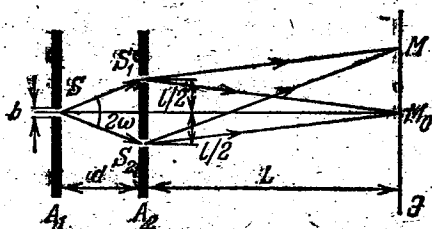


Рис. V.1.4

K_1 и K_2 плоскости Q , случайные изменения разности фаз в которых достигают значения, равного λ . Если в схеме Юнга расстояние l между щелями S_1 и S_2 больше или равно l_k , то видимость интерференционных полос равна нулю. Для обеспечения пространственной когерентности освещения щелей S_1 и S_2 ширина b входной щели S должна быть достаточно малой:

$$b < \lambda d/l \quad \text{и} \quad \theta < \lambda/l,$$

где d — расстояние между экранами A_1 и A_2 , а $\theta = b/d$ — угловой размер источника света — щели S .

Длина пространственной когерентности $l_k = \lambda/\theta$ увеличивается по мере удаления от источника света. Например, для звезды диаметра D , находящейся на расстоянии r , $\theta = D/r$ и $l_k = \lambda r/D$.

Площадь круга радиуса l_k называется *размером пространственной когерентности*, а объем прямого цилиндра с таким же основанием и образующей, равной длине гармонического пуга (V.1.1.4°) $l_{\text{кор}} = \sigma_{\text{кор}}$, называется *объемом когерентности*.

§ V.1.3. Интерференция света в тонких пленках

1°. Примером интерференции света, наблюдающейся в естественных условиях, может служить радужная окраска тонких пленок (мыльных пузырей, пленок нефти или масла на поверхности воды, прозрачных пленок окислов на поверхностях закаленных металлических деталей — цвета побежалости — и т. п.). Образование частично когерентных волн, интерферирующих при наложении, происходит в этом случае вследствие отражения падающего на пленку света от ее верхней и нижней поверхностей. Результат интерференции зависит от сдвига фаз, приобретаемого накладываемыми волнами в пленке и зависящего от их оптической разности хода.

2°. *Оптической длиной пути s* света называется произведение геометрической длины пути l , пройденного светом в среде, на показатель преломления n этой среды (IV.4.5.1°): $s = nl$. Величина s равна пути, проходимому светом в вакууме за то же время, за которое в данной среде он проходит путь l .

Оптической разностью хода двух волн называется разность оптических длин пути этих волн: $\Delta s = s_2 - s_1$ (часто оптическую разность хода обозначают Δ или δ). Оптической разности хода Δs соответствует изменение разности фаз волн на

$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta s$, где $\lambda_0 = n\lambda$ — *длина волны света в вакууме*, а λ — *длина волны в среде с показателем преломления n* .

Пути распространения волны, оптические длины которых одинаковы, называются *таутохронными*. На их прохождение свет затрачивает одинаковое время. Например, в оптической системе (микроскопе, телескопе и др.) все возможные пути лучей света от какой-либо точки предмета до соответствующей ей точки изображения этого предмета таутохронны.

8°. Пусть на плоскопараллельную однородную, изотропную и прозрачную для света пластинку толщиной d (рис. V.1.5) падает под углом i плоская монохроматическая световая волна l . За счет отражения света от верхней и нижней поверхностей пластинки в направлении отраженных лучей l' и l'' распространяются

две плоские волны, оптическая разность хода которых равна:

$$\Delta s = n(AB + BC) - n_1 \left(AD + \frac{\lambda_0}{2} \right) = 2dn \cos r - \frac{\lambda_0}{2},$$

где n_1 и n — показатели преломления окружающей среды и пластинки, $D \perp$ основание перпендикуляра, опущенного на луч I' из точки C , а член $\lambda_0/2$ учитывает сдвиг по фазе на π при отражении света в точке A (IV.4.5.5°)*, r — угол преломления и λ_0 — длина волны света в вакууме.

Условия для интерференционных максимумов отражения:

$$2dn \cos r = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad \text{или} \quad 2d \cos r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где $m=0, 1, 2, \dots$ — порядок интерференционного максимума.

Условия для интерференционных минимумов отражения:

$$2dn \cos r = m\lambda_0, \quad \text{или} \quad 2d \cos r = m\lambda,$$

где $m=1, 2, \dots$ — порядок интерференционного минимума.

Оптическая разность хода для проходящих через пластинку волн (лучи $2'$ и $2''$) $\Delta s = 2dn \cos r$, т. е. отличается от Δs для отраженного света на $\lambda_0/2$. Поэтому максимумам отражения соответствуют минимумы прохождения света и наоборот. Если пластинка освещается белым светом, то в отраженном и проходящем свете она имеет дополнительную окраску.

Наибольшая толщина пластинки d , при которой еще возможно наблюдение интерференционных полос, лимитируется временем когерентности света $\tau_{\text{ког}}$ (V.1.1.4°):

$$2dn \cos r < c\tau_{\text{ког}}, \quad \text{или} \quad 2d \cos r < l_{\text{ког}},$$

где $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}/n$ — длина когерентности.

4°. В расчетах оптической разности хода интерферирующих волн в пластинке (n , 3°) принимались во внимание только две волны, соответствовавшие первому отражению от верхней и от нижней поверхностей пластинки, т. е. не учитывалась возможность многократного отражения света. Такое упрощение правомерно только при условии, что интенсивность I_2 волны, соответствующей второму отражению от нижней поверхности пластинки, значительно меньше интенсивности I_1 волны, возникающей при первом отражении. Если R — коэффициент отражения света (IV.4.5.6°) от верхней и нижней поверхностей пластинки, то $I_2 = R^2 I_1$. Обычно $R^2 \ll 1$. Например, для границы воздух — стекло ($n_2 = 1,5$) при углах падения света $i < 50^\circ$ коэффициент отражения $R < 0,05$. В некоторых специальных случаях, когда I_2 соизмеримо с I_1 , необходимо рассматривать интерференцию многих волн (V.1.4).

5°. Рассматривая интерференцию света в тонких пленках, различают интерференционные полосы равного наклона и равной толщины. *Полосы равного наклона*

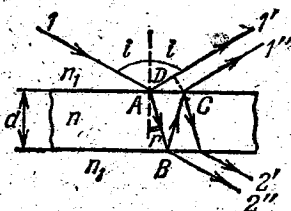


Рис. V.1.5

* Предполагается, что $i < i_{\text{Бр}}$ и $n > n_1$. Если $n < n_1$, то сдвиг по фазе на π происходит при отражении света в точке B , и $\Delta s = 2dn \cos r + \lambda_0/2$, т. е. отличается от значения Δs для случая $n > n_1$ на λ_0 , что не влияет на результат интерференции.

наблюдаются в тех случаях, когда на плоскопараллельную тонкую пленку падает под разными углами i расходящийся (или сходящийся) пучок света. Таковы, например, условия освещения пленки протяженным источником или рассеянным солнечным светом. Так как d и n всюду одинаковы, то оптическая разность хода интерферирующих волн изменяется вдоль поверхности пленки только из-за изменения угла падения света i . Условия интерференции для всех лучей, падающих на поверхность пленки и отражающихся от нее под одним и тем же углом, одинаковы. Соответственно интерференционная картина в этом случае называется полосами равного наклона. Полосы равного наклона наблюдают на экране \mathcal{E} , установленном в фокальной плоскости собирающей линзы \mathcal{L} (рис. V.1.6). В отсутствие

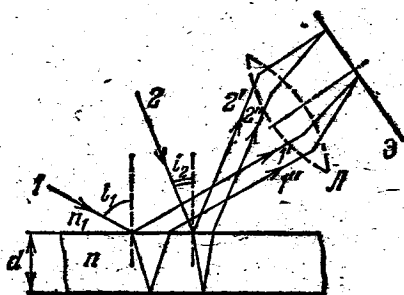


Рис. V.1.6

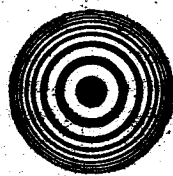
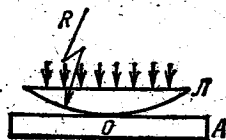


Рис. V.1.7

линзы интерференционную картину можно было бы наблюдать только на бесконечности — в месте пересечения пар параллельных лучей $1'1''$, $2'2''$ и т. д. Поэтому говорят, что полосы равного наклона локализованы в бесконечности. Для их визуального наблюдения нужно аккомодировать глаз на бесконечность.

6°. *Полосы равной толщины* наблюдаются при отражении параллельного или почти параллельного пучка лучей света ($i = \text{const}$) от тонкой прозрачной пленки, толщина d которой неодинакова в разных местах. Оптическая разность хода интерферирующих волн изменяется при переходе от одних точек на поверхности пленки к другим в соответствии с изменением толщины d , так что условия интерференции одинаковы в точках, соответствующих одинаковым значениям d . Поэтому рассматриваемая интерференционная картина и называется полосами равной толщины. Полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности пленки, т. е. для их наблюдения нужно аккомодировать глаз практически на поверхность самой пленки.

Если свет интерферирует в тонком прозрачном клине с малым углом α при вершине, то полосы равной толщины имеют вид прямоугольных полос, параллельных ребру клина. При освещении клина монохроматическим светом с длиной волны в вакууме λ_0 , падающим нормально на поверхность клина ($i = 0$), ширина интерференционных полос (V.1.2.3°) равна $\lambda_0/2n\alpha$, где n — абсолютный показатель преломления клина.

7°. Полосы равной толщины, имеющие форму концентрических колец и называемые *кольцами Ньютона*, наблюдаются при интерференции света в тонком

воздушном зазоре между плоской стеклянной пластинкой A и плотно прижатой к ней плосковыпуклой линзой L (рис. V.1.7). Плоская поверхность линзы параллельна поверхности пластинки, свет падает на эту поверхность нормально. Центры колец Ньютона совпадают с точкой O — совмещения линзы с пластинкой. На небольшом расстоянии r от точки O оптическая разность хода волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора,

$$\Delta s \approx n \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2},$$

где $n \approx 1$ (для воздуха), а R — радиус кривизны выпуклой поверхности линзы.

Примечание. При расчете колец Ньютона не нужно учитывать волну, отраженную от верхней (плоской) поверхности линзы, так как оптическая разность хода между этой волной и волнами, отраженными от границ воздушного зазора, больше длины когерентности для нелазерного света (п. 3°).

В отраженном монохроматическом свете с длиной волны в воздухе

$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \approx \lambda_0$ радиусы темных и светлых колец Ньютона равны:

$$r_{\text{темн}} = \sqrt{mR\lambda} \quad \text{и} \quad r_{\text{светл}} = \sqrt{(2m+1) \frac{R\lambda}{2}},$$

где $m=0, 1, 2, \dots$. В центре находится темное пятно, соответствующее изменению фазы волны на π при ее отражении от нижней поверхности воздушного зазора. Если на линзу падает белый свет, то в отраженном свете наблюдается центральное темное пятно, окруженное системой цветных колец, соответствующих интерференционным максимумам отражения света с различными значениями λ .

§ V.1.4. Интерференция многих волн

1°. Для осуществления интерференции многих световых волн с близкими или равными амплитудами применяют специальные интерференционные приборы — дифракционную решетку (V.2.3.4°), эталон Фабри — Перо и др. Амплитуду A результирующей колебаний и их интенсивность $I = A^2$ в произвольной точке M интерференционной картины можно найти, воспользовавшись методом векторных диаграмм для сложения одинаково направленных колебаний (IV.1.4.2°).

2°. На рис. V.1.8 показана векторная диаграмма сложения колебаний при интерференции N волн, возбуждающих в рассматриваемой точке M одинаково направленные когерентные колебания с равными амплитудами $A_i = A_1$ и не зависящим от i сдвигом фаз между $(i+1)$ -м и i -м колебаниями: $\Phi_{i+1}(t) - \Phi_i(t) = \Delta\varphi_0$. Амплитуда результирующих колебаний

$$A = 2 \cdot 00_1 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|, \quad \text{где} \quad \alpha = 2\pi - N \Delta\varphi_0 \quad \text{и} \quad 00_1 = \frac{A_1}{2 \left| \sin \frac{\Delta\varphi_0}{2} \right|}.$$

Поэтому

$$A = A_1 \left| \frac{\sin \frac{N \Delta\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi_0}{2}} \right| \quad \text{и} \quad I = I_1 \frac{\sin^2 \frac{N \Delta\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi_0}{2}},$$

где $I_1 = A_1^2$ — интенсивность колебаний, возбуждаемых в точке M каждой из N интерферирующих волн порознь.

3°. Главные максимумы интерференции N волн (п. 2°) находятся в точках M , удовлетворяющих условию: $\Delta\varphi_0 = \pm 2n\pi$, где $n=0, 1, 2, \dots$ — порядки главного максимума. Амплитуда и интенсивность колебаний в главных максимумах:

$$A_{\text{макс}} = N A_1 \quad \text{и} \quad I_{\text{макс}} = N^2 I_1.$$

Интерференционные минимумы ($A=0$) удовлетворяют условию: $\Delta\varphi_0 = \pm \frac{2p\pi}{N}$, где p принимает любые целые положительные значения, кроме кратных N .

Характер зависимости I/I_1 от $\Delta\varphi_0$ (п. 2°) показан на рис. V.1.9. Между каждой парой соседних интерференционных минимумов находится один максимум —

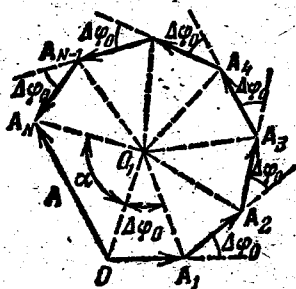


Рис. V.1.8

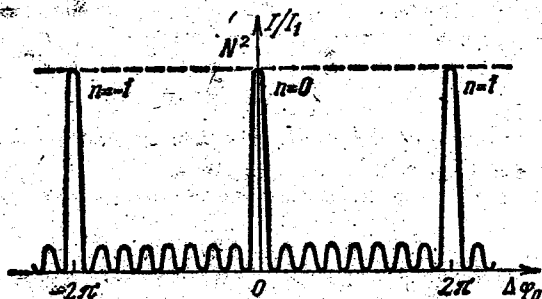


Рис. V.1.9

либо главный, либо *побочный*. При больших N интенсивности побочных максимумов пренебрежимо малы по сравнению с интенсивностью главных максимумов.

Двум минимумам, ограничивающим главный максимум n -го порядка, соответствуют значения $\Delta\varphi_0 = \pm \left(2n\pi \pm \frac{2\pi}{N} \right)$. Поэтому «ширина» главного максиму-

ма, равная $4\pi/N$, обратно пропорциональна числу N интерферирующих волн, а его интенсивность пропорциональна N^2 . Такой характер изменения интерференционной картины при изменении N полностью согласуется с законом сохранения энергии: общая энергия колебаний во всех точках экрана, на котором наблюдается интерференционная картина, пропорциональна N .

4°. Если число N интерферирующих волн (п. 2°) неограниченно увеличивать, а их амплитуды A_1 и сдвиги фаз $\Delta\varphi_0$ соответственно уменьшать так, чтобы NA_1 и $N\Delta\varphi_0$ оставались конечными величинами, равными A_0 и $\Delta\varphi$, то в пределе векторная диаграмма (рис. V.1.8) примет вид, показанный на рис. V.1.10. Вектор A амплитуды результирующих колебаний замыкает дугу BC окружности. Длина этой дуги равна A_0 , а соответствующий ей центральный угол $\angle BOC = \Delta\varphi$. Поэтому радиус окружности $OB = A_0/\Delta\varphi$, а амплитуда A и интенсивность I результирующих колебаний равны:

$$A = A_0 \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right|, \quad \text{и} \quad I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{\left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2},$$

где $I_0 = A_0^2$.

Интерференционные минимумы находятся в точках интерференционной картины, для которых

$$\Delta\varphi = \pm 2m\pi \quad (m=1, 2, \dots).$$

Интерференционные максимумы находятся в точках, для которых $\Delta\varphi = \pm 2k_m\pi$, где $m=0, 1, 2, \dots$ — порядок максимума. Значения коэффициентов k_m определяются из трансцендентного уравнения: $\operatorname{tg} k_m\pi = k_m$. Для центрального максимума нулевого порядка $k_0=0$ и $\Delta\varphi=0$. Амплитуда и интенсивность колебаний в

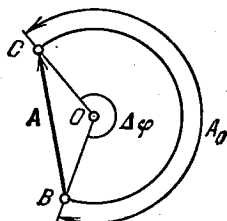


Рис. V.1.10

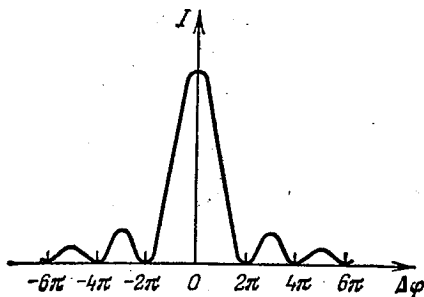


Рис. V.1.11

максимуме нулевого порядка равны A_0 и I_0 . Для всех остальных максимумов ($m \geq 1$) приближенно можно считать, что

$$k_m = (2m+1)/2 \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \pm (2m+1)\pi.$$

Соответственно отношение интенсивностей максимумов m -го и нулевого порядков равно:

$$\frac{I_m}{I_0} = \frac{4}{(2m+1)^2 \pi^2}.$$

Это отношение быстро убывает с ростом m (табл. V.1.1).

Характер зависимости I от $\Delta\varphi$ показан на рис. V.1.11.

Таблица V.1.1

Порядок максимума	0	1	2	3	4
I_m/I_0	1	0,045	0,016	0,008	0,005

Глава V.2. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

§ V.2.1. Принцип Гюйгенса — Френеля

°. Если известно положение фронта волны (IV.3.2.3°) в некоторый момент времени t и скорость волны v , то положение фронта в последующий момент времени $t + \Delta t$ можно определить на основе принципа Гюйгенса. Согласно этому принципу все точки поверхности $S(t)$, через которые проходит фронт волны в момент

времени t , следует рассматривать как источники вторичных волн, а искомое положение $S(t + \Delta t)$ фронта в момент времени $t + \Delta t$ совпадает с поверхностью, огибающей все вторичные волны. При этом считается, что в однородной среде вторичные волны излучаются только вперед, т. е. в направлениях, составляющих острые углы с внешней нормалью к фронту волны. В однородной изотропной среде вторичные волны являются сферическими (рис. V.2.1).

2. С помощью принципа Гюйгенса можно вывести законы отражения и преломления света на границе раздела двух сред. На рис. V.2.2 MN — плоская поверхность раздела двух сред, скорость света в которых равна v_1 и v_2 . На эту поверхность падает под углом i плоская волна (лучи 1 и 2). В момент времени t фронт волны (плоскость AB) достиг поверхности раздела в точке A . Поэтому точка A начинает излучать вторичные волны, распространяющиеся как в первой среде

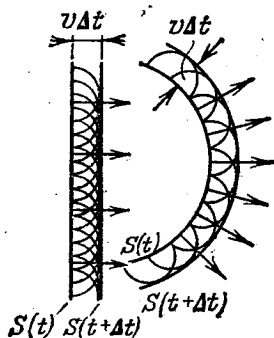


Рис. V.2.1

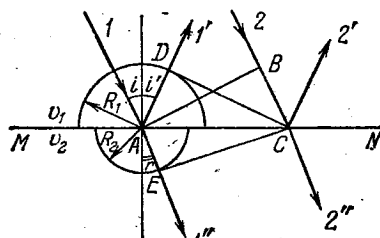


Рис. V.2.2

(отраженная волна), так и во второй (проходящая волна). За время Δt прохождения падающей волной расстояния BC ($\Delta t = BC/v_1$) фронт вторичной волны, излучаемой точкой A , достигнет в первой среде точек полушеры с радиусом $R_1 = v_1 \Delta t = BC$, а во второй среде — точек полушеры с радиусом $R_2 = v_2 \Delta t = \frac{v_2}{v_1} BC$.

Фронт отраженной волны (лучи $1'$ и $2'$), распространяющейся под углом отражения i' , — плоскость DC , касающаяся сферы радиуса R_1 с центром в точке A . Соответственно фронт проходящей (преломленной) волны (лучи $1''$ и $2''$), распространяющейся под углом преломления r , — плоскость CE , касающаяся сферы радиуса R_2 с центром в точке A . Из равенства ΔACD и ΔACB следует закон отражения света: $i' = i$. Из прямоугольных треугольников ACB и ACE , имеющих общую гипотенузу, следует закон преломления света:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BC}{AE} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй и первой сред (IV.4.5.1°).

3°. Принцип Гюйгенса является чисто геометрическим. Он не указывает способа расчета амплитуды волны, огибающей вторичные волны. Поэтому принцип Гюйгенса недостаточен для расчета закономерностей распространения световых волн. Приближенный метод решения этой задачи, являющийся развитием принципа Гюйгенса на основе предложенной Френелем идеи о когерентности вторичных волн и их интерференции при наложении, называется принципом Гюй-

генса — Френеля. Этот принцип можно выразить в виде следующего ряда положений:

а) при расчете амплитуды световых колебаний, возбуждаемых источником S_0 в произвольной точке M , источник S_0 можно заменить эквивалентной ему системой вторичных источников — малых участков ds любой замкнутой вспомогательной поверхности S , проведенной так, чтобы она охватывала источник S_0 и не охватывала рассматриваемую точку M ;

б) вторичные источники когерентны S_0 и между собой, поэтому возбуждаемые ими вторичные волны интерферируют при наложении; расчет интерференции наиболее прост, если S — волновая поверхность для света источника S_0 , так как при этом фазы колебаний всех вторичных источников одинаковы;

в) амплитуда dA колебаний, возбуждаемых в точке M вторичным источником, пропорциональна отношению площади ds соответствующего участка в волновой поверхности S к расстоянию r от него до точки M и зависит от угла α между внешней нормалью к волновой поверхности и направлением от элемента ds в точку M :

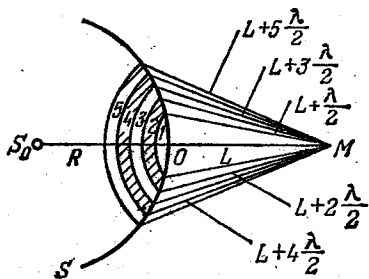


Рис. V.2.3

$$dA = f(\alpha) \frac{a ds}{r},$$

где a — величина, пропорциональная амплитуде первичной волны в точках элемента ds ; $f(\alpha)$ монотонно убывает от 1 при $\alpha=0$ до 0 при $\alpha \geq \pi/2$ (вторичные источники не излучают назад)*);

г) если часть поверхности S занята непрозрачными экранами, то соответствующие (закрытые экранами) вторичные источники не излучают, а остальные излучают так же, как и в отсутствие экранов**).

4° С помощью принципа Гюйгенса — Френеля можно обосновать с волновой точки зрения закон прямолинейного распространения света в однородной среде. Пусть S_0 — точечный источник монохроматического света (рис. V.2.3), а M — точка наблюдения. В качестве вспомогательной поверхности S возьмем волновую поверхность радиуса R , который выберем так, чтобы расстояние L от точки M до этой сферы ($L=OM$) было порядка R . Разобьем поверхность S на небольшие по площади кольцевые участки — зоны Френеля, как показано на рис. V.2.3, где λ — длина волны света.

Колебания, возбуждаемые в точке M двумя соседними зонами, противоположны по фазе, так как разность хода от сходственных точек этих зон до точки M

*) Как показал Кирхгоф, $f(\alpha) \sim (1 + \cos \alpha)$, т. е. обращается в нуль только при $\alpha = \pi$; однако при малых углах дифракции α это уточнение несущественно.

**) В действительности материал экрана влияет на излучение открытых вторичных источников, находящихся вблизи от краев экрана (на расстояниях порядка длины волны света).

равна $\lambda/2$. Следовательно, амплитуда результирующих колебаний в точке M равна $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$, где A_i — амплитуда колебаний, возбуждаемых в точке M вторичными источниками, находящимися в пределах одной i -й зоны. При $i \ll L/\lambda$ площади всех зон одинаковы: $\sigma_i = \pi R L \lambda / (R + L)$ и очень малы (при $R = L = 10$ см и $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$ см получаем $\sigma_i \approx 8 \cdot 10^{-8}$ см²). С увеличением i увеличивается и расстояние r_i от зоны до точки M , и угол α_i между нормалью к поверхности зоны и направлением в точку M . Поэтому согласно принципу Гюйгенса — Френеля $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ и $A_i \approx (A_{i-1} + A_{i+1})/2$. Следовательно, амплитуда колебаний в точке M равна $A \approx A_1/2$, т. е. результирующее действие всего открытого волнового фронта равно половине действия первой (центральной) зоны Френеля, радиус которой очень мал. Таким образом практически можно считать, что свет распространяется из S_0 в M прямолинейно.

5°. Если на пути монохроматического света от точечного источника S_0 поставить экран, закрывающий все зоны Френеля для точки наблюдения M , кроме первой, то амплитуда и интенсивность света в точке M увеличатся соответственно вдвое и вчетверо по сравнению с их значениями в отсутствие экрана: $A = A_1$ и $I = A_1^2$. Значительно большее усиление света в точке M можно осуществить с помощью *зонной пластинки* — стеклянной пластинки, на поверхность которой нанесено непрозрачное покрытие в виде колец, закрывающих только четные (либо только нечетные) зоны Френеля. Зонная пластинка действует на свет подобно собирающей линзе.

§ V.2.2. Дифракция Френеля

1°. *Дифракцией света* называется совокупность явлений, которые обусловлены волновой природой света и наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т. п.). В более узком смысле под дифракцией света понимают огибание светом встречных препятствий, т. е. отклонение от законов геометрической оптики.

Различают два случая дифракции света — *дифракцию Френеля*, или *дифракцию в сходящихся лучах*, и *дифракцию Фраунгофера*, или *дифракцию в параллельных лучах*. В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся позади препятствия на конечном расстоянии от него. Во втором случае на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света. При дифракции Френеля на экране получается «дифракционное изображение» препятствия, а при дифракции Фраунгофера — «дифракционное изображение» удаленного источника света.

2°. В простейших задачах дифракции Френеля вид дифракционной картины можно выяснить, пользуясь методом зон Френеля (V.2.1.4°).

Пример 1. *Дифракция Френеля на небольшом круглом отверстии* в непрозрачном экране AB (рис. V.2.4). При освещении отверстия монохроматическим светом с длиной волны λ на экране \mathcal{E} , параллельном AB , наблюдается система чередующихся темных и светлых интерференционных колец с общим центром в точке O , лежащей напротив центра отверстия. Если для точки O в отверстии ук-

ладывается четное число $2k$ ($k=1, 2, \dots$) зон Френеля, то в точке O находится темное пятно — амплитуда света в точке O меньше, чем в отсутствие экрана:

$$A \approx (A_1 - A_{2k})/2 < A_1/2,$$

где A_i — амплитуда, соответствующая одной i -й зоне. Если число зон нечетно ($2k+1$), то в точке O находится светлое пятно:

$$A \approx (A_1 + A_{2k+1})/2 > A_1/2.$$

Если отверстие освещается белым светом, то на экране \mathcal{E} наблюдается система концентрических цветных колец.

Число зон Френеля, укладывающихся в отверстии, и контрастность интерференционной картины зависят от отношения диаметра отверстия d к расстоянию l между экранами AB и \mathcal{E} . По мере увеличения d/l амплитуда света в центре экрана \mathcal{E} приближается к $A_1/2$ и контрастность интерференционных колец уменьшается.

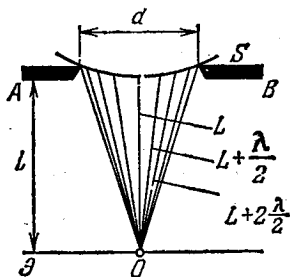


Рис. V.2.4

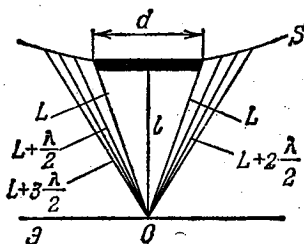


Рис. V.2.5

3°. **Пример 2. Дифракция Френеля на небольшом диске** (непрозрачном круглом экране). Способ построения открытых зон Френеля на волновой поверхности S падающей монохроматической сферической волны показан на рис. V.2.5. Интерференционная картина на экране \mathcal{E} имеет вид концентрических темных и светлых колец с центром в точке O , где всегда находится интерференционный максимум (*пятно Пуассона*). Амплитуда света в точке O равна половине амплитуды A_1 , соответствующей действию в этой точке одной только первой открытой зоны Френеля: $A = A_1/2$. При освещении диска белым светом в центре экрана \mathcal{E} наблюдается белое пятно, окруженное системой концентрических цветных колец.

По мере увеличения отношения диаметра диска d к расстоянию l от диска до экрана \mathcal{E} яркость пятна Пуассона постепенно уменьшается, а следующее за ним темное кольцо расширяется, образуя область тени за диском.

§ V.2.3. Дифракция Фраунгофера

1°. **Пример 1. Дифракция света на узкой длинной щели** в непрозрачном экране (рис. V.2.6). Ширина щели $BC = b$, а длина в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, $l \gg b$. Свет падает на щель нормально к ее поверхности, так что колебания во всех точках щели совершаются в одной фазе. Дифракционная картина наблюдается на экране \mathcal{E} , установленном в фокальной плоскости собирающей линзы L . Параллельные лучи BM и CN , идущие от краев щели под

углом дифракции ψ к направлению лучей падающего света, собираются линзой в ее побочном фокусе F_ψ . Линза обладает тем свойством, что пути лучей света BMF_ψ и DNF_ψ , где D — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на луч CN , таутохронны (V.1.3.2°). Поэтому результат интерференции в точке F_ψ экрана зависит от разности хода $CD = b \sin \psi$ и длины волны света λ .

а) Приближенное решение. Щель можно разбить по ширине на зоны Френеля, имеющие вид параллельных ребру B полосок, разность хода от краев которых равна $\lambda/2$. Число зон Френеля, укладывающихся в щель, равно $2b|\sin \psi|/\lambda$. Все зоны излучают свет в рассматриваемом направлении совершенно одинаково, причем колебания, возбуждаемые в точке F_ψ двумя соседними зонами, равны по амплитуде и противоположны по фазе. Поэтому, если число зон четное:

$$b \sin \psi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad \text{где } m = 1, 2, \dots,$$

то наблюдается дифракционный минимум (полная темнота). Если число зон нечетное:

$$b \sin \psi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{где } m = 1, 2, \dots,$$

то наблюдается дифракционный максимум, соответствующий действию одной зоны Френеля. Самый яркий центральный максимум наблюдается в главном фокусе F_0 линзы ($\psi = 0$). С ростом m ширина зон Френеля и интенсивность максимумов быстро уменьшается.

б) Точное решение. Щель разбивается на очень большое число одинаковых очень узких полосок, параллельных ребру B . Вторичные волны, излучаемые этими элементами щели, возбуждают в точке F_ψ колебания, которые имеют одинаковые малые амплитуды, а их начальные фазы непрерывно заполняют интервал шириной $\Delta\varphi = (2\pi b \sin \psi)/\lambda$. Согласно (V.1.4.4°) амплитуда и интенсивность света в точке F_ψ равны:

$$A_\psi = A_0 \left| \frac{\sin \frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}} \right| \quad \text{и} \quad I_\psi = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \psi}{\lambda} \right)^2},$$

где A_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность в центральном максимуме ($\psi = 0$).

Условие дифракционных минимумов света то же, что и в приближенном решении: $b \sin \psi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}$, где $m = 1, 2, \dots$. Условие для дифракционных максимумов имеет вид:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi b \sin \psi}{\lambda} = \frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}$$

и незначительно отличается от условия, получаемого с помощью метода зон Френеля.

2°. Если на щель падает не монохроматический, а белый свет, то центральный максимум — белый с радужной окраской по краям. Все остальные интерферен-

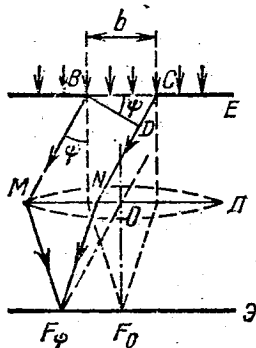


Рис. V.2.6

ционные полосы — цветные, так как минимумам и максимумам одних и тех же порядков m соответствуют, в зависимости от длины волны λ , разные углы ψ и разные точки F_ψ на экране.

По мере уменьшения ширины b щели ширина центрального максимума увеличивается: возрастают углы $\psi_1 = \pm \arcsin(\lambda/b)$, которые соответствуют минимумам первого порядка, ограничивающим центральный максимум. При $b \ll \lambda$ освещенность экрана монотонно уменьшается от середины (точка F_0) к краям. Если щель очень широка ($b \gg \lambda$), то на экране наблюдается яркое и четкое изображение источника света, образуемое линзой L по законам геометрической оптики.

3°. **Пример 2. Дифракция света на круглом отверстии.** Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на отверстие, т. е. перпендикулярно к его плоскости. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы, расположенной за отверстием так, что ее оптическая ось перпендикулярна к плоскости отверстия. Дифракционная картина имеет вид яркого светлого пятна, находящегося в главном фокусе F_0 линзы, и концентрических с ним чередующихся темных и светлых колец. Интенсивности светлых колец очень малы по сравнению с интенсивностью I_0 центрального максимума и убывают с увеличением их радиуса. Например, интенсивность ближайшего к центральному максимуму первого порядка $I_1 < 0,02 I_0$. Угол дифракции ψ_1 , соответствующий первому темному кольцу, ограничивающему центральный максимум, удовлетворяет условию:

$$\sin \psi_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

где D — диаметр отверстия, λ — длина волны света.

Если свет падает на отверстие под небольшим углом α с нормалью к плоскости отверстия, то характер дифракционной картины практически не изменяется, но ее центр перемещается в побочный фокус линзы, соответствующий углу $\psi = \alpha$.

4°. **Пример 3. Дифракция света на одномерной дифракционной решетке.** Одномерная дифракционная решетка представляет собой систему из большого числа N одинаковых по ширине и параллельных друг другу щелей в экране, разделенных также одинаковыми по ширине непрозрачными промежутками. На рис. V.2.7 показаны только две соседние щели решетки. Величина $d = a + b$, где $a = CD$ — ширина непрозрачного промежутка, а $b = BC$ — ширина щели, называется *постоянной*, или *периодом*, дифракционной решетки.

При расчете дифракционной картины на экране \mathcal{E} , установленном в фокальной плоскости собирающей линзы L , необходимо учитывать интерференцию вторичных волн как от разных участков одной щели, так и от разных щелей решетки. Если плоская монохроматическая волна падает нормально на решетку, то колебания во всех точках щелей происходят в одинаковой фазе.

Колебания, возбуждаемые в произвольной точке F_ψ фокальной плоскости линзы L каждой из щелей, совпадают по амплитуде (A_1) и отличаются по фазе. Для каждой пары соседних щелей сдвиг фаз $\Delta\phi_0$ между этими колебаниями одинаков. Он зависит от длины волны λ и разности хода лучей от сходственных точек щелей (например, точек B и D), т. е. от величины $KD = d \sin \psi$, где K — основание

перпендикуляра, опущенного из точки B на луч DN :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \psi.$$

Поэтому, согласно (V.1.4.2°) и (V.2.3.1°), амплитуда и интенсивность результирующих колебаний в точке F_ψ равны:

$$A = A_0 \left| \frac{\sin \frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi N d \sin \psi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \psi}{\lambda}} \right|, \quad I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \psi}{\lambda} \right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi N d \sin \psi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \sin \psi}{\lambda}},$$

где A_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность колебаний в точке F_0 (т. е. при $\psi=0$), обусловленных действием одной щели.

5°. *Главные минимумы* при дифракции света на дифракционной решетке наблюдаются под углами дифракции ψ , соответствующими интерференционным минимумам при дифракции на одной щели (п. 1°):

$$b \sin \psi = \pm m\lambda \quad (m=1, 2, \dots).$$

В этих направлениях каждая из щелей не дает света («сама себя гасит»).

Главным максимумом (V.1.4.3°) соответствуют углы дифракции ψ , удовлетворяющие условию:

$$d \sin \psi = \pm n\lambda,$$

где $n=0, 1, 2, \dots$ — *порядок главного максимума*.

Примечание. Если некоторые значения ψ одновременно удовлетворяют условиям и для главных максимумов, и для главных минимумов, то главные максимумы, соответствующие этим значениям ψ , не наблюдаются. Например, если $d=2b$, то все четные главные максимумы ($n=2, 4, 6$ и т. д.) отсутствуют.

Интенсивность главного максимума n -го порядка равна:

$$I_n = I_0 \left(\frac{Nd}{\pi nb} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi nb}{d}.$$

6°. Между каждыми двумя главными максимумами находится $N-1$ *дополнительных минимумов*, удовлетворяющих условию:

$$d \sin \psi = \pm \frac{p\lambda}{N},$$

где p принимает любые целые положительные значения, кроме $N, 2N, 3N$ и т. д. Соответственно имеется $N-2$ дополнительных максимумов, интенсивность которых пренебрежимо мала по сравнению с главными максимумами.

Угловая «ширина» главного максимума n -го порядка, т. е. разность значений угла ψ , соответствующих дополнительным минимумам, ограничивающим этот максимум, равна:

$$\Delta\psi_n = \frac{2\lambda}{Nd \cos \psi_n} = \frac{2\lambda}{L \cos \psi_n},$$

где $\psi_n = \arcsin(n\lambda/d)$, $L = Nd$ — длина дифракционной решетки. Для главных максимумов не слишком высоких порядков углы ψ_n малы и $\cos \psi_n \approx 1$, так что $\Delta\psi_n \approx 2\lambda/L$.

7°. В монохроматическом свете дифракционная картина на экране Э в фокальной плоскости линзы Л (рис. V.2.7) имеет, при больших N , вид узких и ярких главных максимумов, разделенных практически темными широкими промежутками. Если отношение d/b — число иррациональное, то интенсивности главных максимумов (п. 5°) монотонно уменьшаются с ростом их порядка n .

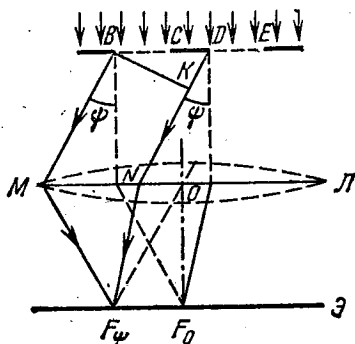


Рис. V.2.7

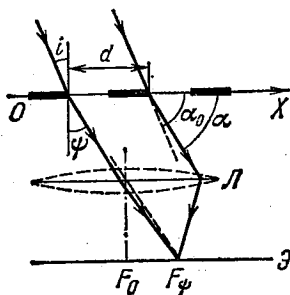


Рис. V.2.8

При освещении решетки белым светом на экране наблюдается неокрашенный центральный максимум нулевого порядка, а по обе стороны от него — *дифракционные спектры* 1-го, 2-го и т. д. порядков. Спектры имеют вид радужных полосок, в которых наблюдается непрерывный переход от окраски сине-фиолетового цвета у внутреннего края спектра к красной у внешнего края.

8°. При *наклонном падении света* на дифракционную решетку (рис. V.2.8) условие для главных максимумов имеет вид:

$$d (\sin \psi - \sin i) = \pm n\lambda \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где i — угол падения света на поверхность решетки. Часто направления падающих на решетку и дифрагировавших на ней лучей света характеризуют посредством углов α_0 и α , которые эти лучи составляют с осью координат OX , проведенной в плоскости решетки перпендикулярно к щелям. В таком случае условие для главных максимумов можно переписать в форме:

$$d (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \pm n\lambda.$$

9°. Два экрана называются *дополнительными*, если отверстиям в одном из них соответствуют точно такие же по форме, размерам и взаимному расположению непрозрачные участки другого, и наоборот. Таковы, например, непрозрачный экран в виде круга радиуса R и непрозрачный экран с отверстием того же радиуса R . Исходя из принципа Гюйгенса — Френеля, можно доказать *теорему Бабинэ (принцип Бабинэ)*: при фраунгоферовой дифракции на каком-либо экране интенсивность дифрагированного света в любом направлении, кроме направления распространения падающей на экран плоской волны, должна быть такой же, как и при дифракции на дополнительном экране.

10°. **Пример 4. Дифракция на большом числе одинаковых и одинаково ориентированных препятствий.** Интенсивность света I в произвольной точке M дифракционной картины, как и при дифракции на одномерной решетке (п. 4°), можно

представить в виде: $I=fI_1$. Здесь I_1 — интенсивность в точке M при дифракции той же падающей плоской волны на о.д.н.о.м. препятствии. Функция f зависит только от количества и взаимного расположения препятствий.

Если препятствия расположены совершенно хаотично друг относительно друга, а их число N велико, то $f \approx N$. В этом случае распределение интенсивности света такое же, как при дифракции на одиночном препятствии. Однако интенсивность в каждой точке дифракционной картины в N раз больше. Например, при дифракции света на стеклянной пластинке, покрытой слоем шарообразных пылинок диаметром d , наблюдается система ярких концентрических интерференционных колец. Размеры этих колец соответствуют дифракции света на непрозрачном диске диаметра d или, в согласии с теоремой Бабинé (п. 9°), — на круглом отверстии того же диаметра.

§ V.2.4. Дифракция на пространственной решетке

1°. *Пространственной, или трехмерной, дифракционной решеткой* называется такая оптически неоднородная среда, неоднородности которой периодически повторяются при изменении всех трех пространственных координат. Примером пространственной дифракционной решетки может служить кристаллическая решетка твердого тела. Частицы, находящиеся в узлах этой решетки (атомы, молекулы или ионы), играют роль упорядоченно расположенных центров, когерентно рассеивающих падающий на них свет. Пусть d_1, d_2 и d_3 — периоды решетки по трем осям координат ξ, η, ζ , которые проведены вдоль трех ребер решетки, пересекающихся в каком-либо из ее узлов. Тогда при дифракции Фраунгофера (V.2.2.1°) главные максимумы удовлетворяют условиям Лауэ:

$$d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = n_1 \lambda, \quad d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = n_2 \lambda, \quad d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = n_3 \lambda.$$

Здесь $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ и α, β, γ — углы между осями координат ξ, η, ζ и направлениями распространения соответственно падающего и дифрагировавшего света; n_1, n_2 и n_3 — целые числа, определяющие порядок максимума, λ — длина волны света. Условия Лауэ вытекают из соотношения (V.2.3.8°) для дифракционных максимумов при наклонном падении света на одномерную дифракционную решетку.

2°. Из трех углов α, β и γ (соответственно α_0, β_0 и γ_0) независимыми являются только два угла, так как они должны удовлетворять одному геометрическому соотношению, конкретный вид которого зависит от углов между осями координат ξ, η, ζ . Например, если оси координат взаимно перпендикулярны, т. е. если решетка ортогональна, то геометрическое соотношение между α, β и γ имеет вид:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Поэтому при произвольно заданном направлении падения монохроматического света с заданной длиной волны λ на пространственную дифракционную решетку, вообще говоря, нельзя найти значения α, β и γ , которые бы одновременно удовлетворяли и геометрическому соотношению, и трем условиям Лауэ. Единственное исключение представляет максимум нулевого порядка ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$), для которого $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ и $\gamma = \gamma_0$.

Для наблюдения дифракционного максимума порядка (n_1, n_2, n_3) при заданных значениях углов α_0, β_0 и γ_0 необходимо, чтобы длина волны падающего света имела вполне определенное значение. Например, в случае ортогональной решетки

длина волны должна быть равна:

$$\lambda = -2 \frac{\frac{n_1}{d_1} \cos \alpha_0 + \frac{n_2}{d_2} \cos \beta_0 + \frac{n_3}{d_3} \cos \gamma_0}{\left(\frac{n_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{d_3}\right)^2}.$$

Если значение λ длины волны падающего света фиксировано, то условия Лауэ и геометрическое соотношение между углами α , β и γ можно одновременно удовлетворить путем соответствующего выбора направления падения света на дифракционную решетку, т. е. углов α_0 , β_0 и γ_0 .

3°. Из условий Лауэ следует, что при $\lambda \geq 2d_{\text{макс}}$, где $d_{\text{макс}}$ — наибольшее из значений d_1 , d_2 и d_3 , должны отсутствовать все дифракционные максимумы, кроме нулевого ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$). Свет с такими длинами волн распространяется в среде, «не замечаая» ее неоднородности, т. е. не испытывая дифракции. Поэтому условие $\lambda \geq 2d_{\text{макс}}$ называют *условием оптической однородности среды*.

Постоянные кристаллических решеток твердых тел значительно меньше длин волн видимого света ($d_i \sim 5 \cdot 10^{-10}$ м, а $\lambda_{\text{вид.св}} \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м). Поэтому для видимого света кристаллы являются оптически однородной средой*). В то же время для рентгеновских лучей (IV.4.4.4°) кристаллы представляют естественные дифракционные решетки.

4°. Дифракцию рентгеновских лучей на кристаллах можно истолковать как результат интерференции рентгеновского излучения, зеркально отражающегося от систем параллельных плоскостей, которые проходят через узлы кристаллической решетки. Эти плоскости называются *сетчатыми*, или *атомными, плоскостями кристалла*. Расстояние d между двумя соседними сетчатыми плоскостями называется *межплоскостным расстоянием*, а угол ϑ между падающим лучом и сетчатой плоскостью (рис. V.2.9) — *углом скольжения*. Разность хода лучей, отраженных от двух соседних сетчатых плоскостей**, $\Delta = BC + BD = 2d \sin \vartheta$. Поэтому, согласно V.1.2.1°, отражение наблюдается лишь в тех направлениях, соответствующих дифракционным максимумам, которые удовлетворяют *условию Вульфа — Брэгга*:

$$2d \sin \vartheta = m\lambda,$$

где $m = 1, 2, \dots$ — порядок дифракционного максимума.

5°. Экспериментальный метод изучения атомного строения вещества путем исследования закономерностей дифракции рентгеновского излучения при прохождении через исследуемый образец называется *рентгеноструктурным анализом*. Этот метод более эффективен для изучения структуры кристаллических

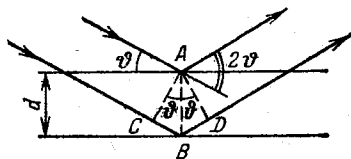


Рис. V.2.9

*) В кристаллах возможно молекулярное рассеяние видимого света (V.3.3.1°), связанное с нарушением их оптической однородности вследствие флуктуаций плотности.

***) Рентгеновские лучи не преломляются в кристалле, так как значения показателя преломления (IV.4.5.1°) всех кристаллов для электромагнитного излучения столь высокой частоты практически равны единице.

тел. Дифракционная картина, зафиксированная на фотопленке, называется *рентгенограммой образца*. Рентгенограмма, получаемая при дифракции на *монокристалле* пучка «белого» рентгеновского излучения (с непрерывным спектром частот), называется *лауэграммой*. Она имеет вид дискретных дифракционных пятен, положение которых определяется условиями Лауэ (п. 1°). *Дебаеграммой* называется рентгенограмма, получаемая при дифракции пучка монохроматического рентгеновского излучения на *поликристаллическом образце* (например, на кристаллическом порошке). Она представляет собой систему концентрических дифракционных колец. Радиусы колец $r = l \operatorname{tg} 2\theta$, где l — расстояние от образца до плоскости рентгенограммы, расположенной перпендикулярно падающему лучу, а углы θ удовлетворяют условию Вульфа — Брэгга (п. 4°).

§ V.2.5. Разрешающая способность оптических приборов

1°. Изображение объекта в любом оптическом приборе (телескопе, микроскопе, фотоаппарате и т. п.) получается с помощью ограниченного пучка света, пропускаемого в прибор так называемой *апертурной диафрагмой*. Роль такой диафрагмы играет, например, диафрагма фотоаппарата, оправка объектива телескопа и т. д. Уменьшение диаметра апертурной диафрагмы способствует ослаблению различных искажений изображения, обусловленных использованием широких пучков света и называемых *геометрическими абберациями оптической системы*. Однако, вследствие дифракции света в оптическом приборе, изображение светящейся точки имеет вид не точки, а светлого пятна, окруженного системой концентрических интерференционных колец (темных и светлых в случае монохроматического света и радужных в случае белого света). Это явление ограничивает *разрешающую способность (разрешающую силу) оптического прибора*, т. е. его способность давать раздельные изображения двух близких друг к другу точек объекта.

2°. Согласно *критерию Рэлея* изображения двух одинаковых точечных источников света еще можно видеть раздельно, если центральный максимум дифракционной картины от одного источника совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого. Из V.2.3.3° следует, что в соответствии с критерием Рэлея две близкие звезды, наблюдаемые в телескоп в монохроматическом свете с длиной волны λ , видны раздельно, если угловое расстояние между ними

$$\Delta\varphi \geq 1,22 \lambda/D,$$

где D — диаметр объектива. Величина $(\Delta\varphi)_0 = 1,22 \lambda/D$ называется *угловым пределом разрешения телескопа*, а обратная величина $1/(\Delta\varphi)_0$ — *разрешающей силой телескопа*. Разрешающая сила телескопа растет пропорционально диаметру его объектива. Условие разрешения для зрительной трубы и фотоаппарата при рассматривании и фотографировании удаленных предметов совпадает с условием разрешения для телескопа.

Угловой предел разрешения глаза определяется дифракцией света на зрачке ($D \sim 2$ мм) и зернистой структурой сетчатки глаза. Он составляет около 1'.

3°. *Разрешающая способность микроскопа* характеризуется величиной $(\Delta l)_0$ минимального расстояния между двумя точками предмета, видимыми на изображении раздельно. В случае самосветящегося предмета, все точки которого можно

считать некогерентными источниками,

$$(\Delta l)_0 = \frac{0,61\lambda_0}{A},$$

где λ_0 — длина волны света в вакууме, $A = n \sin u$ — *числовая апертура объектива*, n — показатель преломления среды, находящейся между предметом и объективом, u — половина угла раствора пучка света, исходящего из точки предмета и попадающего в объектив микроскопа. Для несамосветящихся предметов значение $(\Delta l)_0$ зависит от условий освещения. Однако и в этом случае $(\Delta l)_0 \geq \lambda_0/A$.

Увеличение разрешающей способности микроскопа можно осуществить либо за счет уменьшения длины волны λ_0 , либо за счет увеличения числовой апертуры A . Первый способ реализуется в ультрафиолетовой микроскопии и в электронной микроскопии, а второй — в иммерсионном микроскопе, в котором пространство между предметом и объективом заполняется прозрачной жидкостью с показателем преломления $n > 1$.

§ V.2.6. Голография

1°. *Голографией* называется метод получения объемного изображения предметов, основанный на явлении интерференции волн. В голографии, в отличие от обычного фотографического метода, регистрируются с помощью светочувствительной фотозмульсии соотношения не только между амплитудами (или их квадратами, т. е. интенсивностями) световых волн, рассеиваемых различными малыми участками поверхности предмета, но также и между фазами этих волн.

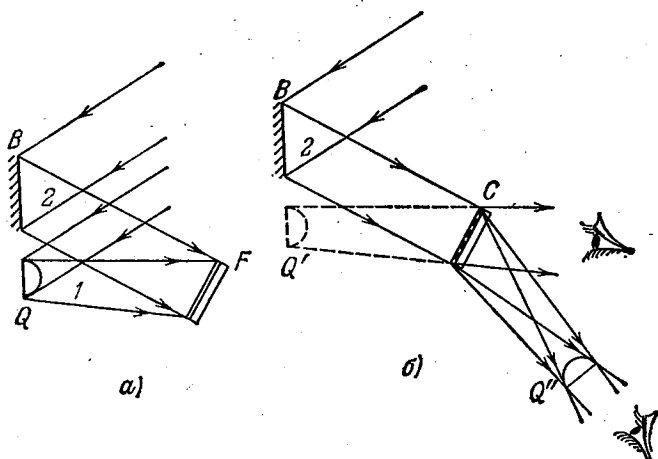


Рис. V.2.10

Суть голографического метода пояснена на рис. V.2.10. С помощью фотопластины F (рис. V.2.10, а) фиксируется интерференционная картина, которая возникает при наложении волны 1, рассеянной объектом Q и называемой *сигнальной волной*, или *предметным пучком*, и когерентной ей волны 2, имеющей фиксированные значения амплитуды и фазы. Волна 2, называемая *опорной волной*, или *опор-*

ным пучком, испускается тем же источником света, который освещает объект, и после отражения от зеркала B падает непосредственно на фотопластинку F . Интерференционная картина, зафиксированная на фотопластинке после ее проявления, называется *голограммой объекта* Q . Она представляет собой очень мелкий и замысловатый узор из чередующихся интерференционных максимумов и минимумов почернения фотоэмульсии и, в отличие от фотографического изображения объекта, не имеет внешнего сходства с объектом.

Получение голограммы связано с осуществлением интерференции света при больших разностях хода, т. е. требует весьма высокой степени когерентности света ($V.1.2.4^\circ$). Поэтому в голографии в качестве источников света используют лазеры ($VI.2.6.8^\circ$).

2°. Восстановление изображения объекта по его голограмме C осуществляют, просвечивая ее как диапозитив опорной волной 2 от того же самого лазера, который был использован при снятии голограммы (рис. $V.2.10, б$). При этом ориентация пластинки с голограммой по отношению к опорной волне также должна быть сохранена. Волна 2 дифрагирует на голограмме. В результате дифракции наблюдаются два объемных изображения объекта — мнимое и действительное. Мнимое изображение Q' находится в том же месте по отношению к голограмме, где помещался объект Q при съемке. Это изображение видно при наблюдении сквозь голограмму как через окно. Действительное изображение Q'' расположено по другую сторону голограммы. Оно как бы висит в воздухе перед голограммой и является зеркальным изображением объекта.

Обычно пользуются мнимым голографическим изображением, которое по зрительному восприятию тождественно самому объекту. Оно не только обладает свойством объемности, но его перспектива изменяется в зависимости от положения глаз наблюдателя по отношению к голограмме. Например, перемещая голову вдоль голограммы, можно заглянуть за предмет, находящийся на переднем плане голографического изображения.

3°. Интерференционная картина в каждой точке голограммы определяется светом, рассеянным всеми точками объекта. Поэтому любой участок голограммы содержит информацию обо всем объекте и позволяет восстановить изображение всего объекта, если при повреждении голограммы сохраняется только один этот ее участок. Чем меньше размеры сохранившейся части голограммы, тем меньше света дифрагирует на ней на стадии восстановления изображения. Соответственно снижается яркость и ухудшается четкость голографического изображения объекта. Таким образом, голограмма имеет существенные преимущества в отношении надежности хранения информации перед обычным фотоснимком или фотонегативом, каждый элемент которых содержит информацию только об изображенной на нем части объекта.

Голографическая запись информации отличается большой емкостью и компактностью. Так, на одной и той же фотопластинке можно записать множество различных голограмм. Для этого достаточно, например, каждую из них снимать при своем значении угла падения опорной волны на фотопластинку.

4°. Голография позволяет получать цветные объемные изображения объектов. Для изготовления такой «цветной» голограммы используется монохроматический свет лазеров трех основных цветов (например, красный, зеленый и синий). Запись интерференционных картин, соответствующих свету трех длин волн, про-

изводится одновременно или последовательно на одной и той же фотоластинке. Для восстановления цветного объемного изображения объекта нужно одновременно направить на голограмму под соответствующими углами три опорных пучка монохроматического света, которые были использованы при ее записи.

5°. Особыми свойствами обладают *объемные голограммы*, получаемые с помощью толстослойных фотоэмульсий. На объемной голограмме фиксируется не плоская, а пространственная интерференционная картина, возникающая при наложении предметной и опорной волн. Такая голограмма подобна пространственной дифракционной решетке. Она способна выделять из падающего на нее белого света монохроматический свет той длины волны, который был использован для записи голограммы. Поэтому восстановление изображения, записанного в виде объемной голограммы, можно осуществить, освещая голограмму как соответствующим монохроматическим, так и белым светом. Если объемная голограмма «цветная», то для восстановления цветного объемного изображения ее достаточно осветить белым светом.

Глава V.3. ПОГЛОЩЕНИЕ, РАССЕЯНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА

§ V.3.1. Взаимодействие света с веществом

1°. Согласно представлениям классической электронной теории, переменное электромагнитное поле световой волны, распространяющейся в диэлектрической среде, вызывает вынужденные колебания связанных зарядов (электронов и ионов), входящих в состав молекулы среды. Соответственно каждую молекулу среды можно рассматривать как систему осцилляторов с различными циклическими частотами собственных колебаний (IV.1.1.1°). Ионы значительно массивнее электронов и совершают заметные колебания только под действием низкочастотного (инфракрасного) излучения. В области частот видимого и ультрафиолетового излучения определяющую роль играют вынужденные колебания внешних, наиболее слабо связанных электронов атомов и молекул, называемых *оптическими электронами*.

2°. Электроны и ионы, совершая вынужденные колебания под действием света, излучают вторичные световые волны той же частоты. Средние расстояния между молекулами среды обычно во много раз меньше длины когерентности света (V.1.1.4°). Поэтому вторичные волны, излучаемые множеством соседних молекул, когерентны и интерferируют при наложении.

Если среда однородна и изотропна (IV.3.1.6°), то в результате интерференции образуется проходящая волна, фазовая скорость которой зависит от частоты, а направление распространения совпадает с направлением распространения первичной волны.

3°. В случае оптически неоднородной среды в результате наложения первичной и вторичной волн возникает рассеяние света (V.3.1.1°). Наконец, при падении света на границу раздела двух различных сред в результате интерференции возникает не только проходящая, но также и отраженная волна. Таким образом, в образовании отраженной волны участвует более или менее значительный слой частиц среды, прилегающий к отражающей поверхности. Поэтому при полном внутреннем отражении (IV.4.5.8°) электромагнитное поле световой волны не обры-

вается на границе раздела с оптически менее плотной средой, а частично проникает в нее. Однако напряженность поля E в этой среде очень быстро убывает по мере удаления от границы по закону:

$$E \sim \exp \left[-\frac{2\pi z}{\lambda_2} \sqrt{(\sin^2 i / n_{21}^2) - 1} \right],$$

где z — расстояние от границы раздела, i — угол падения ($i > i_{\text{пр}}$), λ_2 — длина волны света в среде, n_{21} — относительный показатель преломления среды.

§ V.3.2. Поглощение света

1°. *Поглощением света* называется явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе, происходящее вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества (II.2.1.2°) или в энергию вторичного излучения, имеющего другой спектральный состав и иные направления распространения (фотолюминесценция (VI.2.5.B.5°)). Поглощение света может вызывать нагревание вещества, возбуждение и ионизацию атомов или молекул, фотохимические реакции и др. процессы в веществе.

Поглощение света описывается *законом Бугера — Ламберта (законом Бугера)*, согласно которому интенсивность I плоской волны монохроматического света уменьшается по мере прохождения через поглощающую среду по экспоненциальному закону:

$$I = I_0 e^{-a'x}.$$

Здесь I_0 и I — значения интенсивности света на входе и выходе из слоя среды толщиной x , а a' — *натуральный показатель поглощения среды*, который зависит от химической природы и состояния поглощающей среды и от длины волны света λ .

Для разбавленного раствора поглощающего вещества в непоглощающем растворителе выполняется *закон Бера*: $a' = bc$, где c — концентрация раствора, а b — коэффициент пропорциональности, не зависящий от c . В концентрированных растворах закон Бера нарушается из-за влияния взаимодействия между близко расположенными молекулами поглощающего вещества.

2°. В согласии с законом Бугера — Ламберта уравнение плоской линейно поляризованной монохроматической световой волны, распространяющейся в поглощающей среде вдоль положительного направления оси OX , имеет вид:

$$E = E_0 \exp \left(-\frac{1}{2} a'x \right) \cos(\omega t - kx).$$

Здесь E — напряженность электрического поля волны в точках с координатой x , E_0 — амплитуда E в точках плоскости $x=0$, ω — циклическая частота света, $k = 2\pi/\lambda = (\omega/c)n$ — волновое число, λ — длина волны света в среде, c — скорость света в вакууме, а n — показатель преломления среды.

В экспоненциальной форме уравнение этой волны имеет вид (IV.3.2.7°):

$$\tilde{E} = E_0 \exp \left(-\frac{1}{2} a'x \right) \exp [i(\omega t - kx)] = E_0 \exp \left[i \left(\omega t - \tilde{n} \frac{\omega x}{c} \right) \right],$$

где $\tilde{n} = n - ik$ — *комплексный показатель преломления среды* ($i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица), а

$$k = \frac{a'c}{2\omega} = \frac{a'\lambda_0}{4\pi}$$

— *главный показатель поглощения среды*, характеризующий убывание интенсивности и амплитуды плоской волны по мере ее распространения в среде, $\lambda_0 = n\lambda$ — длина волны света в вакууме.

3°. Зависимость натурального показателя поглощения диэлектрика a' от длины волны света λ_0 , характеризующая *спектр поглощения света* в этой среде, связана с явлением резонанса при вынужденных колебаниях электронов в атомах и атомов в молекулах диэлектрика. Диэлектрики поглощают свет более или менее селективно: поглощение велико лишь в областях частот, близких к частотам собственных колебаний электронов в атомах и атомов в молекулах. Наиболее четко это явление *резонансного поглощения света* обнаруживается у разреженных одноатомных газов (например, у паров большинства металлов), для которых характерен *линейчатый спектр поглощения света*. Дискретные частоты интенсивного поглощения света совпадают с частотами собственного излучения возбужденных атомов этих газов.

У газов с многоатомными молекулами наблюдаются системы тесно расположенных линий, образующих *полосы поглощения*. Структура полос поглощения определяется составом и строением молекул. Жидкие и твердые диэлектрики имеют *сплошные спектры поглощения*, состоящие из сравнительно широких полос поглощения, в пределах которых натуральный показатель поглощения a' достигает значительной величины и плавно изменяется в зависимости от длины волны λ_0 . Такой ход зависимости a' от λ_0 у конденсированных сред объясняется сильным взаимодействием между частицами среды, приводящим к появлению множества дополнительных резонансных частот.

4°. При достаточно больших значениях интенсивности света закон Бугера — Ламберта (п. 1°) нарушается: показатель поглощения диэлектрической среды начинает зависеть от I , уменьшаясь с ростом I . Это явление, необъяснимое в рамках классической теории поглощения света, легко истолковывается в квантовой теории взаимодействия света с веществом. При поглощении света часть молекул среды переходит в возбужденное состояние. Возбужденные молекулы не могут участвовать в дальнейшем поглощении света до тех пор, пока они не вернутся, растратив свою избыточную энергию, в невозбужденное («нормальное») состояние. Доля возбужденных молекул среды тем больше, чем больше интенсивность света и чем больше среднее время $\langle \tau \rangle$ жизни молекулы в возбужденном состоянии. Если доля этих молекул незначительна, то поглощение света происходит в соответствии с законом Бугера — Ламберта. В противном случае a' уменьшается с ростом интенсивности света.

Можно осуществить такое неравновесное состояние среды, при котором доля возбужденных молекул будет столь велика, что натуральный показатель поглощения среды станет отрицательным. Это явление используется в квантовых генераторах радиоволн и света (VI.2.6.8°).

5°. Металлы, находящиеся в конденсированном состоянии, содержат огромное количество электронов проводимости и потому обладают высокой электрической проводимостью. Под действием света электроны проводимости совершают переменное движение и излучают вторичные волны. В результате наложения первичной волны, падающей на поверхность металла, и вторичных волн образуются интенсивная отраженная волна и сравнительно слабая волна, проходящая в металл. Коэффициент отражения (IV.4.5.6°) может достигать 95% и более.

Он зависит от чистоты поверхности металла, его электрической проводимости и частоты света. Преломленная волна очень быстро поглощается в металле. Ее энергия расходуется на джоулеву теплоту, выделяемую токами проводимости, возникающими под действием света в тонком слое металла у его поверхности. В области частот инфракрасного излучения оптические свойства металлов определяются главным образом электронами проводимости. Однако в области видимого света и особенно ультрафиолетового излучения заметную роль начинают играть связанные электроны, находящиеся в ионах металла. Это приводит к уменьшению коэффициента отражения и заметной его зависимости от частоты.

§ V.3.3. Рассеяние света

1°. *Рассеянием света* называется явление преобразования света веществом, сопровождающееся изменением направления распространения света и проявляющееся как несобственное свечение вещества. Это свечение обусловлено вынужденными колебаниями электронов в атомах рассеивающей среды под действием падающего света. Рассеяние света происходит в оптически неоднородной среде, показатель преломления которой нерегулярно изменяется от точки к точке вследствие флуктуаций плотности среды либо за счет присутствия в среде инородных малых частиц. В первом случае рассеяние света называется *молекулярным рассеянием*, или *рэлеевским рассеянием*, а во втором — *рассеянием света в мутной среде*. Примерами мутных сред могут служить аэрозоли (дым, туман), эмульсия, коллоидные растворы и другие среды.

2°. Рассеяние света в мутных средах на частицах, размеры которых малы по сравнению с длиной волны λ , называется *явлением Тиндалля*. Система электронов, совершающих вынужденные колебания в атомах электрически изотропной частицы малого размера $r_0 \sim (0,1 : 0,2)\lambda$, эквивалентна одному колеблющемуся электрическому диполю (линейному гармоническому осциллятору). Этот диполь колеблется с частотой ν падающего на него света, а интенсивность излучаемого им света пропорциональна ν^4 (IV.4.3.3°). Поэтому для рассеянного света справедлив *закон Рэлея*, согласно которому интенсивность I рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны: $I \sim \lambda^{-4}$. При прохождении белого света через мелкодисперсную мутную среду в рассеянном свете преобладает коротковолновый (сине-голубой) свет, а в проходящем — длинноволновый (желто-красный). Этим объясняется, например, голубой цвет неба и желто-красный цвет заходящего и восходящего Солнца.

В случае рассеяния естественного света (V.4.1.1°) зависимость интенсивности рассеянного света от угла рассеяния θ имеет вид:

$$I_{\theta} = I_{\pi/2} (1 + \cos^2 \theta).$$

Здесь I_{θ} и $I_{\pi/2}$ — интенсивности света, рассеянного под углами θ и $\pi/2$ к направлению первичного пучка света, падающего на мутную среду. Свет, рассеянный под произвольным углом θ , частично поляризован (V.4.1.1°), а под углом $\theta = \pi/2$ — полностью линейно поляризован (IV.4.1.7°): вектор E поля этого света перпендикулярен к плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи.

3°. По мере увеличения размера r_0 неоднородностей в мутной среде закономерности рассеяния света изменяются. При $r_0 > \lambda$ зависимость I_{θ} от θ имеет слож-

ную форму, причем интенсивность рассеяния света вперед (в направлениях $\vartheta < \pi/2$) больше, чем назад. Это явление называется *эффектом Ми*. Свет, рассеянный под углом $\vartheta = \pi/2$ поляризован лишь частично. Зависимость интенсивности I рассеянного света от длины волны λ имеет вид: $I \sim \lambda^{-p}$, где $p < 4$ и убывает с ростом r_0 . При $r_0 \gg \lambda$ спектральные составы рассеянного и падающего света практически совпадают. Этим объясняется, например, белый цвет облаков.

4°. Молекулярное рассеяние света в чистых средах, не содержащих инородных примесей, обусловлено неоднородностями, которые возникают в процессе беспорядочного теплового движения частиц среды. Эти неоднородности связаны с флуктуациями плотности (II.4.6.1°), а в средах с анизотропными (полярными) молекулами — также с флуктуациями ориентации этих молекул (с флуктуациями анизотропии). В истинных растворах рассеяние света может происходить на флуктуациях концентрации. При обычных условиях размеры областей среды, соответствующих сколько-нибудь значительным флуктуациям, намного меньше длин волн видимого света. Поэтому зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны λ и угла ϑ , а также характер поляризации света при молекулярном рассеянии аналогичны соответствующим закономерностям для явления Тиндаля. Однако, в отличие от последнего, интенсивность молекулярного рассеяния света зависит от температуры среды, возрастая при ее увеличении.

§ V.3.4. Нормальная и аномальная дисперсия света

1°. *Дисперсией света* называется зависимость фазовой скорости v света в среде от его частоты ν . Согласно IV.4.5.1° $v = c/n$, где c — скорость света в вакууме, а n — показатель преломления среды. Поскольку c — универсальная постоянная, одинаковая для электромагнитных волн любой частоты, то существование дисперсии света в среде обусловлено тем, что ее показатель преломления n зависит от частоты ν . Эта зависимость легко обнаруживается, например, при прохождении пучка белого света через призму, изготовленную из какой-либо прозрачной среды.

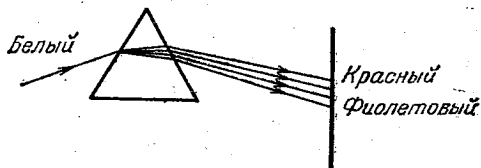


Рис. V.3.1

На экране, установленном за призмой, наблюдается радужная полоска (рис. V.3.1), которая называется *призматическим*, или *дисперсионным*, *спектром*.

2°. Зависимость показателя преломления среды n от частоты света ν нелинейная и немонотонная. Области значений ν , в которых $\frac{dn}{d\nu} > 0$, т. е. с ростом ν увеличивается также и n , соответствуют *нормальной дисперсии света*. Нормальная дисперсия наблюдается у веществ, прозрачных для света. Например, обычное стекло прозрачно для видимого света и в этой области частот наблюдается нормальная дисперсия света в стекле. На рис. V.3.1 показан случай нормальной дисперсии света.

Дисперсия света называется *аномальной*, если $\frac{dn}{d\nu} < 0$, т. е. с ростом ν показатель преломления среды уменьшается. Аномальная дисперсия наблюдается

в областях частот, соответствующих полосам интенсивного поглощения света в данной среде (V.3.2.1°). Например, у обычного стекла эти полосы находятся в инфракрасной и ультрафиолетовой частях спектра.

3°. В зависимости от характера дисперсии групповая скорость u света в эфире может быть как больше, так и меньше фазовой скорости v . Согласно IV.3.4.3° групповая скорость связана с циклической частотой волны ω и ее волновым числом k соотношением: $u = d\omega/dk$. Так как $\omega = 2\pi\nu$, а $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n\nu}{c}$, то

$$u = \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}} = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}}$$

При нормальной дисперсии групповая скорость меньше фазовой ($u < v$).

В случае аномальной дисперсии $u > v$ и, в частности, если $n + \nu \frac{dn}{d\nu} < 1$, то $u > c$.

Этот результат не противоречит утверждению специальной теории относительно того, что скорость передачи любого сигнала (в том числе и светового) не может превосходить c (I.5.1.3°). Понятие групповой скорости правильно описывает распространение только такого сигнала, «форма» которого, т. е. распределение амплитуды и энергии по его «длине», не изменяется при перемещении сигнала в среде. Однако для света это условие выполняется лишь приближенно и тем точнее, чем уже спектр частот сигнала и чем меньше дисперсия света в среде. В областях частот, соответствующих аномальной дисперсии, групповая скорость не совпадает со скоростью сигнала, так как вследствие значительной дисперсии света «форма» сигнала быстро изменяется по мере его распространения в среде.

§ V.3.5. Классическая электронная теория дисперсии света

1°. Оптически прозрачные среды немагнитны ($\mu \approx 1$), так что их показатель преломления (IV.4.5.1°) $n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \kappa_e}$, где ϵ и κ_e — относительная диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость среды (III.4.3.5°). Поэтому дисперсию света можно рассматривать как следствие зависимости ϵ и κ_e от частоты ν переменного электромагнитного поля света, вызывающего электронную поляризацию (III.4.2.2°) среды. Если каждый атом (молекула) среды содержит один оптический электрон (V.3.1.1°), то поляризованность среды (III.4.2.3°) $P_e = -en_0r$, где $-e$ — заряд электрона, r — его смещение из положения равновесия, n_0 — концентрация атомов (молекул) среды. С другой стороны (III.4.2.4°), $P_e = \epsilon_0 \kappa_e E$, где ϵ_0 — электрическая постоянная (IX), а E — напряженность электрического поля света.

2°. Оптический электрон совершает вынужденные колебания под действием следующих сил:

а) возвращающей квазиупругой силы (VII.1.3.5°) $F_{\text{возвр}} = -m\omega_0^2 r$, где m и ω_0 — масса электрона и циклическая частота его свободных незатухающих колебаний;

б) силы сопротивления $F_{\text{сопр}} = -2\beta m \frac{dr}{dt}$, где β — коэффициент затухания свободных колебаний электрона;

в) вынуждающей силы $F = -eE$, действующей на электрон со стороны переменного поля напряженности E .

Уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\beta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{eE}{m}.$$

В случае линейно поляризованного монохроматического света с циклической частотой ω напряженность поля $E = E_0 \cos \omega t$, где $E_0 = \text{const}$ — вектор амплитуды. Если, кроме того, среда не поглощает свет, то $\beta = 0$ и установившиеся вынужденные колебания оптического электрона совершаются по закону:

$$r = -\frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

В этом случае поляризованность среды

$$P_e = \frac{n_0 e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{и} \quad \chi_e = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Зависимость показателя преломления среды от ω имеет вид:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

3°. При значениях ω , близких к ω_0 , нельзя пренебрегать поглощением света в среде и считать $\beta = 0$. В поглощающей среде (т. е. при $\beta \neq 0$) колебания оптического электрона и вектора P_e сдвинуты по фазе относительно колебаний напряженности поля E (IV.2.2.2°):

$$r = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$A = -\frac{eE_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Соответственно

$$P_e = \frac{n_0 e^2 E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Для описания свойств поглощающей свет среды вводят, наряду с комплексным показателем преломления (V.3.2.2°) $\tilde{n} = n - ik$, комплексную диэлектрическую восприимчивость $\tilde{\chi}_e$ и комплексную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{\chi}_e = \frac{\tilde{P}_e}{\epsilon_0 \tilde{E}} \quad \text{и} \quad \tilde{\epsilon} = 1 + \tilde{\chi}_e, \quad \text{причем} \quad \tilde{n}^2 = 1 + \tilde{\chi}_e.$$

Здесь \tilde{P}_e и \tilde{E} — комплексные значения поляризованности и напряженности поля:

$$\tilde{P}_e = \frac{n_0 e^2 E_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{и} \quad \tilde{E} = E_0 e^{i\omega t},$$

так что

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= (n - ik)^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} e^{i\varphi_0}, \\ n^2 - \kappa^2 &= 1 + \frac{n_0 e^2 \cos \varphi_0}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = 1 + \frac{n_0 e^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]}, \\ 2n\kappa &= -\frac{n_0 e^2 \sin \varphi_0}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{2n_0 e^2 \beta \omega}{\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]}. \end{aligned}$$

4°. В классической электронной теории дисперсии света в газах каждая молекула газа рассматривается как система из q линейных осцилляторов. Если ω_{0j} и β_j — собственная циклическая частота и коэффициент затухания j -го осциллятора, то

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^q \frac{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}$$

и

$$n\kappa = \frac{n_0 e^2 \omega}{\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}.$$

Безразмерный коэффициент f_j характеризует вклад j -го осциллятора в дисперсию и поглощение света и называется *силой осциллятора*. В классической теории дисперсии значения ω_{0j} и f_j предполагаются известными из опытов.

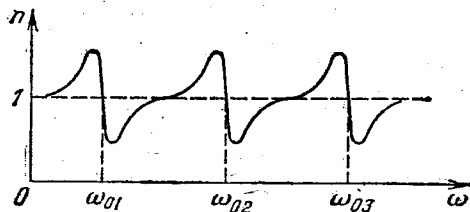


Рис. V.3.2

У газов $\kappa \ll 1$, а n мало отличается от 1, так что $n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \approx 2(n-1)$. Поэтому зависимость n от ω имеет вид:

$$n = 1 + \frac{n_0 e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^q \frac{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}.$$

График этой зависимости показан на рис. V.3.2.

Вблизи каждой из частот ω_{0j} наблюдается аномальная дисперсия.

§ V.3.6. Излучение Вавилова — Черенкова

1°. *Излучением (эффектом) Вавилова — Черенкова* называется отличное от люминесценции (VI.2.5.В.1°) излучение света, которое возникает при движении заряженных частиц в веществе со скоростями V , большими фазовой скорости v

света в этом веществе. Условие существования этого излучения: $\frac{c}{n} < V < c$, где c — скорость света в вакууме, а $n > 1$ — показатель преломления вещества.

В процессе излучения Вавилова — Черенкова энергия и скорость излучающей свободной частицы уменьшаются, т. е. частица тормозится. Однако в отличие от обычного тормозного излучения медленно движущейся заряженной частицы (IV.4.3.4°), являющегося следствием изменения ее скорости, уменьшение скорости частицы при излучении Вавилова — Черенкова само является следствием этого излучения. Иными словами, если бы убыль

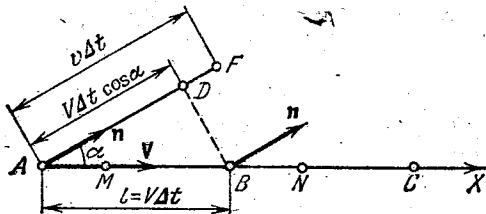


Рис. V.3.3

энергии частицы на излучение Вавилова — Черенкова удавалось каким-либо образом восполнять и частица двигалась бы в веществе с постоянной «сверхсветовой» скоростью ($V > v$), то излучение Вавилова — Черенкова все равно наблюдалось бы, а тормозного излучения в этом случае не было бы.

2°. Заряженная частица вызывает кратковременную поляризацию вещества (III.4.2.2°) в окрестностях тех точек, через которые она проходит при своем движении. Поэтому молекулы среды, лежащие на пути частицы, становятся временно действующими когерентными источниками (IV.3.5.1°) элементарных электромагнитных волн, интерферирующих при наложении.

Если $V < v = c/n$, то элементарные волны гасят друг друга. Пусть заряженная частица движется со скоростью $V (V < v)$ вдоль оси OX (рис. V.3.3) и в моменты времени t и $t + \Delta t$ находится соответственно в точках A и B , расстояние между которыми $l = V\Delta t$. Разность хода элементарных волн, которые излучаются из точек A и B в произвольном направлении n , составляющем угол α с вектором V ,

$$\Delta = DF = (v - V \cos \alpha) \Delta t = l \left(\frac{v}{V} - \cos \alpha \right).$$

Для каждого значения λ длины волны излучения можно найти такое значение $l = l_{\alpha\lambda}$, при котором $\Delta = \lambda/2$, так что элементарные волны гасят друг друга:

$$l_{\alpha\lambda} = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{v}{V} - \cos \alpha \right)}.$$

При $l = l_{\alpha\lambda}$ излучение в направлении n из любой точки M отрезка AB траектории заряженной частицы гасится при интерференции излучением в том же направлении из сходственной ей точки N соседнего участка $BC = AB = l_{\alpha\lambda}$, отстоящей от M на расстоянии $MN = l_{\alpha\lambda}$. Поэтому при равномерном прямолинейном движении заряженной частицы в веществе с «досветовой» скоростью частица не излучает.

3°. Если частица движется в веществе со «сверхсветовой» скоростью $V > v = \frac{c}{n}$, то значение $l_{\alpha\lambda}$, удовлетворяющее условию гашения элементарных

волн,

$$l_{\alpha\lambda} = \frac{\lambda}{2 \left| \frac{v}{V} - \cos \alpha \right|}$$

можно найти для всех значений угла α , кроме значения

$$\phi = \arccos \frac{v}{V} = \arccos \frac{c}{nV}.$$

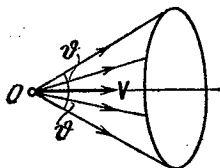


Рис. V.3.4

Для направления $\alpha = \phi$ разность хода элементарных волн, излучаемых из любых двух точек A и B траектории заряженной частицы (рис. V.3.3), равна нулю:

$$\Delta = DF = (v - V \cos \phi) \Delta t = 0.$$

Следовательно, элементарные волны, распространяющиеся в направлении $\alpha = \phi$, взаимно усиливаются при интерференции, образуя результирующее излучение в этом направлении — излучение Вавилова — Черенкова. Свет, возникающий на каждом малом участке траектории заряженной частицы, распространяется вдоль образующих конуса, вершина которого O (рис. V.3.4) расположена на этом участке, ось совпадает с траекторией частицы, а образующие составляют с осью угол $\phi = \arccos(c/nV)$. Свет поляризован так, что вектор \mathbf{E} направлен по нормали к поверхности конуса, а вектор \mathbf{H} — по касательной к ней.

Г л а в а V.4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

§ V.4.1. Поляризация света при отражении и преломлении на границе раздела двух диэлектрических сред

1°. Свет, испускаемый обычными (нелазерными) источниками, представляет собой набор множества плоско поляризованных пучков волн (V.1.1.3°), электрические векторы \mathbf{E} которых колеблются вдоль всевозможных направлений, перпендикулярных к лучу (IV.3.2.1°). Свет называется *естественным*, или *неполяризованным*, если ни одно из указанных направлений колебаний не является преимущественным. В естественном свете результирующая напряженность \mathbf{E} совершает в каждой точке поля колебания, направление которых быстро и беспорядочно изменяется в плоскости, перпендикулярной лучу.

Свет называется *частично поляризованным*, если в нем имеется преимущественное направление колебаний вектора \mathbf{E} . Частично поляризованный свет можно рассматривать как совокупность («смесь») одновременно распространяющихся в одном и том же направлении естественного и линейно поляризованного света (IV.4.1.7°).

2°. *Поляризацией света* называется выделение линейно поляризованного света из естественного или частично поляризованного. Для этой цели используют специальные устройства, называемые *поляризаторами*. Их действие основывается на поляризации света при его отражении и преломлении на границе раздела двух диэлектрических сред, а также на явлениях двойного лучепреломления

(V.4.2.1°) и дихроизма (V.4.2.10°). Те же устройства можно использовать и в качестве *анализаторов*, т. е. для определения характера и степени поляризации света.

Пусть на анализатор падает перпендикулярно к плоскости рис. V.4.1 линейно поляризованный свет, электрический вектор E_p которого направлен вдоль линии $p-p$ и колеблется с амплитудой A_p . Пусть электрический вектор E_a света, пропускаемого анализатором, направлен вдоль линии $a-a$, составляющей с $p-p$ угол α . Падающий свет можно представить в виде двух волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях (IV.4.1.8°). Волна, электрический вектор E_1 которой колеблется вдоль направления, перпендикулярного $a-a$, с амплитудой $A_1 = A_p \sin \alpha$, не может пройти через анализатор. Зато вторая волна, электрический вектор E_2 которой колеблется вдоль направления $a-a$ с амплитудой $A_2 = A_p \cos \alpha$, полностью проходит через анализатор. Следовательно, амплитуда света, выходящего из анализатора,

$$A_a = A_2 = A_p \cos \alpha.$$

Соответственно интенсивности I_a и I_p линейно поляризованного света, пропущенного анализатором и падающего на него, связаны *законом Малюса*:

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha.$$

Главной плоскостью поляризатора (или *анализатора*) называется плоскость поляризации (плоскость колебаний, согласно прежней терминологии (IV.4.1.7°)) света, пропускаемого поляризатором (или анализатором).

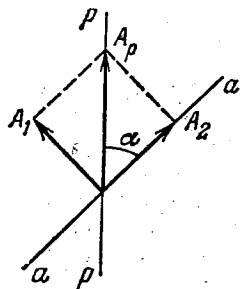


Рис. V.4.1

3°. При изучении закономерностей поляризации света в результате отражения и преломления естественного света последний удобно рассматривать как совокупность одинаковых по интенсивности линейно поляризованных волн двух типов: s - и p -волн (IV.4.5.4°). Коэффициент отражения (IV.4.5.6°) s -волны (R_s) всегда больше, чем коэффициент отражения p -волны (R_p). Поэтому, в отличие от падающего естественного света, отраженный и проходящий (преломленный) свет частично поляризованы. В отраженном свете преобладают колебания вектора E напряженности электрического поля s -типа (перпендикулярно к плоскости падения), а в проходящем — колебания p -типа (в плоскости падения).

Закон Брюстера: отраженный свет полностью линейно поляризован при угле падения $i = i_{Br}$, удовлетворяющем условию $\operatorname{tg} i_{Br} = n_{21}$, где n_{21} — относительный показатель преломления отражающей свет среды.

Угол i_{Br} называется *углом Брюстера*. Если $i = i_{Br}$, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны и коэффициент отражения p -волны $R_p = 0$ (IV.4.5.6°). Поэтому отражаются только волны s -типа. Однако их коэффициент отражения значительно меньше 1 (около 0,15 для стекла). Таким образом, проходящий свет поляризован лишь частично.

4°. Степень поляризации проходящего света можно повышать, подвергая его ряду последовательных отражений и преломлений. Это осуществляется в стопе, состоящей из нескольких одинаковых и параллельных друг другу пластин из прозрачного диэлектрика (например, стекла), установленных под углом Брюстера

к падающему пучку света. Если число пластин в стопе достаточно велико, то проходящий через нее свет оказывается тоже практически линейно поляризованным (p -типа). В отсутствие поглощения света в стопе интенсивности I_s и I_p отраженного и проходящего линейно поляризованного света одинаковы и равны половине интенсивности I_0 падающего естественного света:

$$I_s = I_p = \frac{1}{2} I_0.$$

5°. Согласно представлениям классической электронной теории образование отраженной волны обусловлено вторичными волнами, которые излучают молекулы — осцилляторы отражающей среды (V.3.1.3°). Волне s -типа соответствуют осцилляторы (колеблющиеся электрические диполи), оси которых перпендикулярны к плоскости падения. Эти осцилляторы показаны на рис. V.4.2 точками, нанесенными на преломленный луч. Из полярной диаграммы направленности излучения диполя (рис. IV.4.4) видно, что такие осцилляторы должны интенсивно излучать во всех направлениях, лежащих в плоскости падения, т. е. участвовать в образовании как отраженной, так и преломленной s -волн.

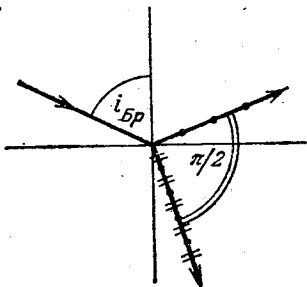


Рис. V.4.2

Волне p -типа соответствуют осцилляторы, оси которых лежат в плоскости падения и перпендикулярны преломленному лучу (показаны на рис. V.4.2 в виде поперечных черточек). Осцилляторы вдоль своей оси не излучают (рис. IV.4.4), а при $i = i_{БР}$ отраженный луч перпендикулярен преломленному и, следовательно, параллелен осям этих осцилляторов. Поэтому при $i = i_{БР}$ указанные осцилляторы не излучают в направлении отраженного луча и вклада в отраженную волну не дают. Соответственно отраженный свет полностью линейно поляризован (волна s -типа).

§ V.4.2. Двойное лучепреломление

1°. Большинство кристаллов оптически анизотропно (неизотропно, IV.3.1.6°). Их относительная диэлектрическая проницаемость и показатель преломления зависят от направления электрического вектора E световой волны. В оптически анизотропных кристаллах наблюдается явление *двойного лучепреломления*, которое состоит в том, что луч света, падающий на поверхность кристалла, раздваивается в нем на два преломленных луча. На рис. V.4.3 показано двойное лучепреломление света в кристалле исландского шпата (CaCO_3).

2°. *Оптической осью кристалла* называется направление в оптически анизотропном кристалле, вдоль которого свет распространяется, не испытывая двойного лучепреломления. Важно подчеркнуть, что оптическая ось кристалла не является какой-то одной особой прямой линией в нем, подобной, например, оси симметрии тела. Она характеризует лишь избранное направление в кристалле и может быть проведена через любую точку кристалла.

Оптически анизотропные кристаллы бывают, в зависимости от типа их симметрии, *одноосными* либо *двуосными*, т. е. имеют одну или две оптических оси.

Примером одноосного кристалла является исландский шпат, оптическая ось которого совпадает по направлению с диагональю M_0N_0 кристалла (рис. V.4.3).

Главной плоскостью, или главным сечением, одноосного кристалла для какого-либо луча называется плоскость, проходящая через этот луч и пересекающую его оптическую ось.

3°. В одноосном кристалле один из лучей, образующихся при двойном лучепреломлении, подчиняется обычным законам преломления света (IV.4.5.3°). Он лежит в плоскости падения и удовлетворяет закону Снеллиуса. Поэтому его называют *обыкновенным лучом* и обозначают буквой o . Второй луч обозначают

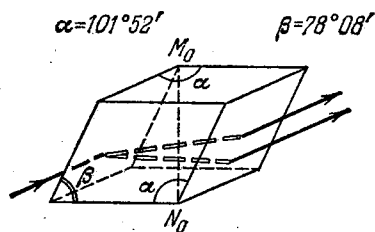


Рис. V.4.3

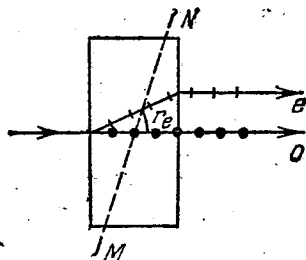


Рис. V.4.4

буквой e и называют *необыкновенным лучом*, так как он, вообще говоря, не лежит в плоскости падения и не подчиняется закону Снеллиуса. Например, даже в случае нормального падения света на поверхность пластинки, вырезанной из одноосного кристалла, необыкновенный луч преломляется (рис. V.4.4). Угол его преломления γ_e зависит от того, как ориентирована поверхность пластинки по отношению к оптической оси кристалла. Он равен нулю только в двух случаях: а) если поверхность пластинки перпендикулярна к оптической оси (свет распространяется в пластинке вдоль оптической оси; не испытывая двойного лучепреломления); б) если поверхность пластинки параллельна оптической оси (свет распространяется в пластинке перпендикулярно к оптической оси).

В двуосном кристалле оба преломленных луча ведут себя как необыкновенные.

4°. Двойное лучепреломление свидетельствует о том, что падающая на оптически анизотропный кристалл световая волна возбуждает две волны, распространяющиеся в кристалле, вообще говоря, по различным направлениям. В одноосном кристалле эти волны называются *обыкновенной* и *необыкновенной волнами*. Обыкновенный и необыкновенный лучи показывают направления векторов Умова — Пойнтинга (IV.4.2.3°) соответствующих волн в кристалле, т. е. направления переноса энергии этими волнами.

Обыкновенная и необыкновенная волны линейно поляризованы (IV.4.1.7°)*). В обыкновенной волне вектор E направлен перпендикулярно к главной плоскости кристалла для обыкновенного луча. Электрический вектор E необыкновенной волны лежит в главной плоскости кристалла для необыкновенного луча. Направ-

*) Часто говорят о линейной поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей, понимая под этим поляризацию соответствующих им волн.

ления векторов \mathbf{E} в обыкновенной и необыкновенной волнах условно показаны на рис. V.4.4 точками на обыкновенном луче и поперечными черточками на необыкновенном луче (предполагается, что оба луча и пересекающая их оптическая ось MN кристалла лежат в плоскости чертежа).

5°. *Лучевой скоростью волны*, или *скоростью луча*, в оптически анизотропном кристалле называется скорость \mathbf{v} переноса энергии волной. В одноосном кристалле *скорость обыкновенного луча* v_o численно одинакова по всем направлениям: $v_o = c/n_o$, где c — скорость света в вакууме, а $n_o = \text{const}$ — *показатель преломления кристалла для обыкновенного луча*. Соответственно *скорость необыкновенного луча* v_e численно равна $v_e = c/n_e$, где n_e — *показатель преломления кристалла для необыкновенного луча*. Значения n_e и v_e зависят от направления необыкновенного луча по отношению к оптической оси кристалла. Для луча, распространяющегося вдоль

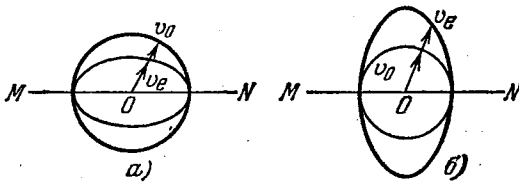


Рис. V.4.5

оптической оси, $n_e = n_o$, $v_e = v_o$. Значение n_e наиболее сильно отличается от n_o для направления, перпендикулярного оптической оси: $n_e = n_{e0}$.

6°. *Лучевой поверхностью волны в кристалле* называется геометрическое место концов

векторов \mathbf{v} лучевой скорости волны, проведенных из некоторой точки O кристалла во всевозможных направлениях. В одноосном кристалле лучевая поверхность обыкновенной волны имеет вид сферы, а лучевая поверхность необыкновенной волны — эллипсоида вращения вокруг оптической оси MN , проведенной через точку O . Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках их пересечения с оптической осью MN . Если $n_e \geq n_o$, то эллипсоид вписан в сферу (рис. V.4.5, а), а если $n_e < n_o$, то эллипсоид описан вокруг сферы (рис. V.4.5, б). В первом случае одноосный кристалл называется *оптически положительным*, во втором — *оптически отрицательным*.

7°. Для объяснения двойного лучепреломления в одноосном кристалле и нахождения направлений обыкновенного и необыкновенного лучей можно воспользоваться графическим методом Гюйгенса. Пусть на плоскую поверхность ab одноосного оптически отрицательного кристалла (или вырезанной из него пластинки) падает под углом i плоская, неполяризованная световая волна (рис. V.4.6). Оптическая ось кристалла MN , проведенная в точке A поверхности ab , лежит в плоскости чертежа и составляет с ab угол γ . В рассматриваемый момент времени t фронт AD падающей волны достиг точки A поверхности кристалла, и она становится источником двух линейно поляризованных элементарных вторичных волн в кристалле — обыкновенной и необыкновенной. К моменту времени $t + \Delta t$, где Δt — время прохождения падающим светом расстояния DK , возмущение, распространяющееся из точки A в виде обыкновенной элементарной волны, достигает точек сферы радиуса $v_o \Delta t$ с центром в A . Возмущение, распространяющееся из точки A в виде необыкновенной элементарной волны, достигает к этому же времени точек поверхности эллипсоида, касающегося сферы радиуса $v_o \Delta t$ в точке L ее пересечения с оптической осью MN . Этот эллипсоид геометрически подобен лучевой поверхности необыкновенной волны в кристалле (п. 5°).

Плоскости KC_o и KC_e , перпендикулярные к плоскости чертежа и касательные соответственно к сфере и к эллипсоиду, указывают, согласно принципу Гюйгенса (V.2.1.1°), положения в момент времени $t + \Delta t$ фронтов обыкновенной и необыкновенной волн, действительно распространяющихся в одноосном кристалле. Прямые, проведенные из точки A в точки касания B и F , показывают направления обыкновенного и необыкновенного лучей. Оба луча лежат в плоскости падения, но необыкновенный луч не ортогонален к волновой поверхности KC_e . Обыкновенная и необыкновенная волны линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Направления электрических векторов E_o и E_e в обыкновенной и необыкновенной волнах показаны на рис. V.4.6 точками и поперечными черточками, нанесенными на соответствующие лучи.

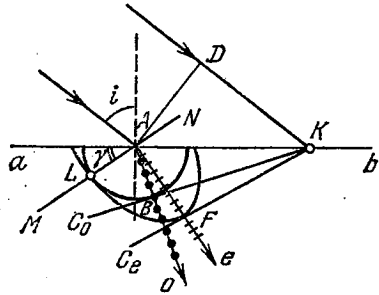


Рис. V.4.6

Примечание. Если оптическая ось MN кристалла не лежит в плоскости падения света, то необыкновенный луч, вообще говоря, тоже не лежит в плоскости падения. Соответственно угол между плоскостями поляризации обыкновенной и необыкновенной волн слегка отличается от прямого.

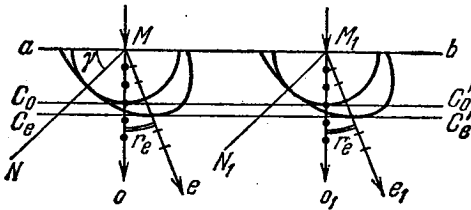


Рис. V.4.7

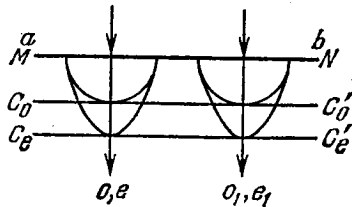


Рис. V.4.8

8°. Построение обыкновенного и необыкновенного лучей в случае нормального падения света на поверхность оптически отрицательного одноосного кристалла показано на рис. V.4.7. Здесь ab — положение фронта падающей волны в момент времени t , $C_oC'_o$ и $C_eC'_e$ — положения в момент времени $t + \Delta t$ фронтов обыкновенной и необыкновенной волн в кристалле.

Предполагается, что оптическая ось MN лежит в плоскости падения и образует с преломляющей поверхностью ab угол γ , отличный от 0 и $\pi/2$. Из рис. V.4.7 видно, что обыкновенный луч является продолжением падающего, а необыкновенный преломляется на угол $r_e \neq 0$.

На рис. V.4.8 рассмотрен случай, когда свет падает нормально на плоскую поверхность ab оптически отрицательного одноосного кристалла, оптическая ось MN которого параллельна ab . Плоскость чертежа выбрана так, что оптическая ось MN лежит в ней. В этом случае, как видно из построения, необыкновенный луч не преломляется на поверхности ab и совпадает по направлению с обыкновенным и падающим лучами. Однако скорости обыкновенного и необыкновенного лу-

чей в кристалле в этом направлении различны и соответственно равны (V.4.2.5°): $v_o = c/n_o$ и $v_e = c/n_{e0}$. Поэтому при прохождении обоими лучами (волнами) одного и того же расстояния d в кристалле между ними возникает оптическая разность хода (V.1.3.2°)

$$\Delta s = d(n_o - n_{e0}).$$

9°. На рис. V.4.9 показан ход лучей в *поляризационной призме*. Она вырезана из кристалла исландского шпата так, что ее грани AB и CD параллельны оптической оси MN . Призма разрезана по диагональной плоскости AC и склеена по

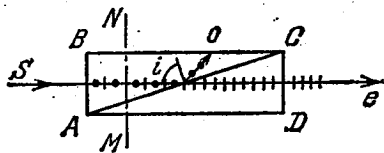


Рис. V.4.9

этой поверхности тонким слоем оптически изотропного прозрачного вещества, называемого канадским бальзамом. Кристалл исландского шпата — одноосный, оптически отрицательный; значения его показателей преломления (п. 5°): $n_o = 1,658$ и $n_{e0} = 1,486$. Показатель преломления канадского бальзама $n_{к.б.} = 1,550$,

т. е. канадский бальзам — среда оптически менее плотная, чем материал призмы для обыкновенного луча, и среда оптически более плотная — для необыкновенного луча. Свет падает на призму нормально к ее грани AB (луч S на рис. V.4.9). Обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются в призме, не преломляясь, вплоть до слоя канадского бальзама AC . Размеры призмы подобраны таким образом, чтобы угол падения i обыкновенного луча на поверхность AC был больше предельного угла полного внутреннего отражения (IV.4.5.8°). Поэтому обыкновенная волна полностью отражается от слоя канадского бальзама (луч o на рис. V.4.9). Необыкновенная волна свободно проходит через слой канадского бальзама и вторую половину поляризационной призмы. Таким образом, поляризационная призма может быть использована как поляризатор (V.4.1.2°).

10°. Все двоякопреломляющие кристаллы в той или иной степени поглощают свет. Это поглощение анизотропно: показатель поглощения (V.3.2.1°) зависит от ориентации электрического вектора световой волны и от направления распространения света в кристалле, а также от длины волны. Это явление называется *дихроизмом*, или *плеохроизмом*, так как проявляется в различной окраске кристаллов по разным направлениям. Примером сильно дихроичного кристалла является турмалин — одноосный кристалл, в котором обыкновенный луч поглощается во много раз сильнее необыкновенного. Еще более ярко выраженный дихроизмом обладают кристаллы герпатита, которые используют для изготовления тонких пленок, преобразующих естественный свет в линейно поляризованный и называемых *поляроидами*.

§ V.4.3. Интерференция поляризованного света

1°. Цуги волн со всевозможными ориентациями относительно луча плоскостей их поляризации, входящие в состав естественного света, некогерентны, так как соответствуют излучению различных независимых атомов источника света. Все эти цуги участвуют в образовании обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в одноосном кристалле при падении на него есте-

ственного света. Однако вклад каждого отдельного луча в эти две волны, вообще говоря, неодинаков. Он больше в ту волну, плоскость поляризации которой составляет меньший угол α с плоскостью поляризации луча. Иными словами, обыкновенная и необыкновенная волны в основном порождаются *р а з н ы м и* лучами, входящими в состав естественного света. Следовательно, обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него естественного света, некогерентны.

2°. Обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него линейно поляризованного света (полученного из естественного, например, с помощью поляризационной призмы (V.4.2.9°) или какого-либо другого поляризатора), когерентны между собой. Это связано с тем, что у всех лучгов, входящих в состав падающего света, плоскости поляризации ориентированы одинаково.

Пусть параллельный пучок света, прошедшего через поляризатор Π (рис. V.4.10), падает нормально на поверхность ab плоско-параллельной пластинки B , вырезанной из одноосного кристалла параллельно его оптической оси MN (ось MN параллельна плоскости ab). На рис. V.4.11 показан вектор A_i амплитуды i -го

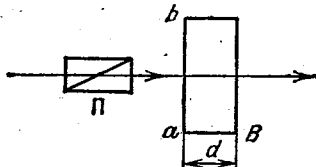


Рис. V.4.10

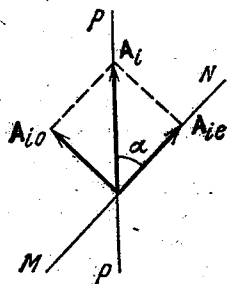


Рис. V.4.11

луча, который отложен вдоль линии $p-p$, соответствующей направлению колебаний электрического вектора в свете, выходящем из поляризатора. Вклады i -го луча в обыкновенную и необыкновенную волны характеризуются амплитудами $A_{io} = A_i \sin \alpha$ и $A_{ie} = A_i \cos \alpha$, отношение которых $(A_{io}/A_{ie}) = \operatorname{tg} \alpha$ одинаково для всех лучгов. В частности, если $\alpha = \pi/4$, то $A_{io} = A_{ie}$, так что попарно когерентные лучи, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, имеют одинаковые интенсивности.

3°. На входе в кристаллическую пластинку B (п. 2°) электрические векторы E_o и E_e обыкновенной и необыкновенной волн колеблются в одной фазе, а их геометрическая сумма равна электрическому вектору E_p линейно поляризованного монохроматического падающего света: $E_p = E_o + E_e$. В пластинке обыкновенная и необыкновенная волны распространяются с разными скоростями (V.4.2.8°). Поэтому на выходе из пластинки толщиной d взаимно перпендикулярные электрические векторы E'_o и E'_e обыкновенной и необыкновенной волн колеблются со сдвигом по фазе

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \Delta s}{\lambda_0} = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_{eo}),$$

где Δs — оптическая разность хода этих волн (V.4.2.8°), а λ_0 — длина волны света в вакууме. Следовательно, в результате прохождения через пластинку свет

становится, в общем случае, эллиптически поляризованным (IV.4.1.7°): конец вектора $E' = E'_o + E'_e$ описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной лучу. Если α — угол между направлением колебаний вектора E_p и оптической осью MN пластинки, то амплитуды A_o и A_e векторов E_o и E_e равны: $A_o = A_p \sin \alpha$ и $A_e = A_p \cos \alpha$, где A_p — амплитуда вектора E_p . В отсутствие поглощения света в пластинке амплитуды векторов E'_o и E'_e также равны A_o и A_e .

4°. В зависимости от толщины d пластинки возможно несколько частных случаев.

а) *Пластинка в четверть волны*, толщина которой удовлетворяет соотношению: $d(n_o - n_{e0}) = \pm \left(m + \frac{1}{4}\right) \lambda_0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, знак плюс соответствует оптически отрицательному кристаллу, а знак минус — оптически положительному (V.4.2.6°). На выходе из такой пластинки колебания векторов E'_o и E'_e сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Если, кроме того, $\alpha = \pi/4$, то свет, выходящий из пластинки, циркулярно поляризован (IV.4.1.7°).

б) *Пластинка в полволны*: $d(n_o - n_{e0}) = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0$. На выходе из такой пластинки колебания векторов E'_o и E'_e сдвинуты по фазе на π . Свет, выходящий из пластинки, остается линейно поляризованным. Однако, направления колебаний векторов E_p и E' падающего и проходящего света симметричны относительно главной плоскости пластинки (рис. V.4.12).

в) *Пластинка в целую волну*: $d(n_o - n_{e0}) = \pm m \lambda_0$. В результате прохождения через пластинку свет остается линейно поляризованным в той же плоскости, что и падающий свет.

5°. Когерентные волны, выходящие из кристаллической пластинки B (рис. V.4.10), не могут интерферировать, так как они поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поэтому за пластинкой B устанавливается еще одна поляризационная призма — анализатор A (рис. V.4.13). Анализатор

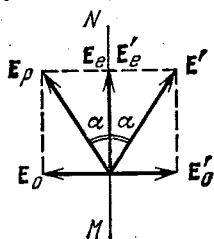


Рис. V.4.12

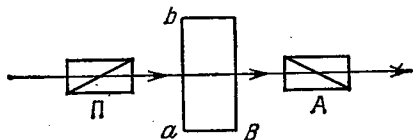


Рис. V.4.13

выделяет из падающих на него когерентных волн составляющие, поляризованные в одной плоскости, и таким образом создает условия, необходимые для осуществления интерференции этих волн. Результат интерференции зависит от разности фаз $\Delta\phi$, приобретенной обыкновенной и необыкновенной волнами в пластинке, от соотношения амплитуд этих волн и угла β между главными плоскостями анализатора и поляризатора (V.4.1.2°).

Например, если угол между главной плоскостью поляризатора и оптической осью MN пластинки $\alpha = \pi/4$, то амплитуды и интенсивности обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы. Пусть при этом на пластинку падает монохрома-

тический свет с длиной волны в вакууме λ_0 . Возможны следующие два предельных случая:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_{e0}) = \begin{cases} \pm 2m\pi \\ \pm (2m+1)\pi \end{cases} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

В первом случае, соответствующем пластинке в целую волну, на анализатор падает свет, линейно поляризованный в главной плоскости поляризатора. Поэтому при $\beta=0$ (анализатор установлен параллельно поляризатору) интенсивность I_a света, проходящего через анализатор, максимальна, а при $\beta=\pi/2$ (анализатор скрещен с поляризатором) $I_a=0$, т. е. при $\beta=0$ наблюдается интерференционный максимум, а при $\beta=\pi/2$ — минимум.

Во втором случае, соответствующем пластинке в полволны, на анализатор падает свет, линейно поляризованный в плоскости, составляющей с главной плоскостью поляризатора угол $2\alpha=\pi/2$. Поэтому при $\beta=0$ наблюдается интерференционный минимум, а при $\beta=\pi/2$ — максимум.

Если на пластинку B (рис. V.4.13) падает линейно поляризованный свет, то при наблюдении через анализатор пластинка видна окрашенной. При вращении анализатора вокруг луча, т. е. при изменении угла β , окраска изменяется. Это связано с тем, что значение сдвига фаз $\Delta\varphi$, определяющее результат интерференции, зависит от длины волны света. Пластинка, толщина d которой в разных местах неодинакова, видна в белом свете причудливо окрашенной, причем каждая цветная интерференционная линия (*изохромата*) проходит через точки равной толщины d . Аналогичная картина наблюдается в пластинке, толщина которой всюду одинакова, но зато различны значения разности $(n_o - n_{e0})$. В этом случае каждая изохромата проходит через точки пластинки, соответствующие одинаковым значениям $(n_o - n_{e0})$.

§ V.4.4. Искусственная оптическая анизотропия

1°. Оптически изотропное прозрачное тело становится анизотропным, если его подвергнуть механической деформации. Это явление иногда называют *фотоупругостью*. При одностороннем растяжении или сжатии изотропного тела вдоль оси OX оно приобретает оптические свойства одноосного кристалла (V.4.2.2°), оптическая ось которого параллельна OX . Разность показателей преломления обыкновенного (n_o) и необыкновенного (n_{e0}) лучей в направлении, перпендикулярном оси OX , пропорциональна нормальному напряжению σ (VII.1.3.3°):

$$n_o - n_{e0} = k\sigma,$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества тела.

2°. *Эффектом, или явлением, Керра* называется возникновение оптической анизотропии у прозрачного изотропного твердого, жидкого или газообразного диэлектрика при помещении его во внешнее электрическое поле. Под действием однородного электрического поля диэлектрик поляризуется и приобретает оптические свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает по направлению с вектором E напряженности поля. Разность показателей преломления поляризованного диэлектрика для необыкновенного и обыкновенного лучей монохроматического света, распространяющегося перпендикулярно направлению

вектора E , удовлетворяет *закоу Керра*:

$$n_{e0} - n_o = B\lambda_0 E^2,$$

где λ_0 — длина волны света в вакууме, а B — *постоянная Керра*. Значение B зависит от природы вещества, длины волны λ_0 и температуры, как правило, уменьшаясь при увеличении последней. Знак разности ($n_{e0} - n_o$) не зависит от направления поля. Для большинства веществ $B > 0$, так что по своим оптическим свойствам в однородном электрическом поле они подобны оптически положительным одноосным кристаллам (V.4.2.6°).

3°. *Эффектом Коттона — Мутона* называется возникновение оптической анизотропии у некоторых изотропных веществ (жидкостей, стекол, коллоидов) при помещении их в сильное внешнее магнитное поле. В однородном магнитном поле вещество приобретает оптические свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает по направлению с вектором H напряженности поля. Разность показателей преломления вещества для необыкновенного и обыкновенного лучей монохроматического света при его распространении в направлении, перпендикулярном вектору H , пропорциональна H^2 :

$$n_{e0} - n_o = C\lambda_0 H^2,$$

где C — *постоянная Коттона — Мутона*, λ_0 — длина волны света в вакууме. Значение C зависит от природы вещества, длины волны λ_0 и температуры.

§ V.4.5. Вращение плоскости поляризации

1°. При прохождении линейно поляризованного света через некоторые вещества, называемые *оптически активными*, плоскость поляризации света (IV.4.1.7°) поворачивается вокруг направления луча. Оптически активны некоторые кристаллы (например, кварц, киноварь и др.), чистые жидкости и растворы (например, скипидар, раствор сахара в воде и др.). Все вещества, активные в жидком состоянии, обладают тем же свойством и в кристаллическом состоянии. Однако некоторые вещества, оптически активные в кристаллическом состоянии, неактивны в жидком. Следовательно, оптическая активность может обуславливаться как строением самих молекул вещества, так и расположением частиц в кристаллической решетке.

2°. В оптически активных кристаллах и чистых жидкостях угол φ поворота плоскости поляризации света пропорционален толщине l слоя вещества, через который проходит свет: $\varphi = \alpha l$. Коэффициент пропорциональности α называется *удельным вращением*, или *постоянным вращением*. Удельное вращение зависит от природы вещества, температуры и длины волны света в вакууме λ_0 . Зависимость α от λ_0 называется *вращательной дисперсией*. Вдали от полос поглощения света веществом вращательная дисперсия подчиняется *закоу Био*: $\alpha \sim \lambda_0^{-2}$.

3°. Большинство оптически активных кристаллов существует в двух модификациях. При прохождении света через кристалл одной модификации, называемой *правовращающей*, или *положительной*, плоскость поляризации поворачивается вправо, т. е. по часовой стрелке (для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу). При прохождении света через кристалл другой модификации, называемой *левовращающей*, или *отрицательной*, плоскость поляризации поворачивается влево (против часовой стрелки). Значения удельного вращення для

обеих модификаций одного и того же оптически активного кристалла отличаются только знаком.

4°. Угол поворота плоскости поляризации света при прохождении им пути l в оптически активном растворе равен:

$$\varphi = [\alpha] cl = [\alpha] DKl.$$

Здесь c — объемно-массовая концентрация оптически активного вещества в растворе (в кг/м^3), D — плотность раствора, а $K=c/D$ — долевая концентрация по массе, т. е. отношение массы оптически активного вещества к массе всего раствора. Коэффициент пропорциональности $[\alpha]$ называется *удельным вращением*, или *постоянной вращения, раствора*. Значение $[\alpha]$ зависит от природы оптически активного вещества и растворителя, длины волны света и температуры.

5°. Оптически неактивная среда приобретает под действием внешнего магнитного поля способность вращать плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль направления поля. Это явление называется *эффектом Фарадея*, или *магнитным вращением плоскости поляризации света*. Угол поворота φ плоскости поляризации пропорционален длине пути света в веществе и напряженности H магнитного поля: $\varphi = VHl$. Коэффициент пропорциональности V называется *постоянной Верде*. Он зависит от природы вещества и длины волны света.

Направление магнитного вращения плоскости поляризации (для наблюдателя, смотрящего вдоль магнитного поля) одинаково при распространении света как по направлению вектора H , так и в обратную сторону. В этом отношении эффект Фарадея отличается от вращения плоскости поляризации света в естественных оптически активных средах.

Глава V.5. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

§ V.5.1. Тепловое излучение. Закон Кирхгофа

1°. Все тела в той или иной степени излучают электромагнитные волны. Например, сильно нагретые тела светятся, а при обычных температурах являются источниками только невидимого инфракрасного излучения.

Электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счет его внутренней энергии (II.2.1.2°), называется *теловым*, или *температурным, излучением*. Оно зависит только от температуры и оптических свойств излучающего тела. Если расход энергии тела на тепловое излучение не восполняется за счет подвода к телу теплоты, то его температура постепенно понижается, а тепловое излучение уменьшается.

Теплообменом излучением (радиационным теплообменом) называется самопроизвольный процесс передачи энергии в форме теплоты от более нагретого тела к менее нагретому, осуществляющийся путем теплового излучения и поглощения электромагнитных волн этими телами.

2°. Тепловое излучение — единственное, которое может находиться в термодинамическом равновесии (II.1.3.3°) с веществом. При равновесии расход энергии тела на тепловое излучение компенсируется за счет поглощения телом такого же количества энергии падающего на него излучения. *Равновесное излучение* устанавливается в адиабатически замкнутой системе (т. е. такой, которая не обмени-

вается теплотой с внешней средой), все тела которой находятся при одной и той же температуре.

Из второго начала термодинамики (II.4.3.2°) следует, что равновесное излучение не зависит от материала тел, образующих замкнутую термодинамически равновесную систему. Объемная плотность энергии равновесного излучения и ее распределение по частотам являются универсальными функциями температуры. Действительно, в противном случае можно было бы взять две адиабатически замкнутые системы A и B (рис. V.5.1), находящиеся при одинаковой температуре $T_A = T_B = T$, и осуществить между ними теплообмен излучением, проделав для этого небольшое отверстие в разделяющей их теплонепроницаемой стенке. Если объемная плотность энергии равновесного излучения в системе A (w_A) больше, чем в системе B (w_B), т. е. $w_A > w_B$, то за счет теплообмена между системами энергия излучения в системе A и ее температура должны уменьшаться, а энергия излучения в системе B и ее температура должны увеличиваться. Этот процесс должен идти до тех пор, пока значения объемной плотности энергии в системах A и B не станут равными: $w'_A = w'_B$. Однако при этом $T'_B > T'_A$, так что рассматриваемый процесс противоречит второй формулировке 2-го начала термодинамики (II.4.3.2°, б). Следовательно, w_A не может быть больше w_B . Точно так же w_B не может быть больше w_A , т. е. $w_A = w_B = w(T)$ — универсальная функция температуры.

3°. Спектральной характеристикой равновесного излучения служит *спектральная плотность объемной плотности энергии* этого излучения:

$$\rho(\nu, T) = \frac{dw}{d\nu},$$

где dw — энергия равновесного излучения с частотами от ν до $\nu + d\nu$, заключенная в единице объема поля излучения. Объемная плотность энергии этого поля

$$w = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu.$$

Равновесное излучение *изотропно*, т. е. оно не поляризовано и все направления его распространения равновероятны. Энергия dW равновесного излучения в вакууме с частотами от ν до $\nu + d\nu$, падающего за единицу времени на единицу площади поверхности каждого из тел термодинамически равновесной системы, равна:

$$dW = \frac{c}{4} \rho(\nu, T) d\nu,$$

где c — скорость света в вакууме.

4°. *Энергетической светимостью* (интегральной испускательной способностью) тела называется физическая величина R_ν , численно равная энергии электромагнитных волн всевозможных частот (или длин волн) от 0 до ∞ *, излучаемых за единицу времени с единицы площади поверхности тела.

Испускательной способностью, или *спектральной плотностью энергетической светимости*, тела называется физическая величина, численно равная от-

*) Практически достаточно ограничиться интервалом частот и длин волн оптического излучения (IV.4.4.3°).

ношению энергии dW , излучаемой за единицу времени с единицы площади поверхности тела посредством электромагнитных волн в узком интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ (или длин волн в вакууме от λ до $\lambda + d\lambda$), к ширине этого интервала:

$$r_\nu = \frac{dW}{d\nu} \quad \text{и} \quad r_\lambda = \frac{dW}{d\lambda}, \quad r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu,$$

где c — скорость света в вакууме. Значения r_ν (r_λ) зависят от частоты (длины волны), температуры, химического состава тела и состояния его поверхности.

Энергетическая светимость тела связана с r_ν и r_λ соотношениями:

$$R_a = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda.$$

5°. *Поглощательной способностью (монохроматическим коэффициентом поглощения) тела* называется безразмерная величина a_ν , показывающая, какая доля

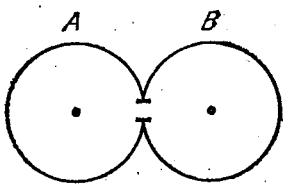


Рис. V.5.1



Рис. V.5.2

энергии электромагнитных волн с частотами от ν до $\nu + d\nu$, падающих на поверхность тела, поглощается им:

$$a_\nu = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}} \leq 1.$$

Значение a_ν зависит от частоты, температуры, химического состава тела и состояния его поверхности.

Абсолютно черным телом называется тело, которое полностью поглощает все падающее на него излучение независимо от направления падающего излучения, его спектрального состава и поляризации, ничего не отражая и не пропуская: $a_\nu^* \equiv 1$. Моделью абсолютно черного тела может служить почти замкнутая полость с небольшим отверстием (рис. V.5.2). Свет, попадающий внутрь полости через отверстие O , претерпевает многократные отражения от стенок. При этом энергия падающего света практически полностью поглощается стенками полости независимо от их материала. Испускательная способность абсолютно черного тела обозначается далее r_ν^* (или r_λ^*), а его энергетическая светимость R_a^* .

Серым телом называется тело, поглощательная способность которого меньше единицы и не зависит от частоты (длины волны) света, направления его распространения и поляризации:

$$\frac{\partial a_\nu^{\text{сер}}}{\partial \nu} \equiv 0, \quad a_\nu^{\text{сер}} = a^{\text{сер}}.$$

6°. Согласно *принципу детального равновесия*, любой микроскопический процесс в равновесной системе должен протекать с такой же скоростью, что и обрат-

ный ему. Этот принцип статистической физики позволяет найти связь между испускательной r_ν и поглощательной a_ν способностями любого непрозрачного тела. Пусть тело входит в состав термодинамически равновесной системы, находящейся при температуре T . Энергия, излучаемая за единицу времени с единицы площади поверхности рассматриваемого тела в интервале частот волн от ν до $\nu + d\nu$, $dW_{\text{изл}} = r_\nu d\nu$. За то же время на том же участке поверхности тела поглощается часть энергии падающего на эту поверхность равновесного излучения (п. 3°), равная $dW_{\text{погл}} = a_\nu \frac{c}{4} \rho(\nu, T) d\nu$. Так как по принципу детального равновесия $dW_{\text{изл}} = dW_{\text{погл}}$, то

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^* = \frac{c}{4} \rho(\nu, T).$$

Это уравнение выражает *закон Кирхгофа*, согласно которому отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и равно испускательной способности абсолютно черного тела r_ν^* при тех же значениях температуры и частоты.

Зависимость r_ν^* от ν и T называется *функцией Кирхгофа*:

$$r_\nu^* = f(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T).$$

7°. Из закона Кирхгофа следует, что энергетическая светимость тела (п. 4°) равна

$$R_\nu = \int_0^\infty a_\nu r_\nu^* d\nu.$$

В частности, энергетическая светимость серого тела

$$R_\nu^{\text{сер}} = a^{\text{сер}} R_\nu^*, \quad \text{где} \quad R_\nu^* = \int_0^\infty r_\nu^* d\nu$$

— энергетическая светимость абсолютно черного тела при той же температуре. Для несерого тела

$$R_\nu = \alpha R_\nu^*,$$

где α — *интегральная степень черноты тела*, которая зависит от материала тела, состояния его поверхности и температуры. Для всех тел, кроме абсолютно черного, $\alpha < 1$.

8°. Равновесное излучение при температуре T тождественно тепловому излучению абсолютно черного тела при той же температуре. Поэтому равновесное излучение часто называют *черным излучением*. Связь между энергетической светимостью абсолютно черного тела и объемной плотностью энергии черного излучения имеет вид:

$$R_\nu^* = \frac{c}{4} \omega = \frac{c}{4} \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu.$$

§ V.5.2. Законы Стефана — Больцмана и Вина

1°. Закон Стефана — Больцмана утверждает, что энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры:

$$R_0^* = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} (\text{К})^{-4}$ — постоянная Стефана — Больцмана. Этот закон можно вывести теоретически, рассматривая методами термодинамики равновесное излучение в замкнутой полости.

2°. Зависимость испускательной способности абсолютно черного тела r_ν^* от частоты ν при нескольких постоянных значениях температуры показана на

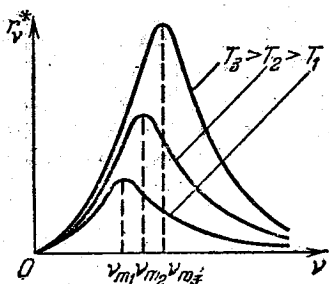


Рис. V.5.3

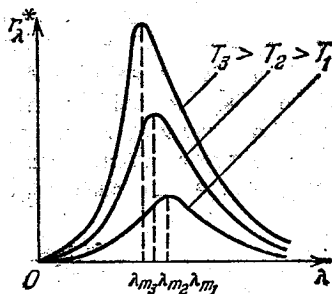


Рис. V.5.4

рис. V.5.3. В области малых частот $r_\nu^* \sim \nu^2 T$, а в области больших частот (правые ветви кривых вдали от максимумов) $r_\nu^* \sim \nu^3 \exp[-a_1 \nu/T]$, где a_1 — постоянный коэффициент.

Энергия излучения абсолютно черного тела распределена неравномерно по его спектру. Абсолютно черное тело почти не излучает в области очень малых и очень больших частот. По мере повышения температуры тела максимум r_ν^* смещается в сторону больших частот в соответствии с законом: $\nu_m = b_1 T$, где ν_m — частота, соответствующая максимуму r_ν^* при температуре T , а b_1 — постоянный коэффициент.

Зависимость испускательной способности абсолютно черного тела $r_\lambda^* = \frac{c}{\lambda^5} r_\nu^*$ (V.5.1.4) от длины волны λ показана на рис. V.5.4. При повышении температуры тела максимум r_λ^* смещается в сторону меньших длин волн в соответствии с законом смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ — постоянная Вина.

3°. Все попытки теоретического обоснования в рамках классической физики экспериментально найденного вида функции Кирхгофа $r_\nu^* = f(\nu, T)$, изображенного на рис. V.5.3, оказались безуспешными. Так, методами термодинамики

удалось получить формулу Вина:

$$r_{\nu}^* = \nu^3 \varphi \left(\frac{\nu}{T} \right),$$

где $\varphi \left(\frac{\nu}{T} \right)$ — неизвестная функция отношения ν/T .

На основе законов электродинамики и закона классической статистической физики о равномерном распределении энергии по степеням свободы равновесной системы (II.3.6.4*) была получена формула Рэля — Джинса:

$$r_{\nu}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°).

Формула Рэля — Джинса согласовалась с экспериментальными данными только в области малых частот. Кроме того, из нее следовал абсурдный вывод о том, что при любой температуре энергетическая светимость абсолютно черного тела R_{ν}^* и объемная плотность энергии w равновесного излучения бесконечно велики. Этот результат, к которому пришла классическая физика в задаче о спектральном распределении равновесного излучения, получил образное название «ультрафиолетовой катастрофы».

§ V.5.3. Формула Планка

1°. Объемная плотность энергии равновесного (черного) излучения в замкнутой полости, а также распределение энергии этого излучения по частотам не зависят от материала стенок полости и полностью определяются температурой. Поэтому в качестве теоретической модели абсолютно черного тела можно взять бесконечную систему гармонических осцилляторов со всевозможными собственными частотами. Каждый из таких осцилляторов соответствует монохроматической компоненте черного излучения. Пусть $\langle \epsilon_{\nu} \rangle$ — среднее значение энергии осциллятора с собственной частотой ν , тогда, как показывают расчеты, испускательная способность абсолютно черного тела

$$r_{\nu}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \epsilon_{\nu} \rangle.$$

Если в качестве $\langle \epsilon_{\nu} \rangle$ взять значение kT , вытекающее из классического закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы (II.3.6.4*)^{*}, то написанное выше выражение для r_{ν}^* совпадает с формулой Рэля — Джинса (V.5.2.3°).

2°. Правильное выражение для средней энергии осциллятора $\langle \epsilon_{\nu} \rangle$ и функции Кирхгофа удалось найти Планку путем введения *квантовой гипотезы*, совершенно чуждой классической физике. В классической физике предполагается, что энергия любой системы изменяется непрерывно, т. е. может принимать любые сколь угодно близкие значения. Согласно квантовой гипотезе Планка энергия

* На одну колебательную степень свободы осциллятора в среднем приходится вдвое больше энергии, чем на одну степень свободы поступательного или вращательного движения, так как осциллятор обладает не только кинетической, но также и потенциальной энергией, которая в среднем равна кинетической энергии.

осциллятора ε_ν может принимать лишь определенные дискретные значения, равные целому числу элементарных порций энергии — *квантов энергии* ε_{ν_0} :

$$\varepsilon_\nu = n\varepsilon_{\nu_0}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Если считать, что распределение осцилляторов по возможным дискретным энергетическим состояниям описывается законом Больцмана (II.3.4.2°), то вероятность p_n нахождения осциллятора в состоянии с энергией $n\varepsilon_{\nu_0}$ при температуре T равна:

$$p_n = C \exp[-n\varepsilon_{\nu_0}/kT].$$

Здесь k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), а C — постоянный коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, \quad \text{т. е. } C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n\varepsilon_{\nu_0}/kT]}.$$

Среднее значение энергии осциллятора

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n \varepsilon_{\nu_0} = \varepsilon_{\nu_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-n\varepsilon_{\nu_0}/kT]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n\varepsilon_{\nu_0}/kT]},$$

откуда

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = -\varepsilon_{\nu_0} \frac{\frac{d}{d\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi)} = -\varepsilon_{\nu_0} \frac{d}{d\xi} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi),$$

где $\xi = \varepsilon_{\nu_0}/kT$. Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi) = \frac{1}{1 - \exp(-\xi)}$$

и

$$-\ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi) = \ln(1 - e^{-\xi}),$$

то

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\varepsilon_{\nu_0}}{\exp(\varepsilon_{\nu_0}/kT) - 1} \quad \text{и} \quad r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{\nu_0}}{\exp(\varepsilon_{\nu_0}/kT) - 1}.$$

Из сопоставления этого выражения для r_ν^* с формулой Вина (V.5.2.3°) следует, что *квант энергии* равен

$$\varepsilon_{\nu_0} = h\nu,$$

где h — универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка* (IX).

Формула Планка для испускательной способности абсолютно черного тела r_ν^* :

$$r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Соответственно спектральная плотность равновесного излучения (V.5.1.3°) равна:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

3°. При малых частотах ($h\nu \ll kT$) $\exp(h\nu/kT) - 1 \approx h\nu/kT$, и формула Планка совпадает с формулой Рэлея — Джинса (V.5.2.3°).

Из формулы Планка следует закон Стефана — Больцмана (V.5.2.1°):

$$R_s^* = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4.$$

Постоянная Планка связана с постоянной Стефана — Больцмана σ (V.5.2.1°) соотношением:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 \sigma}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

4°. Формула Планка для испускательной способности абсолютно черного тела r_λ^* имеет вид:

$$r_\lambda^* = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}.$$

Длина волны λ_m , соответствующая максимуму r_λ^* , определяется из трансцендентного уравнения:

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0, \quad \text{где } x = hc/\lambda_m kT.$$

Корень этого уравнения $x = 4,965$, и λ_m удовлетворяет закону смещения Вина (V.5.2.2°):

$$\lambda_m T = b, \quad \text{где } b = \frac{hc}{4,965k} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

§ V.5.4. Оптическая пирометрия

1°. *Оптической пирометрией* называется совокупность оптических методов измерения высоких температур, основанных на законах теплового излучения. Приборы, применяемые для этого, называются *пирометрами*.

В *радиационных пирометрах* регистрируется интегральное (полное) излучение исследуемого нагретого тела, а в *оптических пирометрах* — излучение тела в каком-либо одном или двух узких участках спектра.

2°. *Потоком излучения* Φ_s называется средняя мощность оптического излучения (IV.4.4.3°) за время, значительно большее периода колебаний электромагнитного поля света.

Энергетической освещенностью E_s поверхности называется поток падающего на эту поверхность излучения, отнесенный к единице ее площади: $E_s = d\Phi_s/dS$, где $d\Phi_s$ — поток излучения, падающего на участок поверхности площадью dS .

Силой излучения I_0 называется поток излучения источника в рассматриваемом направлении, отнесенный к единичному телесному углу: $I_0 = d\Phi_0/d\Omega$, где $d\Phi_0$ — поток излучения в телесный угол $d\Omega$.

3°. Энергетической яркостью B_0 участка dS излучающей поверхности в данном направлении называется отношение силы излучения dI_0 площадки dS в рассматриваемом направлении к площади проекции dS на плоскость, перпендикулярную к этому направлению:

$$B_0 = \frac{dI_0}{dS \cos \varphi},$$

где φ — угол между рассматриваемым направлением излучения и нормалью к площадке dS .

Спектральной плотностью энергетической яркости называется отношение энергетической яркости dB_0 , соответствующей узкому участку оптического спектра, к ширине этого участка:

$$b_\nu = \frac{dB_0}{d\nu} \quad \text{и} \quad b_\lambda = \frac{dB_0}{d\lambda}.$$

4°. Источник оптического излучения называется *подчиняющимся закону Ламберта*, или *косинусным*, если его энергетическая яркость B_0 , а также ее спектральные плотности b_ν и b_λ одинаковы для всех направлений, т. е. не зависят от угла φ . Абсолютно черное тело является косинусным излучателем.

Энергетическая яркость косинусного излучателя и ее спектральные плотности связаны с его энергетической светимостью и ее спектральными плотностями (V.5.1.4°) соотношениями:

$$B_0 = \frac{R_0}{\pi}, \quad b_\nu = \frac{r_\nu}{\pi} \quad \text{и} \quad b_\lambda = \frac{r_\lambda}{\pi}.$$

5°. В оптической пирометрии различают следующие температуры тела: радиационную, яркостную и цветовую.

Радиационной температурой T_p тела называется температура абсолютно черного тела, при которой его энергетическая яркость B_0^* равна энергетической яркости B_0 данного тела. Если исследуемое тело — косинусный излучатель, интегральная степень черноты которого α (V.5.1.7°), то из условия $B_0(T) = B_0^*(T_p)$, где T — истинная температура тела, следует, что

$$\alpha R_0^*(T) = R_0^*(T_p) \quad \text{и} \quad T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\alpha}} \geq T_p.$$

6°. Яркостной температурой T_λ тела называется температура абсолютно черного тела, при которой его спектральная плотность энергетической яркости b_λ^* для какой-либо определенной длины волны λ_0 равна спектральной плотности энергетической яркости b_λ данного тела для той же длины волны: $b_\lambda(\lambda_0, T) = b_\lambda^*(\lambda_0, T_\lambda)$. Обычно $\lambda_0 = 660$ нм (красный свет).

Для косинусного излучателя, поглощательная способность (V.5.1.5°) которого для света с длиной волны λ_0 при температуре тела T равна $\alpha_\lambda(\lambda_0, T)$, из закона Кирхгофа (V.5.1.6°) и формулы Планка (V.5.3.4°) следует, что

$$\alpha_\lambda(\lambda_0, T) \cdot r_\lambda^*(\lambda_0, T) = r_\lambda^*(\lambda_0, T_\lambda).$$

и

$$a_{\lambda}(\lambda_0, T) \left[\exp \left(\frac{a_2}{\lambda_0 T_{\text{я}}} \right) - 1 \right] = \exp \left(\frac{a_2}{\lambda_0 T} \right) - 1,$$

где $a_2 = hc/k$. Так как $a_{\lambda}(\lambda_0, T) \ll 1$, то $T \gg T_{\text{я}}$.

T° . *Цветовой температурой* $T_{\text{ц}}$ тела называется такая температура абсолютно черного тела, при которой относительные распределения спектральной плотности яркости этого тела b_{λ}^* и рассматриваемого тела b_{λ} максимально близки в видимой области спектра, т. е.

$$\frac{b_{\lambda}(\lambda_1, T)}{b_{\lambda}(\lambda_2, T)} = \frac{b_{\lambda}^*(\lambda_1, T_{\text{ц}})}{b_{\lambda}^*(\lambda_2, T_{\text{ц}})}.$$

Для косинусного излучателя

$$\frac{r_{\lambda}(\lambda_1, T)}{r_{\lambda}(\lambda_2, T)} = \frac{r_{\lambda}^*(\lambda_1, T_{\text{ц}})}{r_{\lambda}^*(\lambda_2, T_{\text{ц}})}.$$

Обычно $\lambda_1 = 655$ нм (красный свет) и $\lambda_2 = 470$ нм (зеленый свет). Цветовая температура серого тела (V.5.1.5°) совпадает с его истинной температурой и может быть найдена из закона смещения Вина (V.5.2.2°).

Г л а в а V.6. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

§ V.6.1. Внешний фотоэффект

1° . *Квантовой оптикой* называется раздел оптики, занимающийся изучением явлений, в которых проявляются квантовые свойства света. К таким явлениям относятся: тепловое излучение (V.5.1.1°), фотоэлектрический эффект, эффект Комптона (V.6.3.1°), фотохимические процессы и др.

Фотоэффект в газах состоит в ионизации атомов и молекул газа под действием света и обычно называется *фотоионизацией*.

В конденсированных телах (твердых и жидких) различают внешний и внутренний фотоэффекты.

Внешним фотоэффектом (фотоэлектронной эмиссией) называется испускание электронов веществом под действием света. Электроны, вылетающие из вещества при внешнем фотоэффекте, называются *фотоэлектронами*, а электрический ток, образуемый ими при упорядоченном движении во внешнем электрическом поле, называется *фототоком*.

Внутренним фотоэффектом называется перераспределение электронов по энергетическим состояниям в твердых и жидких полупроводниках и диэлектриках, происходящее под действием света. Он проявляется в изменении концентрации носителей тока в среде (III.7.1.4°) и приводит к возникновению фотопроводимости или вентильного фотоэффекта. *Фотопроводимостью* называется увеличение электрической проводимости вещества под действием света. *Вентильным фотоэффектом (фотоэффектом в вакуирующем слое)* называется возникновение под действием света э. д. с. (*фото-э. д. с.*) в системе, состоящей из контактирующих полупроводника и металла или двух разнородных полупроводников (например, в $p-n$ -переходе (VII.2.11.7°)).

2°. На рис. V.6.1 показана схема установки для изучения внешнего фотоэффекта в металлах. Свет падает через окно D на поверхность катода K , находящегося внутри evacuated трубки и называемого *фотокатодом*. Характер зависимости фототока I в трубке от разности потенциалов U анода A и катода K

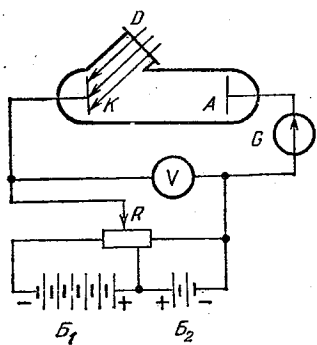


Рис. V.6.1

при постоянной энергетической освещенности E_0 катода (V.5.4.2°) монохроматическим светом изображен на рис. V.6.2.

Существование фототока при отрицательных значениях U от 0 до $-U_0$ свидетельствует

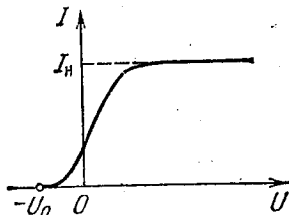


Рис. V.6.2

о том, что фотоэлектроны выходят из катода, имея некоторую начальную скорость и соответственно кинетическую энергию. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов $v_{\text{макс}}$ связана с *задерживающим напряжением (задерживающим потенциалом)* U_0 соотношением:

$$\frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} = eU_0,$$

где e и m — абсолютная величина заряда и масса электрона.

Фототок увеличивается с ростом U лишь до определенного предельного значения I_n , называемого *фототоком насыщения*. При фототоке насыщения все электроны, вылетающие из катода под влиянием света, достигают анода. Если $n_{\text{сек}}$ — число фотоэлектронов, покидающих катод за 1 с, то

$$I_n = en_{\text{сек}}.$$

3°. Законы внешнего фотоэффекта.

1. *Закон Столетова*: при неизменном спектральном составе света, падающего на фотокатод, фототок насыщения пропорционален энергетической освещенности катода (V.5.4.2°):

$$I_n \sim E_0 \text{ и } n_{\text{сек}} \sim E_0.$$

2. Для данного фотокатода максимальная начальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты света и не зависит от его интенсивности.

3. Для каждого фотокатода существует *красная граница внешнего фотоэффекта*, т. е. минимальная частота света ν_0 , при которой еще возможен внешний фотоэффект; частота ν_0 зависит от материала фотокатода и состояния его поверхности.

Второй и третий законы внешнего фотоэффекта не удается истолковать на основе классической электромагнитной теории света. Согласно этой теории вырывание электронов проводимости из металла является результатом их «раскачивания» в электромагнитном поле световой волны, которое должно усиливаться

при увеличении интенсивности света и пропорциональной ей энергетической освещенности фотокатода.

4°. Лишь квантовая теория света позволила успешно объяснить законы внешнего фотоэффекта. Развивая идеи Планка о квантовании энергии атомов — осцилляторов (V.5.3.2), Эйнштейн высказал гипотезу о том, что свет не только излучается, но также распространяется в пространстве и поглощается веществом в виде отдельных дискретных квантов электромагнитного излучения — *фотонов*. Все фотоны монохроматического света частоты ν имеют одинаковую энергию $\omega_\nu = h\nu$, где h — постоянная Планка, и движутся в пространстве со скоростью c света в вакууме. В случае поглощения света веществом каждый поглощенный фотон передает всю свою энергию частице вещества. Например, при внешнем фотоэффекте электрон проводимости металла, поглощая фотон, получает его энергию $h\nu$. Для выхода из металла электрон должен совершить работу выхода A (VII.2.11.1°). Поэтому *уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*, выражающее закон сохранения энергии при фотоэффекте, имеет вид:

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

5°. Из уравнения Эйнштейна непосредственно вытекает второй закон фотоэффекта:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0 = h\nu - A.$$

Таким образом, v_{\max} и U_0 зависят только от частоты света и работы выхода электрона из фотокатода.

Максимальная начальная кинетическая энергия фотоэлектронов зависит от частоты света по линейному закону. Она обращается в нуль при частоте ν_0 , соответствующей красной границе внешнего фотоэффекта:

$$\nu_0 = \frac{A}{h}.$$

Следовательно, красная граница зависит только от работы выхода электрона из металла.

6°. Фотоэффект безинерционен, т. е. испускание фотоэлектронов начинается сразу же, как только на фотокатод падает свет с частотой $\nu \geq \nu_0$. Это свойство внешнего фотоэффекта является еще одним подтверждением квантового характера взаимодействия света с веществом. Согласно классическим волновым представлениям требуется довольно значительное время для того, чтобы электромагнитная волна заданной интенсивности могла передать электрону энергию, достаточную для совершения им работы выхода.

7°. При очень больших интенсивностях света, достижимых с помощью лазеров (VI.2.6.8°), наблюдается *многофотонный*, или *нелинейный*, фотоэффект. При многофотонном фотоэффекте электрон может одновременно получить энергию не одного, а N фотонов. В этом случае уравнение закона сохранения энергии при внешнем фотоэффекте под действием света частоты ν имеет вид:

$$N h \nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Красная граница N -фотонного фотоэффекта $(\nu_0)_N = \frac{A}{Nh}$.

§ V.6.2. Масса и импульс фотона. Давление света

1°. Массу фотона (V.6.1.4°) с энергией $\omega_f = h\nu$, где ν — частота света, а h — постоянная Планка, можно найти из закона взаимосвязи массы и энергии (I.5.7.2°):

$$m_f = \frac{h\nu}{c^2},$$

где c — скорость света в вакууме. Фотон всегда движется со скоростью c , а его масса покоя (I.5.6.1°) равна нулю.

2°. Импульс фотона p_f численно равен:

$$p_f = m_f c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

где λ — длина волны света в вакууме. Так как волновое число $k = 2\pi/\lambda$, то

$$p_f = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k \quad \text{и} \quad p_f = \hbar k,$$

где $\hbar = h/2\pi$, а k — волновой вектор (IV.3.2.7°).

3°. Свет производит давление на отражающие или поглощающие его тела. В квантовой оптике давление света истолковывается как результат передачи этим телам импульса фотонов при отражении и поглощении света. Давление света p на плоскую поверхность тела ab (рис. V.6.3) равно численному значению нормальной составляющей суммарного импульса, передаваемого фотонами телу на единицу площади рассматриваемой поверхности за единицу времени.

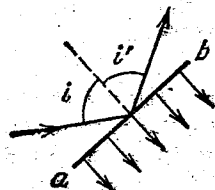


Рис. V.6.3

Пусть монохроматический свет частоты ν падает на поверхность ab под углом i (рис. V.6.3), а $n_{\text{сек}}$ — число фотонов, падающих за 1 с на единицу площади поверхности ab . Если R — коэффициент отражения света (IV.4.5.6°) от рассматриваемой поверхности, то из $n_{\text{сек}}$ фотонов $Rn_{\text{сек}}$ зеркально отражаются, а $(1-R)n_{\text{сек}}$ поглощаются. Отражающиеся фотоны передают телу суммарный импульс, направленный нормально к поверхности ab и численно равный $Rn_{\text{сек}} \frac{2h\nu}{c} \cos i$. Поглощающиеся фотоны передают телу суммарный импульс, нормальная к поверхности ab составляющая которого численно равна $(1-R)n_{\text{сек}} \frac{h\nu}{c} \cos i$. Таким образом, давление света

$$p = Rn_{\text{сек}} \frac{2h\nu}{c} \cos i + (1-R)n_{\text{сек}} \frac{h\nu}{c} \cos i = (1+R)n_{\text{сек}} \frac{h\nu}{c} \cos i.$$

Если n_0 — концентрация фотонов падающего света, то $n_{\text{сек}} = n_0 c \cos i$ и $n_0 h\nu = \langle \omega \rangle$ — среднее значение объемной плотности энергии света. Поэтому

$$p = n_0 h\nu (1+R) \cos^2 i = \langle \omega \rangle (1+R) \cos^2 i.$$

Таким образом, давление света одинаково успешно объясняется как волновой теорией (IV.4.2.6°), так и квантовой.

§ V.6.3. Эффект Комптона

1°. *Эффектом Комптона* называется изменение длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии веществом, содержащим легкие атомы. Длина волны λ' излучения, рассеянного под углом ϑ к направлению распространения первичного монохроматического излучения с длиной волны λ , больше λ на величину $\Delta\lambda$, зависящую только от угла ϑ :

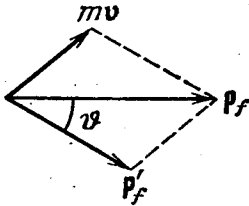


Рис. V.6.4

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Постоянная величина $\lambda_K = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м называется *комptonовской длиной волны электрона*. Эффект Комптона не удается объяснить на основе классической волновой теории света.

2°. Согласно квантовой теории, эффект Комптона является результатом упругого столкновения рентгеновского фотона со свободным или почти свободным электроном (у легких атомов энергия связи электрона с атомом значительно меньше энергии рентгеновского фотона). При этом фотон передает электрону часть своей энергии и часть своего импульса в соответствии с законами сохранения энергии и импульса. Если первоначально электрон покоился, то из закона сохранения энергии следует, что

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2, \quad (a)$$

где $\nu = c/\lambda$ и $\nu' = c/\lambda'$ — частоты падающего и рассеянного излучения, m_0c^2 — энергия покоя электрона (I.5.7.3°), а mc^2 — полная энергия электрона (I.5.7.2°) после столкновения — энергия *электрона отдачи*.

Из закона сохранения импульса следует, что

$$\mathbf{p}_f = m\mathbf{v} + \mathbf{p}_f'$$

или, в соответствии с рис. V.6.4,

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2} \cos \vartheta, \quad (б)$$

где \mathbf{v} — скорость электрона отдачи.

Масса электрона отдачи связана с его скоростью \mathbf{v} соотношением (I.5.6.1°):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (в)$$

Из уравнений (а), (б) и (в) получается:

$$m_0c^2 (\nu - \nu') = 2h\nu\nu' \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

или

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Таким образом, *комptonовская длина волны электрона*

$$\lambda_K = \frac{h}{m_0c}.$$

3°. Кинетическая энергия электрона отдачи (I.5.7.1°)

$$W_K = (m - m_0) c^2 = h(\nu - \nu') = h\nu\nu' \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda)$$

или

$$W_K = h\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = h\nu \frac{2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

где $a = \lambda_K/\lambda$, а $h\nu$ — энергия падающего фотона.

Энергия W_K максимальна при $\theta = \pi$:

$$W_{K \text{ макс}} = \frac{2ah\nu}{1 + 2a}.$$

4°. Если электрон сильно связан с атомом, то при рассеянии на нем фотона последний передает энергию и импульс не электрону, а атому в целом. Масса атома во много раз больше массы электрона. Поэтому атому передается лишь незначительная часть энергии фотона, так что длина волны λ' рассеянного излучения практически не отличается от длины волны λ падающего излучения. Доля электронов, сильно связанных в атомах, увеличивается с ростом порядкового номера элемента и соответственно с ростом массы атомов. Поэтому, чем тяжелее атомы рассеивающего вещества, тем больше относительная интенсивность несмещенной компоненты ($\lambda' = \lambda$) в рассеянном излучении.

5°. В отличие от рассеяния фотонов, осуществляющегося как на свободных, так и на связанных электронах, поглощать фотоны могут только с в я з а н н ы е электроны. Например, при внешнем фотоэффекте фотон поглощается связанным электроном, который расходует часть полученной энергии на совершение работы выхода, являющейся мерой связи электрона в веществе.

Поглощение фотона свободным электроном невозможно, так как этот процесс противоречил бы законам сохранения энергии и импульса. В этом проще всего убедиться на примере поглощения фотона неподвижным свободным электроном. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в таком процессе должны одновременно выполняться следующие два соотношения:

$$(m - m_0) c^2 = h\nu \quad \text{и} \quad mv = \frac{h\nu}{c}, \quad \text{где} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Однако эти соотношения совместны только при $v = 0$.

§ V.6.4. Корпускулярно-волновая двойственность свойств света

1°. Такие явления, как интерференция (IV.3.5.2°) и дифракция света (V.2.2.1°), убедительно свидетельствуют о волновой природе света. В то же время закономерности равновесного теплового излучения (V.5.1.2°), фотоэффекта (V.6.1.1°) и эффекта Комптона (V.6.3.1°) можно успешно истолковать только на основе квантовых представлений о свете, как о потоке дискретных фотонов (V.6.1.4°). Однако волновой и квантовый (корпускулярный) способы описания света не противоречат, а взаимно дополняют друг друга, так как свет одновре-

менно обладает и волновыми и корпускулярными свойствами. Он представляет собой диалектическое единство этих противоположных свойств.

2°. Основные уравнения, связывающие волновые свойства света (частоту ν и длину волны в вакууме λ) и его корпускулярные свойства (энергию фотона ω_f и импульс фотона p_f):

$$\omega_f = h\nu \quad \text{и} \quad p_f = \frac{h}{\lambda}.$$

Волновые свойства света играют определяющую роль в закономерностях его распространения, интерференции, дифракции, поляризации, а корпускулярные — в процессах взаимодействия света с веществом. Чем больше длина волны света, тем меньше импульс и энергия фотона и тем труднее обнаружить квантовые свойства света. Например, внешний фотоэффект происходит только при энергиях фотонов, больших или равных работе выхода электрона из вещества (V.6.1.5°). Чем меньше длина волны электромагнитного излучения, тем больше энергия и импульс фотонов и тем труднее обнаружить волновые свойства этого излучения. Например, рентгеновские лучи дифрагируют только на очень «тонкой» дифракционной решетке — кристаллической решетке твердого тела (V.2.4.3°).

3°. В квантовой оптике используется статистический подход к рассмотрению закономерностей распространения света. Согласно этому подходу, дифракция монохроматического света на каком-либо препятствии (например, на дифракционной решетке) состоит в вызываемом этим препятствием перераспределении фотонов в пространстве. Вероятность попадания фотонов в различные точки экрана, установленного за препятствием, неодинакова, чем и объясняется возникновение на экране дифракционной картины. Энергетическая освещенность E_0 (V.5.4.2°) какого-либо малого участка dS поверхности экрана пропорциональна числу $dn_{\text{сек}}$ фотонов, падающих на эту поверхность за 1 с. Следовательно, E_0 пропорциональна вероятности попадания фотонов на единицу площади поверхности экрана в рассматриваемой точке. С другой стороны, согласно волновым представлениям, E_0 пропорциональна квадрату амплитуды A света в той же точке экрана. Таким образом, квадрат амплитуды световой волны в какой-либо точке пространства является мерой вероятности попадания фотонов в эту точку.

4°. Опыты по дифракции света показывают, что при изменении интенсивности падающего на препятствие светового потока вид дифракционной картины, т. е. соотношение между освещенностями в различных точках экрана, не изменяется. Это свидетельствует о том, что волновые свойства присущи не только совокупности большого числа одновременно летящих фотонов, но также каждому отдельному фотону. При прохождении фотона через оптическую систему нельзя указать, в какую именно точку экрана он попадет. Можно говорить лишь о вероятности dW попадания фотона на какой-либо малый участок dS поверхности экрана,

ФИЗИКА АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

Глава VI.1. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ VI.1.1. Корпускулярно-волновая двойственность свойств частиц вещества

1°. Физика атомов, молекул и их коллективов, в частности кристаллов, а также атомных ядер и элементарных частиц изучается в *квантовой механике* *). Объекты микромира, изучаемые квантовой механикой, имеют линейные размеры порядка $10^{-6} \div 10^{-13}$ см. Если частицы движутся со скоростями $v \ll c$, где c — скорость света в вакууме, то применяется нерелятивистская квантовая механика; при $v \lesssim c$ — релятивистская квантовая механика **).

2°. В основе квантовой механики лежат представления Планка о дискретном характере изменения энергии атомов (V.5.3.2°), Эйнштейна о фотонах (V.6.1.4°), данные о квантованности некоторых физических величин (например, импульса и энергии), характеризующих в определенных условиях состояния частиц микромира.

3°. Основополагающей в квантовой механике явилась идея о том, что корпускулярно-волновая двойственность свойств, установленная для света (V.6.4.1°), имеет универсальный характер. Она должна проявляться для любых частиц, обладающих импульсом p . Все частицы, имеющие конечный импульс p , обладают волновыми свойствами, и их движение сопровождается некоторым волновым процессом.

4°. Формула де Бройля устанавливает зависимость длины волны, связанной с движущейся частицей вещества, от импульса p частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

где m — масса частицы, v — ее скорость, h — постоянная Планка (I.X). Волны, о которых идет речь, называются *волнами де Бройля*.

Другой вид формулы де Бройля:

$$p = \frac{h}{\lambda} k = \hbar k,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda} p$ — волновой вектор, модуль которого $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число — есть число длин волн, укладывающихся на 2π единицах длины, p — единичный вектор в направлении распространения волны, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

*) В период ее создания она называлась также *волновой механикой*.

***) Сведения о релятивистской квантовой механике выходят за рамки данного справочника. Везде под термином квантовая механика понимается нерелятивистская квантовая механика.

5°. Длина волны де Бройля для частицы с массой m , имеющей кинетическую энергию W_k (I.3.2.1°),

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}}.$$

В частности, для электрона, ускоряющегося в электрическом поле с разностью потенциалов $\Delta\phi$ вольт (III.3.2.7°),

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{\Delta\phi}} \text{ \AA}.$$

6°. Формула де Бройля экспериментально подтверждается опытами по рассеянию электронов и других частиц на кристаллах и по прохождению частиц сквозь вещества. Признаком волнового процесса во всех таких опытах является дифракционная картина распределения электронов (или других частиц) в приемниках частиц.

Волновые свойства не проявляются у макроскопических тел. Длины волн де Бройля для таких тел настолько малы, что обнаружение волновых свойств оказывается невозможным.

7°. Фазовая скорость волн де Бройля (IV.3.2.10°)

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{h} m\lambda,$$

где m — масса частицы, v — ее скорость, λ — длина дебройлевской волны. Так как $c > v$, то фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме. Зависимость фазовой скорости дебройлевских волн от длины волны указывает на то, что эти волны испытывают дисперсию (IV.3.3.8°). Групповая скорость волн де Бройля (IV.3.4.3°) равна скорости частицы v :

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v.$$

В таблице VI.1.1 сопоставлены корпускулярные и волновые свойства частиц с массой m , движущихся со скоростью v .

Таблица VI.1.1

Корпускулярные свойства	Волновые свойства
Скорость v	Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$
Импульс $p = mv$	Частота волны де Бройля $\nu = \frac{W}{h}$
Энергия свободной частицы $W = \frac{p^2}{2m}$	Групповая скорость волн де Бройля $u = v$ Фазовая скорость волн де Бройля $v_{\text{фаз}} = \frac{c^2}{v}$

8°. Помимо формулы де Бройля в квантовой механике принимается, что между энергией частицы W и частотой ν волны де Бройля существует связь:

$$W = h\nu = \hbar\omega,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота (IV.1.1.2°), $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (п. 4°).

9°. Волны де Бройля имеют специфическую природу, не имеющую аналогии среди волн, изучаемых в классической физике: квадрат модуля амплитуды волны де Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица обнаруживается в этой точке (*вероятностный, статистический смысл волн де Бройля*). Дифракционные картины, которые наблюдаются в опытах, указанных в п. 6°, являются проявлением статистической закономерности, согласно которой частицы попадают в определенные места в приемниках — туда, где интенсивность волны де Бройля (IV.3.3.6°) оказывается наибольшей. Частицы не обнаруживаются в тех местах, где, согласно статистической интерпретации, квадрат модуля амплитуды «волны вероятности» обращается в нуль.

§ VI.1.2. Уравнение Шредингера

1°. Положение частицы в пространстве в данный момент времени определяется в квантовой механике заданием *волновой функции (пси-функции)* $\psi(x, y, z, t)$. Вероятность dw того, что частица находится в элементе объема dV , пропорциональна $|\psi|^2$ и элементу объема dV :

$$dw = |\psi|^2 dV,$$

где $|\psi|^2$ — квадрат модуля ψ -функции: $|\psi|^2 = \psi\psi^*$. Здесь ψ^* — функция, комплексно сопряженная с ψ . Величина $|\psi|^2$ есть *плотность вероятности*

$|\psi|^2 = \frac{dw}{dV} = \rho$ и задает вероятность пребывания частицы в данной точке пространства. Интенсивность волны де Бройля определяется величиной $|\psi|^2$.

2°. Из определения ψ -функции следует *условие нормировки вероятностей*:

$$\int |\psi|^2 dV = 1,$$

где тройной интеграл по объему вычисляется по координатам, x , y и z от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. по всему бесконечному пространству. Условие нормировки указывает на то, что, пребывание частицы где-либо в пространстве есть достоверное событие и его вероятность должна быть равна единице.

3°. Волновая функция $\psi(x, y, z, t)$ является основной характеристикой состояния микрообъектов (атомов, молекул, элементарных частиц). С ее помощью вычисляется среднее значение физической величины L , характеризующей объект, находящийся в состоянии, описываемом волновой функцией ψ ,

$$\langle L \rangle = \iiint L |\psi|^2 dx dy dz,$$

где $\langle L \rangle$ — среднее значение величины L , а интегрирование проводится так же, как указано в п. 2°.

4°. *Временным уравнением Шредингера* называется основное дифференциальное уравнение квантовой механики *) относительно волновой функции $\psi(x, y, z, t)$. Оно определяет ψ -функцию для микрочастиц, движущихся в силовом поле с потенциальной энергией $U(x, y, z, t)$ (I.3.3.1°) со скоростью $v \ll c$, где c — скорость света в вакууме. Уравнение Шредингера имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi,$$

где Δ — оператор Лапласа, m — масса частицы, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h — постоянная Планка, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Уравнение Шредингера дополняется условиями, которые накладываются на ψ -функцию:

а) функция ψ должна быть конечной, однозначной и непрерывной;

б) производные $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ должны быть непрерывны;

в) функция $|\psi|^2$ должна быть интегрируема, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV$

должен быть конечным. Это условие в простейших случаях сводится к условию нормировки вероятностей (п. 2°).

5°. В случае, когда ψ -функция не зависит от времени $\psi = \psi(x, y, z)$, она удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi = 0,$$

где W — энергия частицы. Остальные обозначения см. в п. 4°. Функции ψ , удовлетворяющие уравнению Шредингера при заданном виде $U = U(x, y, z)$, называются *собственными функциями*. Они существуют лишь при определенных значениях W , называемых *собственными значениями энергии*. Совокупность собственных значений W образует *энергетический спектр частицы*. Если U — монотонная функция и $U \rightarrow 0$ на бесконечности, то в области $W < 0$ собственные значения энергии образуют *дискретный спектр*. Отыскание собственных значений и собственных функций составляет важнейшую задачу квантовой механики.

6°. Временное уравнение Шредингера имеет решение:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp\left(-i \frac{W}{\hbar} t\right).$$

Состояние частицы в данный момент времени описывается периодической функцией времени с циклической частотой $\omega = \frac{W}{\hbar}$, определяемой энергией W частицы.

Это соответствует связи энергии частицы W с частотой волны де Бройля (VI.1.1.8°).

Если частица находится в определенном энергетическом состоянии с энергией $W = \text{const}$, то вероятность $d\omega$ обнаружить ее в элементе объема dV не зависит от времени:

$$d\omega = |\psi|^2 dV = \psi \psi^* dV.$$

*) См. примечание **) к пункту VI.1.1.1°.

Такое состояние частицы называется *стационарным состоянием*. Атом, находящийся в стационарном состоянии, имеет постоянную энергию и не излучает электромагнитных волн (VI.2.1.7°).

§ VI.1.3. Движение свободной частицы

1°. При свободном движении частицы ($U=0$) ее энергия W совпадает с кинетической энергией. Если ось Ox направлена вдоль вектора v скорости частицы ($v=\text{const}$), то стационарное уравнение Шредингера (VI.1.2.5°) имеет следующее решение:

$$\psi = A \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mW} x\right] + B \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mW} x\right),$$

где m — масса частицы, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h — постоянная Планка, A и B — некоторые постоянные. Временное уравнение Шредингера (VI.1.2.4°) в этом случае имеет решение

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp\left[-i\left(\frac{W}{\hbar} t - \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar} x\right)\right] + B \exp\left[-i\left(\frac{W}{\hbar} t + \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar} x\right)\right],$$

которое представляет собой суперпозицию двух плоских монохроматических волн (IV.4.1.6°) равной частоты $\omega = \frac{W}{\hbar}$, распространяющихся одна в положительном направлении оси Ox с амплитудой A , другая — в противоположном направлении с амплитудой B .

2°. Свободная частица в квантовой механике описывается плоской монохроматической волной де Бройля с волновым числом k (VI.1.1.4°):

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW}.$$

Вероятность обнаружить частицу в любой точке пространства постоянна. Для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox ,

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = |A|^2.$$

§ VI.1.4. Частица в одномерной потенциальной яме бесконечной глубины

1°. *Потенциальной ямой* называется область пространства, в которой потенциальная энергия U частицы меньше некоторого значения $U_{\text{макс}}$. В частности, при $U=U(x)$ и $U_{\text{макс}}=\infty$ имеется одномерная потенциальная яма бесконечной глубины. Если потенциальная энергия частицы вне и внутри потенциальной ямы имеет следующие значения (рис. VI.1.1):

$$\begin{aligned} U &= 0 & \text{при } 0 \leq x \leq L \\ U &= \infty & \text{при } x < 0 \text{ и } x \geq L, \end{aligned}$$

то яма имеет «плоское дно».

Движение коллективизированных электронов в металле рассматривается в классической электронной теории как движение в потенциальной яме, причем

вне металла потенциальная энергия электрона равна нулю, а внутри металла она отрицательна и численно равна работе выхода электрона из металла (VII.2.11.1°). Потенциальная яма, изображенная на рис. VI.1.1, более проста, чем реальная потенциальная яма электронов в металле.

2°. Стационарное уравнение Шредингера (VI.1.2.5°) для частицы в потенциальной яме, рассмотренной в п. 1°, имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W\psi = 0$$

при краевых условиях $\psi(0) = \psi(L) = 0$, означающих, что $\psi = 0$ и $|\psi|^2 = 0$ вне области $0 \leq x \leq L$, т. е. что вероятность найти частицу вне потенциальной ямы равна нулю.

Решение уравнения Шредингера:

$$\psi(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

где A и B — постоянные, $k = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}$ — волновое число (VI.1.1.4°). Из краевых условий следует, что $A = 0$; $B \neq 0$ и $\sin kL = 0$, т. е. волновое число принимает ряд дискретных значений, соответствующих требованию: $k_n L = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Последнее уравнение означает, что:

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}, \text{ или } \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

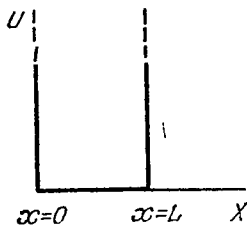


Рис. VI.1.1

На длине потенциальной ямы должно укладываться целое число полуволин де Бройля.

3°. Физические величины, которые могут принимать лишь определенные дискретные значения, называются *квантованными* (квантование физических величин).

Собственные значения энергии W_n частицы в одномерной потенциальной яме бесконечной глубины

$$W_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

представляют собой дискретный ряд значений энергии, которая является квантованной (см. также VI.1.2.5°).

Квантованные значения W_n называются *уровнями энергии*, а числа n , определяющие энергетические уровни частицы в потенциальной яме, называются *квантовыми числами*.

4°. При больших квантовых числах ($n \gg 1$) происходит относительное сближение энергетических уровней частицы в потенциальной яме: отношение $\frac{\Delta W}{W_n} \approx$

$$\approx \frac{2}{n} \ll 1, \text{ где } \Delta W = W_{n+1} - W_n = (2n+1) \frac{n^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Неравенство $\Delta W \ll W_n$ при $n \gg 1$ означает, что квантование энергии при больших квантовых числах дает результаты близкие к результатам, которые получаются в классической физике — энергетические уровни становятся *квазинепрерывными* (квазинепрерывность энергетических уровней при $n \gg 1$).

Принцип соответствия Бора: выводы и результаты квантовой механики при больших квантовых числах должны соответствовать классическим результатам.

Более общая формулировка принципа соответствия: между любой физической теорией, которая является развитием классической, и первоначальной классической существует закономерная связь — в определенных предельных случаях новая теория должна переходить в старую. Например, формулы кинематики и динамики специальной теории относительности переходят в формулы механики Ньютона при таких скоростях, когда $(v/c)^2 \ll 1$ (1.5.3.4°). Геометрическая оптика является предельным случаем волновой оптики, если можно пренебречь величиной длины волны ($\lambda \rightarrow 0$).

§ VI.1.5. Линейный гармонический осциллятор

1°. **Линейным (одномерным) гармоническим осциллятором** называется частица с массой m , которая колеблется с собственной циклической частотой ω_0 (IV.1.1.2°) вдоль некоторой оси OX под действием квазиупругой силы F , пропорциональной отклонению x частицы от положения равновесия: $F = -kx$. Здесь k — коэффициент квазиупругой силы, связанный с m и ω_0 соотношением: $k = m\omega_0^2$ (IV.1.2.3°). Потенциальная энергия гармонического осциллятора (IV.1.2.3°)

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

2°. Амплитуда (IV.1.1.3°) малых колебаний гармонического осциллятора в классической физике определяется запасом его энергии W (рис. VI.1.2).

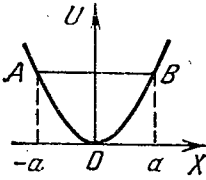


Рис. VI.1.2

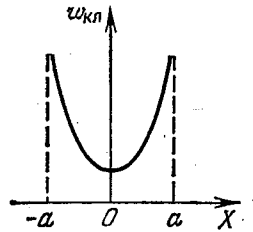


Рис. VI.1.3

В точках B и A с координатами $\pm a$ энергия W равна потенциальной энергии: $W = \begin{cases} U(a) \\ U(-a) \end{cases}$, где a — амплитуда колебаний классического гармонического осциллятора. За пределы области $(-a, +a)$ такой осциллятор выйти не может.

3°. Вероятность $w_{кл}(x) dx$ обнаружить осциллятор на отрезке от x до $x+dx$ по классической механике:

$$w_{кл}(x) dx = \frac{1}{\pi a} \frac{dx}{(1-x^2/a^2)^{1/2}}$$

изображается кривой рисунка VI.1.3.

4°. В квантовой механике колебания линейного гармонического осциллятора изучаются с помощью стационарного уравнения Шредингера (VI.1.2.5°):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(W - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям (VI.1.1.4°), — собственные (волновые) функции линейного гармонического осциллятора:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad \xi = \frac{x}{x_0},$$

где $x_0 = \sqrt{\hbar/2\pi m \omega_0}$, $H_n(\xi)$ — полином Чебышева — Эрмита n -го порядка:

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}.$$

Собственные функции для $n=0, 1, 2$:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2x_0^2}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0 \sqrt{\pi}}} \frac{2x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2};$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0 \sqrt{\pi}}} \left(4 \frac{x^2}{x_0^2} - 2 \right) e^{-x^2/2x_0^2}.$$

Узлом волновой функции называется ее значение, равное нулю. Число узлов функции ψ_n равно квантовому числу n (VI.1.4.3°).

5°. Собственные значения энергии W_n линейного гармонического осциллятора:

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu_0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, ω_0 — собственная циклическая частота (п. 1°), представляют собой совокупность равноотстоящих друг от друга энергетических уровней, изображенных на рис. VI.1.4. При $n > 1$ ($n + \frac{1}{2} \approx n$) энергетические уровни осциллятора совпадают с величинами квантованной энергии осциллятора $W'_n = n\hbar\omega_0$,

которые постулировал Планк в теории излучения абсолютно черного тела (V.5.1.5°).

6°. Наименьшая энергия, которую может иметь линейный гармонический осциллятор, называется *нулевой энергией* W_0 :

$$W_0 = \frac{\hbar \nu_0}{2} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \quad (\text{при } n=0).$$

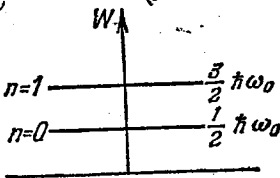


Рис. VI.1.4

В классической физике и в теории Планка считалось, что $W_0=0$ (при $n=0$). Это означает, что осциллятор не колеблется и находится в положении равновесия.

Атомы — осцилляторы при температуре абсолютного нуля ($T=0$) не должны, согласно классической физике, совершать колебания. В современной квантовой механике доказано, что нулевая энергия гармонического осциллятора не может быть от него отнята при любом охлаждении, вплоть до абсолютного нуля (II.4.8.4°). Нулевой энергии осциллятора соответствуют его *нулевые колебания*. В квантовой механике нулевая энергия является характерным признаком любой системы частиц. При температурах, близких к абсолютному нулю, вещества находятся в конденсированном состоянии и его атомы (молекулы или ионы) рассматриваются как

колеблющиеся осцилляторы. Нулевая энергия является наименьшей энергией, которой должен обладать квантовый осциллятор в наименьшем энергетическом состоянии (при $n=0$) для того, чтобы выполнялось соотношение неопределенностей (VI.1.6.2°).

7°. Вероятность обнаружить квантовый линейный гармонический осциллятор на оси OX в области от x до $x+dx$:

$$\omega_{кв}(x) dx = |\Psi_n(x)|^2 dx.$$

На рис. VI.1.5 сопоставлены квантовая

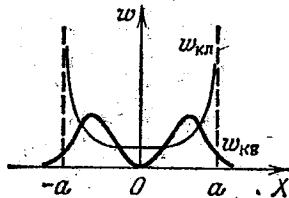


Рис. VI.1.5

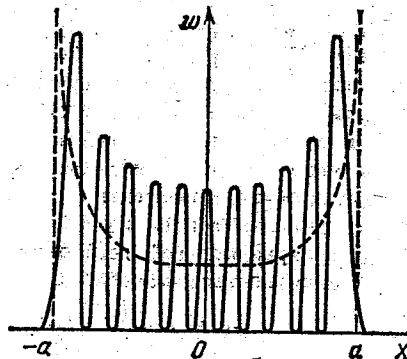


Рис. VI.1.6

плотность вероятности при $n=1$ с классической плотностью вероятности $w_{кл}(x)$. Существование отличных от нуля значений $w_{кв}(x)$ за пределами классически допустимой области $|x| \geq a$ объясняется возможностью просачивания частиц, обладающих волновыми свойствами, сквозь потенциальный барьер (VI.1.7.2°).

8°. С увеличением числа n кривая распределения вероятностей $|\Psi_n|^2$, изображенная на рис. VI.1.6 для $n=10$, все более сближается с классической кривой вероятности (рис. VI.1.3), что согласуется с принципом соответствия Бора (VI.1.4.4°).

9°. Используя собственные значения энергии линейного гармонического осциллятора, можно подсчитать среднюю энергию $\langle W \rangle$ такого осциллятора:

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \langle W_1 \rangle.$$

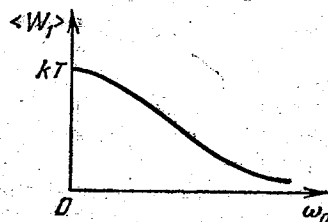


Рис. VI.1.7

С точностью до нулевой энергии $\langle W \rangle$ выражается членом $\langle W_1 \rangle$, который был получен Планком при создании им теории теплового излучения абсолютно черного тела. Графически этот член представлен на рис. VI.1.7 при $T = \text{const}$ как функция частоты. Видно, что наибольший вклад в $\langle W_1 \rangle$ вносят колебания с малыми частотами, соответствующими большим длинам волн.

При высокой температуре ($kT \gg \hbar\omega_0$)

$$\langle W_1 \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{1 + \hbar\omega_0/kT} = kT.$$

Результат совпадает с тем, который получается из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.5°).

§ VI.1.6. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

1°. Волновые свойства микрочастиц (VI.1.1.4°) вносят ограничения в возможность применять к таким частицам понятия координаты и импульса в их классическом смысле.

В классической физике также существуют ограничения в применении некоторых понятий к определенным объектам. Так, понятие температуры не имеет смысла применять для одной молекулы, понятие о точечной локализации (пробывание в одной точке) неприменимо к определению положения в пространстве волны и т. д. Однако, в классической механике определенному значению координаты частицы соответствуют точные значения ее скорости и импульса. В квантовой механике существуют ограничения в возможности одновременного точного определения координаты частицы и величины ее импульса. Эти ограничения связаны с корпускулярно-волновой двойственностью свойств микрочастиц (VI.1.1.3°).

2°. Соотношениями неопределенностей Гейзенберга называются неравенства:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Здесь Δx , Δy и Δz означают интервалы координат, в которых может быть локализована частица, описываемая волной де Бройля (VI.1.1.2°), если проекции ее импульса по осям координат заключены в интервалах Δp_x , Δp_y и Δp_z соответственно. Соотношения Гейзенберга показывают, что координаты частицы x , y , z и проекции p_x , p_y и p_z ее импульса на соответствующие оси не могут одновременно иметь значения в точности равные x и p_x , y и p_y , z и p_z . Эти физические величины могут иметь значения, заданные с точностью, определяемой соотношениями Гейзенберга. Чем более точно определено положение проекций ее импульса (т. е. тем больше Δp_x , Δp_y и Δp_z). Если положение частицы на оси Ox определено точно и $\Delta x=0$, то $\Delta p_x=\infty$ и значение проекции импульса p_x становится совершенно неопределенным.

3°. Соотношения неопределенностей накладывают в квантовой механике определенные ограничения на возможности описания движения частицы по некоторой траектории.

В классической теории в каждой точке траектории частица имеет определенные координаты x , y , z и определенный импульс p с проекциями по осям p_x , p_y и p_z . В квантовой механике это реализуется только в тех случаях, когда частица движется в макроскопической области пространства (например, оставляет след на фотопластинке или экране осциллографа). Если, например, положение электрона зафиксировано с точностью, определяемой линейными размерами зерна фотоэмульсии, испытавшего воздействие электрона, то $\Delta x \sim 10^{-6}$ м. Этому соответствует неопределенность импульса $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \sim 10^{-28} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ и скорости $\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \sim \sim 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Эта неопределенность при скоростях электронов порядка $(10^6 \div 10^7) \frac{\text{м}}{\text{с}}$ позволяет считать, что электрон движется по определенной траектории с точно заданной в каждой точке скоростью.

4°. Если частица движется в микроскопической области пространства, то соотношения неопределенностей существенно сказываются на характере движе-

ния частицы. Например, положение электрона, движущегося в атоме, может быть определено с точностью до размеров атома, т. е. $\Delta x \sim 10^{-10}$ м. Неопределенность скорости Δv_x оказывается при этом такого же порядка, что и сама скорость: $\Delta v_x \approx \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx v$. Траектория электрона в атоме с точно заданной в каждой точке скоростью не имеет классического смысла (I.1.2.3°). Это вовсе не означает, что соотношения неопределенностей свидетельствуют о принципиальной ограниченности наших знаний о микромире. Эти соотношения лишь отражают ограниченную применимость понятий классической физики в области микромира.

5°. Соотношения неопределенностей не вносят ограничений в возможность использовать в классическом смысле понятия координаты и импульса для макроскопических тел. Волновые свойства у таких тел не проявляются (VI.1.1.6°) и поэтому к макроскопическим телам соотношения неопределенностей не применяются.

6°. Соотношение неопределенностей для энергии W и времени t :

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔW — неопределенность энергии частицы, которая находится в течение времени Δt в состоянии с энергией W . Энергия частицы в данном состоянии может быть определена тем точнее, чем дольше частица находится в этом состоянии.

7°. *Измерением* называется процесс взаимодействия прибора с изучаемым объектом, результатом которого является получение некоторой информации о свойствах объекта. Этот процесс протекает в пространстве и времени и является объективным процессом. Взаимодействия прибора с микрообъектами и макрообъектами существенно отличны друг от друга. В последнем случае процесс измерения описывается с той или иной степенью точности законами классической физики и прибор не оказывает на измеряемый объект такого влияния, которое не могло бы быть точно учтено в терминах или понятиях классической физики, либо сделано как угодно малым. В квантовой механике в связи с объективно существующей двойственностью свойств микрообъектов (VI.1.1.3°) процесс измерения непременно связан с существенным влиянием прибора на протекание исследуемого явления. Например, для определения положения электрона его необходимо «осветить» светом возможно более высокой частоты. В результате соударения фотона с электроном импульс электрона p_x будет изменен на величину, определяемую соотношением неопределенностей: $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$ (п. 2°). Воздействие на объект в процессе измерения нельзя считать малым или несущественным — состояние объекта изменяется. Изменение это таково, что в результате измерения определенные классические характеристики частицы, например, ее импульс, оказываются заданными лишь в рамках, ограниченных соотношениями неопределенностей.

§ VI.1.7. Туннельный эффект

1°. Потенциальные ямы, в которых находятся частицы, могут иметь гораздо более сложную форму, чем рассмотренная в VI.1.4. Если потенциальная энергия частицы имеет вид $U = U(r)$, изображенный на рис. VI.1.8, то частицы движутся в поле сил, которое можно представить в виде *потенциального барьера*. Это озна-

чает, что силы действуют на частицу в некоторой ограниченной области пространства. Вне этой области частицы движутся как свободные. Высота H барьера и его ширина a для данной частицы зависят от ее энергии W . По классической механике для выхода частицы из потенциальной ямы или проникновения в нее извне, частице необходимо сообщить энергию, равную или большую чем $[U_{\max} - W] = H$.

2°. Туннельным эффектом называется прохождение («просачивание») частиц сквозь потенциальные барьеры. Туннельный эффект является квантовомеханическим эффектом, связанным с тем, что частицы обладают волновыми свойствами (VI.1.1.3°).

Прозрачностью (коэффициентом проворачиваемости) D потенциального барьера называется величина

$$D = \frac{I_{\text{прох}}}{I_{\text{пад}}},$$

где $I_{\text{прох}}$ — интенсивность (IV.3.3.6°) волны де Бройля, прошедшей сквозь потенциальный барьер, $I_{\text{пад}}$ — интенсивность волны, падающей на барьер.

Для прямоугольного потенциального барьера с высотой U_0 и шириной L (рис. VI.1.9) прозрачность барьера выражается формулой:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m [U_0 - W] L}\right).$$

Здесь m — масса частицы, W — ее энергия.

Для потенциального барьера сложной формы

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m [U(x) - W]} dx\right),$$

где x_1 и x_2 — координаты начала и конца потенциального барьера $U(x)$ для данного значения энергии W (рис. VI.1.10). В этих формулах D_0 — постоянный коэффициент, близкий к единице.

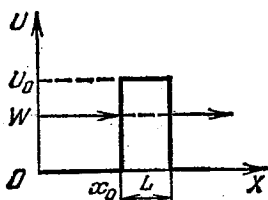


Рис. VI.1.9

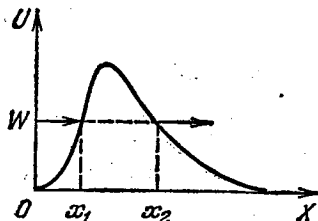


Рис. VI.1.10

3°. Туннельный эффект играет заметную роль, когда прозрачность барьера не слишком мала. Это осуществляется в тех случаях, когда линейные размеры потенциального барьера соизмеримы с атомными размерами. Например, при $U_0 - W = 10$ эВ для электрона ($m \approx 10^{-30}$ кг) при $L = 10^{-10}$ м имеем $D \approx 0,04$.

При $L=10^{-9}$ м и остальных тех же условиях $D \approx 8 \cdot 10^{-15}$. Прозрачность барьера уменьшается с увеличением массы частицы и разности $U_0 - W$.

4°. *Парадокс туннельного эффекта* заключается в том, что прохождение частицы сквозь потенциальный барьер позволяет обнаружить ее в области запрещенной с классической точки зрения, где потенциальная энергия частицы превышает ее энергию. В этой области кинетическая энергия частицы отрицательна и, следовательно, скорость (импульс) частицы становится мнимой величиной.

В действительности парадокса не существует. Туннельный эффект является чисто квантовым явлением, и здесь возникает неожиданная с классической точки зрения трудность представления энергии частицы W в виде суммы кинетической и потенциальной энергии: $W = \frac{p^2}{2m} + U(x)$. В связи с тем, что соотношение неопределенностей (VI.1.6.2°) исключает возможность одновременно приписать частице с любой степенью точности определенные значения координаты x и импульса p , в квантовой механике оказывается неправомерным представление энергии частицы в виде суммы точно определенных частей — кинетической $\frac{p^2}{2m}$ и потенциальной

$U(x)$ энергий. Если координата частицы x зафиксирована в области Δx и определена с достаточной точностью ее потенциальная энергия $U(x)$, то внесенная при этом неопределенность Δp в значение импульса частицы ($\Delta p \approx \hbar / \Delta x$) не позволяет говорить о точном значении кинетической энергии $p^2/2m$ частицы. При этом оказывается, что изменение кинетической энергии ΔW_k , вызванное фиксированием ее координаты, превышает разность между высотой барьера U_0 (рис. VI.1.9) и энергией W частицы:

$$\Delta W_k > U_0 - W.$$

ΔW_k превышает ту энергию, которой недостает частице, находящейся внутри потенциальной ямы для того, чтобы она могла «классическим способом» над барьером, выйти из потенциальной ямы.

О роли туннельного эффекта в физике твердого тела и явлении радиоактивного распада см. VII.2.8.3° и VIII.1.5.2°.

Г л а в а VI.2. СТРОЕНИЕ АТОМОВ, МОЛЕКУЛ И ИХ ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

§ VI.2.1. Атом водорода и водородоподобные ионы

1°. *Атомом* называется наименьшая часть вещества, обладающая всеми химическими свойствами данного химического элемента. В состав атома входят положительно заряженное ядро и электроны, движущиеся в электрическом поле ядра. Заряд ядра Ze (VIII.1.1.2°) по абсолютной величине равен суммарному заряду всех электронов атома. *Ионом* называется электрически заряженная частица, которая образуется при потере или приобретении электронов атомом или молекулой.

2°. Простейшим атомом является атом водорода, состоящий из одного протона в ядре и одного электрона, движущегося в кулоновском электрическом поле ядра. *Водородоподобными ионами (изоэлектронными водороду)* являются ионы He^+ , Li^{++} , Be^{+++} и т. д., имеющие ядро с зарядом Ze и один электрон.

3°. Среди оптических свойств атома важнейшим является его спектр излучения. Частоты линий ν в дискретном линейчатом спектре атома водорода описываются формулой Бальмера — Ридберга:

$$\nu = cR' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2} \right),$$

где

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь c — скорость света в вакууме, m — масса электрона, e — заряд электрона, h — постоянная Планка, ϵ_0 — электрическая постоянная (IX).

Величины R и $R' = R/c$ называются *постоянной Ридберга*, соответственно, в с^{-1} и см^{-1} или м^{-1} : $R = 3,2931193 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$; $R' = 1,0973731 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

Целые числа n и n_1 называются *главными квантовыми числами*, причем $n_1 = n+1, n+2$ и т. д. Группа линий с одинаковым n называется *серией*. Серии линий водородного спектра: $n=1$ — *серия Лаймана*, $n=2$ — *серия Бальмера*, $n=3$ — *серия Пашена*, $n=4$ — *серия Брэкета*, $n=5$ — *серия Пфунда*, $n=6$ — *серия Хемфри*.

Для водородоподобных ионов (n, n_1) формула Бальмера — Ридберга:

$$\nu = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2} \right),$$

где Z — порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева (VI.2.3.5°).

4°. Каждому значению квантового числа n в формуле Бальмера — Ридберга соответствует *граница серии* с наибольшей частотой (при $n_1 = \infty$), называемой *термом* T_n :

$$T_n = \frac{R}{n^2} \quad (\text{для водорода}), \quad T_n = \frac{Z^2 R}{n^2} \quad (\text{для водородоподобного иона}).$$

5°. Энергия водородоподобного иона в состоянии с главным квантовым числом n :

$$W_n = -\frac{Z^2 R h}{n^2}; \quad T_n = \frac{|W_n|}{h}.$$

Энергией связи электрона в атоме называется абсолютная величина W_n . Наименьшее значение W_1 (при $n=1$) соответствует *основному*, или *нормальному состоянию атома* ($n, 9^\circ$). Все значения энергии при $n > 1$ характеризуют *возбужденные состояния атома*. Важнейшим отличием возбужденных состояний является конечное время τ жизни электрона в этих состояниях: $\tau \approx 10^{-8}$ с. В нормальном состоянии атома, изолированного от внешних воздействий, τ неограничено. Наибольшее значение $W_{\text{макс}} = 0$ при $n \rightarrow \infty$ соответствует *ионизации атома или иона*, т. е. отрыву от него электрона. Энергия ионизации равна энергии связи электрона в атоме (или ионе).

Потенциал ионизации (III.9.4.3°) атома водорода или водородоподобного иона в состоянии с главным числом n равен $\varphi = \frac{Z^2 R h}{en^2}$, где e — абсолютная вели-

Здесь m — масса электрона, v — его скорость, r — радиус k -й орбиты, $\hbar = h/2\pi$. Целое число k равно числу длин волн де Бройля для электрона (VI.1.1.4°), укладывающихся на длине круговой орбиты: $\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi m v r}{h} = k$.

Квантование момента импульса в квантовой механике см. п. 8°.

Третий постулат Бора (правило частот): при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон. Излучение фотона происходит при переходе атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией. При обратном переходе происходит поглощение фотона. Энергия $h\nu$ фотона равна разности энергий в двух состояниях атома:

$$W_n - W_m = h\nu.$$

При $W_n > W_m$ происходит излучение фотона, при $W_n < W_m$ — его поглощение.

В квантовой механике правило частот Бора вытекает из теории квантовых переходов атома из одного энергетического состояния в другое. Сведения об этой теории выходят за рамки данного справочника.

7°. Стационарное уравнение Шредингера (VI.1.2.5°) для движения электрона в кулоновском поле ядра с зарядом Ze (VIII.1.1.2°) имеет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi = 0,$$

где $U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ — потенциальная энергия электрона, находящегося на расстоянии r от ядра, e_0 — электрическая постоянная (III.1.2.2°), W — энергия электрона в атоме, которую необходимо отыскать в предположении, что волновые функции ψ удовлетворяют условиям, указанным в (VI.1.2.4°).

8°. Решение стационарного уравнения Шредингера для электрона в центрально-симметричном кулоновском поле ядра приводит к следующим результатам:

а) Момент импульса электрона в атоме квантуется по формуле:

$$L_l = \sqrt{l(l+1)}\hbar,$$

где *орбитальное квантовое число* l , определяющее момент импульса, изменяется в пределах: $l=0, 1, \dots, (n-1)$, n — *главное квантовое число* (п. 3°).

б) При $W < 0$, когда электрон «связан» в атоме, его движения являются периодическими, а значения энергии W квантованы. Собственные значения W_n (VI.1.2.5°) определяются по формуле:

$$W_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2 R h}{n^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_n = -\frac{2\pi^2 Z^2 m e^4}{h^2 n^2} = -\frac{Z^2 R h}{n^2} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь R — постоянная Ридберга (п. 4°), n — *главное квантовое число* (п. 4°). Решение уравнения Шредингера для электрона в водородоподобном ионе приводит к энергетическим уровням типа Бальмера — Ридберга (п. 4°).

9°. В зависимости от значений орбитального квантового числа приняты следующие обозначения состояний электрона в атомах:

s -состояние при $l=0$, p -состояние при $l=1$,

d -состояние при $l=2$, f -состояние при $l=3$ и т. д.

Состояние s электрона в атоме водорода при $n=1$ называется основным состоянием (см. также п. 5°). Это состояние является сферически симметричным. Волновая функция этого состояния зависит только от расстояния r электрона от ядра ($\psi=\psi(r)$) и имеет вид:

$$\psi = \psi(r) = Ce^{-r/a_0},$$

где C — постоянная, определяемая из условия нормировки вероятностей (VI.1.2.2°), a_0 — первый борковский радиус:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (\text{в СГС}).$$

В квантовой механике электронные орбиты в атоме рассматриваются как геометрические места точек, в которых с наибольшей вероятностью может быть обнаружен электрон. В частности, для s -состояния атома водорода такой орбитой является первая круговая боровская орбита с радиусом, равным a_0 .

§ VI.2.2. Пространственное квантование

1°. Пространственным квантованием называется доказанное в квантовой механике существование определенных дискретных ориентаций в пространстве вектора момента импульса L_l электрона. Возможны лишь такие ориентации L_l , при которых проекция L_{lz} вектора L_l по направлению Z внешнего магнитного поля принимает значения, кратные \hbar :

$$L_{lz} = m\hbar,$$

где m — целое число, которое называется магнитным квантовым числом и принимает значения: $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, а l — орбитальное квантовое число (VI.2.1.8°). На рис. VI.2.2 приведено пространственное квантование векторов L_l для электронов в p - и d -состояниях (VI.2.1.9°).

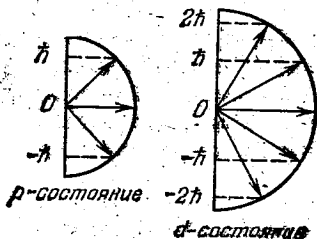


Рис. VI.2.2

2°. В связи с тем что вектор момента импульса электрона пропорционален орбитальному магнитному моменту электрона (III.12.1.2°), из пространственного квантования следует, что вектор p_m орбитального магнитного момента электрона во внешнем магнитном поле не может принимать произвольных ориентаций.

3°. Опытным путем было установлено, что наблюдается пространственное квантование атомов с одним внешним валентным электроном, находящимся в s -состоянии (VI.2.1.9°) ($l=0$). В таком состоянии атомов у них отсутствует момент импульса ($L_0=0$, VI.2.1.8°). Пространственное квантование, обнаруженное в таких опытах, относилось к спину электрона и подтвердило наличие двух возможных ориентаций спина во внешнем магнитном поле (III.12.1.3°).

Абсолютная величина спинового момента импульса электрона L_s находится по формуле (VI.2.1.8°):

$$L_s = \sqrt{s(s+1)} \hbar,$$

где s — спиновое квантовое число, равное $s=1/2$. Поэтому численное значение спина электрона равно (III.12.1.3*):

$$L_{1s} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$

Пространственное квантование спина означает, что проекция L_{1sz} вектора спина L_{1s} на направление внешнего магнитного поля находится по формуле:

$$L_{1sz} = m_s \hbar,$$

где m_s — магнитное спиновое число, которое отличается от спинового числа s тем, что может принимать два значения: не только $+1/2$, но и $-1/2$ *).

§ VI.2.3. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева

1°. Простейшая формулировка принципа Паули (принцип исключения): в любом атоме не может быть двух электронов, находящихся в двух одинаковых стационарных состояниях, определяемых набором четырех квантовых чисел: главного n , орбитального l , магнитного m и спинового m_s .

Принципу Паули, кроме электронов, подчиняются другие частицы, имеющие полуцелый спин (в единицах \hbar). В любой системе фермионов (VII.2.2.4°) не может быть двух частиц, находящихся в одинаковых квантовых состояниях (VII.2.1.4°).

Для электронов в атоме принцип Паули записывается следующим образом:

$$Z_1(n, l, m, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где $Z_1(n, l, m, m_s)$ — число электронов в состоянии, характеризуемом данным набором квантовых чисел.

2°. Максимальное число $Z_2(n, l, m)$ электронов, находящихся в состояниях, описываемых набором трех квантовых чисел n , l и m и отличающихся только ориентацией спинов электронов:

$$Z_2(n, l, m) = 2,$$

ибо спиновое квантовое число m_s может принимать лишь два значения: $1/2$ и $-1/2$.

3°. Максимальное число $Z_3(n, l)$ электронов, находящихся в состояниях, определяемых двумя квантовыми числами n и l :

$$Z_3(n, l) = 2(2l+1).$$

При этом учтено, что вектор L_l при заданном l может принимать в пространстве $(2l+1)$ различных ориентаций.

4°. Максимальное число $Z(n)$ электронов, находящихся в состояниях, определяемых значением n главного квантового числа:

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{l=n-1} Z_3(n, l) = 2n^2.$$

*). Часто оба спиновых квантовых числа s и m_s не различают и говорят о спиновом квантовом числе, понимая под ним m_s и приписывают спиновому квантовому числу два значения: $\pm 1/2$.

Таблица VI.2.1

n	Слой	Число электронов в состояниях					Максимальное число электронов
		$s (l=0)$	$p (l=1)$	$d (l=2)$	$f (l=3)$	$g (l=4)$	
1	<i>K</i>	2	—	—	—	—	2
2	<i>L</i>	2	6	—	—	—	8
3	<i>M</i>	2	6	10	—	—	18
4	<i>N</i>	2	6	10	14	—	32
5	<i>O</i>	2	6	10	14	18	50

В таблице VI.2.1 приведены максимальные числа электронов, находящихся в состояниях, характеризующихся данными значениями главного n и орбитального l квантовых чисел.

5°. Систематика заполнения электронных состояний в атомах и периодичность изменения свойств химических элементов позволяют расположить все химические элементы в *периодическую систему элементов Менделеева*. Современная теория периодической системы основывается на следующих положениях:

а) порядковый номер Z химического элемента равен общему числу электронов в атоме данного элемента:

б) состояние электронов в атоме определяется набором четырех квантовых чисел: n , l , m и m_s . Распределение электронов в атомах по энергетическим состояниям должно удовлетворять принципу минимума потенциальной энергии: с возрастанием числа электронов каждый следующий электрон должен занять возможное энергетическое состояние с наименьшей энергией;

в) заполнение электронами энергетических состояний в атоме должно происходить в соответствии с принципом Паули (п. 1°).

6°. *Электронным слоем (электронной оболочкой)* называется совокупность электронных состояний в атоме с одинаковым значением главного квантового числа n (VI.2.1.4°). Различаются следующие электронные слои (таблица VI.2.1): *K* при $n=1$, *L* при $n=2$, *M* при $n=3$, *N* при $n=4$ и т. д.

Внутри электронного слоя электроны распределяются по *подгруппам (подоболочкам)*, каждая из которых соответствует некоторому значению орбитального квантового числа l (VI.2.1.8°).

7°. Порядок заполнения электронами в атомах энергетических состояний в оболочках, а в пределах одной оболочки — в подгруппах, должен соответствовать последовательности расположения энергетических уровней с данными n и l и принципу Паули (VI.2.3.5°б). Для легких атомов этот порядок соответствует тому, что сначала заполняется оболочка с меньшим значением n и лишь затем должна заполняться электронами следующая оболочка. Внутри данной оболочки вначале заполняются состояния с $l=0$, а затем состояния с большими l , вплоть до $l=n-1$.

Подобная идеальная периодическая система элементов имела бы строение и число элементов в одном периоде (длины периодов), соответствующие таблице VI.2.1.

Периодическая система

I	II															
K	1.0079 1s ¹ ВОДОРОД															
L	3 Li 6,941 2s ¹ ЛИТИЙ	4 Be 9,01218 2s ² БЕРИЛЛИЙ														
M	11 Na 22,98977 3s ¹ НАТРИЙ	12 Mg 24,305 3s ² МАГНИЙ	III	IV	V	VI	VII	VIII								
N	19 K 39,0983 4s ¹ КАЛИЙ	20 Ca 40,08 4s ² КАЛЬЦИЙ	21 Sc 44,9559 3d ¹ 4s ² СКАНДИЙ	22 Ti 47,90 3d ² 4s ² ТИТАН	23 V 50,9415 3d ³ 4s ² ВАНАДИЙ	24 Cr 51,996 3d ⁵ 4s ¹ ХРОМ	25 Mn 54,9380 3d ⁵ 4s ² МАРГАНЕЦ	26 Fe 55,847 3d ⁶ 4s ² ЖЕЛЕЗО	27 Co 58,9332 3d ⁷ 4s ² КОБАЛЬТ							
O	37 Rb 85,467 5s ¹ РУБИДИЙ	38 Sr 87,62 5s ² СТРОНЦИЙ	39 Y 88,9059 4d ¹ 5s ² ИТРИЙ	40 Zr 81,22 4d ² 5s ² ЦИРКОНИЙ	41 Nb 92,9064 4d ⁴ 5s ¹ НИОБИЙ	42 Mo 95,94 4d ⁵ 5s ¹ МОЛИБДЕН	43 Tc 98,9062 4d ⁵ 5s ² ТЕХНЕЦИЙ	44 Ru 101,07 4d ⁸ 5s ¹ РУТЕНИЙ	45 Rh 102,9055 4d ⁸ 5s ¹ РОДИЙ							
P	55 Cs 132,9054 6s ¹ ЦЕЗИЙ	56 Ba 137,33 6s ² БАРИЙ	57 La* 138,9055 5d ¹ 6s ² ЛАНТАН	72 Hf 178,49 5d ² 6s ² ГАФНИЙ	73 Ta 180,9479 5d ³ 6s ² ТАНТАЛ	74 W 183,85 5d ⁴ 6s ² ВОЛЬФРАМ	75 Re 186,207 5d ⁵ 6s ² РЕНИЙ	76 Os 190,2 5d ⁶ 6s ² ОСМИЙ	77 Ir 192,22 5d ⁷ 6s ² ИРИДИЙ							
Q	87 Fr (223) 7s ¹ ФРАНЦИЙ	88 Ra 226,0254 7s ² РАДИЙ	89 Ac** (227) 6d ¹ 7s ² АКТИНИЙ	104 Ku (260) 6d ² 7s ² КУРАТОВИЙ	105 (Ns) (260) 6d ³ 7s ² НЬЯЛЬСБОРИЙ	106	107									

Атомный номер → 25 Mn

Атомная масса → 54,9380

В квадратных
скобках приведены
массовые числа
наиболее устой-
чивых изотопов.

← Заполнение
электронами
верхнего
уровня

* ЛАНТАНОИДЫ

58 Ce 140,12 4f ¹ 6s ² 6s ² ЦЕРИЙ	59 Pr 140,9077 4f ¹ 6s ² ПРАЗЕДИЙ	60 Nd 144,24 4f ¹ 6s ² НЕОДИМ	61 Pm (145) 4f ¹ 6s ² ПРОМЕТИЙ	62 Sm 150,4 4f ⁶ 6s ² САМАРИЙ	63 Eu 151,96 4f ⁷ 6s ² ЕВРОПИЙ
---	--	--	---	--	---

** АКТИНОИДЫ

90 Th 232,0381 6d ² 7s ² ТОРИЙ	91 Pa 231,0359 5f ² 6d ¹ 7s ² ПРОТАКТИНИЙ	92 U 238,029 5f ³ 6d ¹ 7s ² УРАН	93 Np 237,0482 5f ⁴ 6d ¹ 7s ² НЕПУНИЙ	94 Pu (244) 5f ⁶ 7s ² ПЛУТОНИЙ	95 Am (243) 5f ⁷ 7s ² АМЕРИЦИЙ
---	---	--	---	---	---

элементов Д.И.Менделеева

										VII	VIII				
											2 He				
											4,00260 1s ² ГЕЛИЙ				
										III	IV	V	VI		
										5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
										10,811 2s ² 2p ¹ БОР	12,011 2s ² 2p ² УГЛЕРОД	14,0067 2s ² 2p ³ АЗОТ	15,9994 2s ² 2p ⁴ КИСЛОРОД	18,99840 2s ² 2p ⁵ ФТОР	20,179 2s ² 2p ⁶ НЕОН
										13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
										26,98154 3s ² 3p ¹ АЛЮМИНИЙ	28,086 3s ² 3p ² КРЕМНИЙ	30,97376 3s ² 3p ³ ФОСФОР	32,06 3s ² 3p ⁴ СЕРА	35,453 3s ² 3p ⁵ ХЛОР	39,948 3s ² 3p ⁶ АРГОН
I	II														
28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr							
58,71 3d ⁸ 4s ² НИКЕЛЬ	63,546 3d ¹⁰ 4s ¹ МЕДЬ	65,38 3d ¹⁰ 4s ² ЦИНК	69,735 4s ² 4p ¹ ГАЛЛИЙ	72,59 4s ² 4p ² ГЕРМАНИЙ	74,9216 4s ² 4p ³ МЫШЬЯК	78,96 4s ² 4p ⁴ СЕЛЕН	79,904 4s ² 4p ⁵ БРОМ	83,80 4s ² 4p ⁶ КРИПТОН							
46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe							
106,4 4d ¹⁰ 5s ¹ ПАЛЛАДИЙ	107,868 4d ¹⁰ 5s ¹ СЕРЕБРО	112,41 4d ¹⁰ 5s ² КАДМИЙ	114,82 5s ² 5p ¹ ИНДИЙ	118,69 5s ² 5p ² ОЛОВО	121,75 5s ² 5p ³ СУРЬМА	127,65 5s ² 5p ⁴ ТЕЛЛУР	126,9045 5s ² 5p ⁵ ИОД	131,30 5s ² 5p ⁶ КСЕНОН							
78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn							
195,09 5d ⁹ 6s ¹ ПЛАТИНА	196,9665 5d ¹⁰ 6s ¹ ЗОЛОТО	200,59 5d ¹⁰ 6s ² РУТЬ	204,37 6s ² 6p ¹ ТАЛЛИЙ	207,2 6s ² 6p ² СВИНЕЦ	268,9804 6s ² 6p ³ ВИСМУТ	(209) 6s ² 6p ⁴ ПОЛОНИЙ	(210) 6s ² 6p ⁵ АСТАТ	(222) 6s ² 6p ⁶ РАДОН							

64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
157,25 4f ⁷ 5d ¹ 6s ² ГАДОЛИНИЙ	158,9254 4f ⁸ 6s ² ТЕРБИЙ	162,50 4f ¹⁰ 6s ² ДИСПРОЗИЙ	164,9304 4f ¹¹ 6s ² ГОЛЬМИЙ	167,26 4f ¹² 6s ² ЭРБИЙ	168,9342 4f ¹³ 6s ² ТУЛИЙ	173,04 4f ¹⁴ 6s ² ИТТЕРБИЙ	174,967 4f ¹⁴ 5d ¹ 6s ² ЛЮТЕЦИЙ

96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 (No)	103 (Lr)
(247) 5f ⁷ 6d ¹ 7s ² КЮРИЙ	(247) 5f ⁸ 6d ¹ 7s ² БЕРКЛИЙ	(251) 5f ¹⁰ 7s ² КАЛИФОРНИЙ	(254) 5f ¹¹ 7s ² ЭЙНШТЕЙНИЙ	(257) 5f ¹² 7s ² ФЕРМИЙ	(258) 5f ¹³ 7s ² МЕНДЕЛЕВИЙ	(259) 5f ¹⁴ 7s ² (НОБЕЛИЙ)	(260) 5f ¹⁴ 6d ¹ 7s ² (ЛОУРЕНСИЙ)

8°. Нарушения указанного в п. 7° порядка начинаются с калия ($Z=19$) и объясняются следующим образом. Взаимодействие между электронами в атоме приводит при достаточно больших главных квантовых числах n к тому, что состояния с большим n и меньшими l могут иметь меньшую энергию, т. е. быть энергетически более выгодными, чем состояния с меньшим n , но с большим l . В результате имеются химические элементы с недостроенными предыдущими оболочками, у которых застраиваются последующие. Химические элементы, у которых происходит достройка предыдущих оболочек при уже частично заполненных последующих оболочках, называются *переходными элементами*.

9°. *Внешними (валентными) электронами* атома называются электроны данного атома, которые в оболочке с наибольшим значением n входят в состав s - и p -подгрупп, т. е. имеют $l=0$ или $l=1$ (VI.2.1.9°). Этими электронами определяются химические и оптические свойства атомов (см. также III.7.3.1°). Общее число электронов в s - и p -подгруппе равно 8 (таблица VI.2.1). В основе большинства химических реакций лежит отдача или присоединение внешних (валентных) электронов. Если у атома имеется менее чем наполовину занятая ($s+p$)-подгруппа состояний, то для него теоретически выгодна отдача валентных электронов. В противоположном случае, когда ($s+p$)-подгруппа у атома более, чем наполовину занята электронами, более выгодным энергетически оказывается присоединение к такому атому электронов от других атомов в процессе химических реакций.

§ VI.2.4. Химические связи и строение молекул

1°. *Молекулой* называется наименьшая частица данного вещества, обладающая его основными химическими свойствами. Молекула состоит из одинаковых или различных атомов (VI.2.1.1°), соединенных между собой *междуатомными, химическими связями*. Химические связи объясняются различными взаимодействиями внешних, валентных электронов атомов (VI.2.3.9°). Об этом свидетельствует изменение оптического спектра, объясняющегося поведением этих электронов при образовании из атомов молекулы.

Для разъединения молекулы на составляющие ее атомы необходимо совершение определенной работы. Наоборот, образование молекулы сопровождается выделением энергии. Это доказывает, что существуют силы, связывающие атомы в молекулах. Энергия, которая выделяется при образовании молекулы, является мерой сил взаимодействия, обуславливающих соединение атомов в молекулах.

2°. На больших расстояниях r между атомами, значительно превосходящих линейные размеры d атомов, между ними действуют силы взаимного притяжения. На расстояниях r , сравнимых с d , между атомами действуют силы взаимного отталкивания, не позволяющие электронам данного атома слишком глубоко проникнуть в электронные оболочки другого атома. Как и в случае взаимодействия между молекулами (II.5.1.4°), силы отталкивания между атомами являются более короткодействующими, чем силы притяжения (рис. II.5.1). О знаках сил притяжения и отталкивания см. (II.5.1.4°).

3°. На некотором расстоянии r_0 между атомами в двухатомной молекуле противоположно направленные силы притяжения и отталкивания уравниваются друг друга и их геометрическая сумма равна нулю. Расстоянию r_0 соответствует наименьшая взаимная потенциальная энергия $W_{II}(r)$ атомов двухатомной

молекулы (ср. II.5.1.6°) (рис. VI.2.3). Равновесное межуатомное расстояние r_0 в молекуле называется *длиной связи*. Величина D называется *энергией диссоциации* или *энергией связи*. Она численно равна работе, которую надо совершить, чтобы разъединить молекулу на составляющие ее атомы и развести их на бесконечное расстояние друг от друга.

Энергия диссоциации численно равна энергии, выделяющейся при образовании молекулы, но противоположна ей по знаку. Энергия диссоциации отрицательна, а энергия, выделяющаяся при образовании молекулы, положительна.

4°. *Ионными (гетерополярными)* называются молекулы, образовавшиеся в результате превращения взаимодействующих атомов в противоположно электрически заряженные и взаимно притягивающиеся ионы (VI.2.1.1°). Такой тип связи атомов в молекуле называется *ионной (гетерополярной) связью*. В основе образования ионных молекул лежит указанное в (VI.2.3.9°) поведение атомов с различной заполненной внешней ($s+p$)-подоболочкой. Типичными ионными молекулами являются молекулы щелочно-галогидных солей, образованные ионами атомов элементов I и VII групп периодической системы Менделеева (VI.2.3.5°): $\text{NaCl}(\text{Na}^+\text{Cl}^-)$, $\text{CsI}(\text{Cs}^+\text{I}^-)$ и др. Металлы первой группы имеют небольшие величины потенциалов ионизации ϕ (VI.2.1.5°), а атомы VII группы характеризуются большой величиной *электронного сродства* — количества энергии, которое выделяется, когда к атому металлоида присоединяется электрон. Переход электрона от атома металла к атому металлоида приводит к образованию ионов, каждый из которых обладает устойчивой внешней восьмиелектронной ($s+p$)-подгруппой (VI.2.3.9°). В итоге образуется устойчивая ионная молекула.

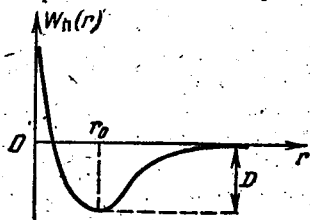


Рис. VI.2.3

5°. *Атомными (гомополярными)* называются молекулы, возникшие в результате взаимного притяжения нейтральных атомов. Химическая связь атомов в гомополярной молекуле называется *ковалентной связью*. Ковалентная связь обладает свойством насыщения (*насыщения ковалентной связи*), которое выражается в определенной валентности атомов. Атом водорода связывается только с одним другим атомом, а атом углерода не более, чем с четырьмя другими атомами. Простейшей молекулой с ковалентной связью является молекула водорода H_2 , состоящая из двух электронов и двух ядер — протонов.

В основе квантовомеханического объяснения ковалентной связи в молекуле H_2 лежит принципиальная неразличимость тождественных частиц — электронов в молекуле водорода (см. также VII.2.1.2°). Электроны в молекуле H_2 , каждый из которых «принадлежит» определенному ядру, можно поменять местами, и это приведет к той же системе — молекуле H_2 , состоящей из двух электронов и двух ядер. Неразличимость электронов приводит к существованию особого *квантовомеханического обменного взаимодействия*, возникающего между двумя тождественными электронами. Это взаимодействие понимается так, что электрон каждого из атомов молекулы водорода проводит некоторую долю времени у ядра другого атома и, таким образом, осуществляется связь обоих атомов, образующих молекулу. Из квантовомеханических расчетов следует, что при сближении двух водородных атомов на расстоянии, соизмеримое с боровским радиусом (VI.2.1.9°), при условии

что спины электронов в атомах антипараллельны (III.12.1.3°), возникает притяжение обоих атомов друг к другу и образуется устойчивая молекула H_2 . При параллельных спинах электронов оба атома водорода отталкиваются друг от друга и молекула водорода не образуется.

§ VI.2.5. Некоторые оптические свойства молекул

А) Молекулярные спектры.

1°. Спектры молекул — *молекулярные спектры* — за их характерный вид называются *полосатыми спектрами*. Они представляют собой совокупность более или менее широких полос, образованных тесно расположенными спектральными линиями. Полосы в молекулярных спектрах наблюдаются в инфракрасном, видимом и ультрафиолетовом диапазонах шкалы электромагнитных волн (IV.4.4.3°). Близко расположенные полосы образуют группы полос. У простейших двухатомных молекул наблюдается несколько *групп полос*. У многоатомных, сложных молекул в видимой и ультрафиолетовой областях спектра наблюдаются сплошные широкие полосы испускания (поглощения).

2°. Как и в спектрах атомов (VI.2.1.3°), отдельная спектральная линия молекулярного спектра возникает в результате изменения энергии молекулы. Энергия W молекулы представляется в виде суммы следующих, в первом приближении независимых частей:

$$W = W_{\text{пост}} + W_{\text{эд}} + W_{\text{коп}} + W_{\text{вр}} + W_{\text{яд}}$$

где: $W_{\text{пост}}$ — энергия поступательного движения центра инерции (I.2.3.3°) молекулы, $W_{\text{эд}}$ — энергия движения электронов в атомах молекулы, $W_{\text{коп}}$ — энергия колебательного движения ядер атомов, входящих в молекулу, около их равновесных положений, $W_{\text{вр}}$ — энергия вращательного движения молекулы как целого, $W_{\text{яд}}$ — энергия ядер атомов в молекуле. Энергия $W_{\text{пост}}$ не квантована (VI.1.4.3°), и ее изменения не могут привести к возникновению молекулярного спектра, влияние энергии $W_{\text{яд}}$ на молекулярный спектр может в первом приближении не учитываться. Энергия молекулы W' , изменение которой определяет молекулярный спектр, состоит из суммы трех слагаемых:

$$W' = W_{\text{эд}} + W_{\text{коп}} + W_{\text{вр}}$$

3°. По правилу частот Бора (VI.2.1.6°), частота ν фотона, испускаемого молекулой при изменении ее энергетического состояния, равна:

$$\nu = \frac{\Delta W'}{h} = \frac{\Delta W_{\text{эд}}}{h} + \frac{\Delta W_{\text{коп}}}{h} + \frac{\Delta W_{\text{вр}}}{h},$$

где $\Delta W_{\text{эд}}$, $\Delta W_{\text{коп}}$ и $\Delta W_{\text{вр}}$ — изменения соответствующих частей энергии W' , принимающие дискретные квантованные значения. Возникновение густо расположенных линий, образующих полосы в различных участках спектра, объясняется тем, что $\Delta W_{\text{вр}} < \Delta W_{\text{коп}} < \Delta W_{\text{эд}}$.

В далекой инфракрасной области спектра (длины волн (0,1+1) мкм) переход молекулы с одного вращательного энергетического уровня на другой приводит к возникновению спектральных линий *вращательного спектра*.

4°. В инфракрасной области спектра (длины волн от единицы до нескольких десятков микрон) переходы молекулы между колебательными энергетическими

уровнями создают линии *колебательного спектра* молекулы. При изменении колебательных энергетических уровней молекулы одновременно изменяются и ее вращательные энергетические состояния. Поэтому переходы молекулы между колебательными уровнями являются колебательно-вращательными переходами, приводящими к возникновению *колебательно-вращательного спектра* с частотами $\nu_{\text{кол-вращ}}$ (рис. VI.2.4). Этот спектр состоит из группы близких линий, определяемых тем, что данный колебательный переход сопровождается сопутствующими вращательными переходами.

5°. Видимая и ультрафиолетовая области спектра молекул возникают в результате переходов молекул между различными электронными энергетическими

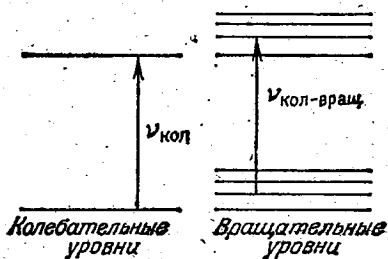


Рис. VI.2.4

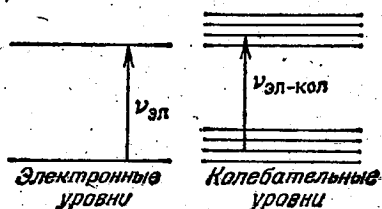


Рис. VI.2.5

уровнями. Каждому электронному энергетическому уровню соответствуют различные возможные колебания ядер в молекуле, т. е. набор колебательных энергетических уровней. Переходы между электронно-колебательными уровнями приводят к возникновению *электронно-колебательного спектра* молекулы, характеризуемого частотами $\nu_{\text{эл-кол}}$ отдельных линий (рис. VI.2.5). Поскольку каждому колебательному энергетическому состоянию соответствует система вращательных уровней (п. 4°), то каждому электронно-колебательному переходу соответствует некоторая полка. Весь электронно-колебательный спектр молекулы в видимой и близкой к ней областях представляет собой систему из нескольких групп полос.

Б) Комбинационное рассеяние света.

1°. *Комбинационным рассеянием света* называется возникновение в спектре света, рассеянного твердым или жидким телом, наряду с частотой ν_0 источника излучения, смещенных частот ν_c и ν_a . Линия спектра с частотой $\nu_c = \nu_0 - \nu$ называется *стоксовой (красной)*, линия с частотой $\nu_a = \nu_0 + \nu$ называется *антистоксовой (фиолетовой)*. Совокупность линий с частотами ν_c и ν_a образует *комбинационный спектр молекулы*, содержащий красные и фиолетовые спутники частоты ν_0 . Интенсивность фиолетовых спутников меньше интенсивности красных и с повышением температуры возрастает. Интенсивность красных спутников от температуры практически не зависит.

2°. Квантовомеханическое объяснение явления комбинационного рассеяния света заключается в анализе взаимодействия фотона падающего света с частотой ν_0 и молекулы, находящейся на нормальном колебательном энергетическом уровне с энергией $W_{\text{кол}}$. Если в результате взаимодействия с фотоном молекула будет переведена на более высокий колебательный энергетический уровень с энергией $W_{2\text{кол}} > W_{\text{кол}}$, то необходимая для этого энергия $\Delta W = W_{2\text{кол}} - W_{\text{кол}}$ будет

зависит от энергии падающего света. Фотон с энергией $h\nu_0$ будет поглощен, и вместо него возникнет фотон с меньшей частотой ν и энергией, равной $h\nu = h\nu_0 - \Delta W$.

В рассеянном свете появится частота ν_c , равная

$$\nu_c = \nu_0 - \frac{\Delta W}{h},$$

соответствующая красному спутнику. При переводе молекулы в различные возбужденные колебательные энергетические состояния возникнет вся совокупность красных спутников.

3°. Если молекула, находящаяся на колебательном энергетическом уровне с энергией $W_{\text{ккх}}$ (п. 3°), под действием фотона с энергией $h\nu_0$ перейдет в энергетическое состояние с меньшей энергией $W_{\text{лкх}}$, то в спектре рассеянного света появится фиолетовый спутник с частотой ν_a , равной

$$\nu_a = \nu_0 + \frac{\Delta W}{h},$$

где

$$\Delta W = W_{\text{ккх}} - W_{\text{лкх}}.$$

Вероятность комбинационного рассеяния с увеличением частоты меньше, чем вероятность такого же рассеяния с уменьшением частоты. Это связано с тем, что число молекул, находящихся на верхних энергетических уровнях, меньше числа молекул, находящихся на нижних уровнях. Поэтому интенсивность фиолетовых спутников меньше, чем интенсивность красных. С повышением температуры возрастает «заселенность» молекулами верхних энергетических уровней и возрастает интенсивность фиолетовых спутников. Число же молекул, находящихся в нормальном энергетическом состоянии, при нагревании мало изменяется. Поэтому интенсивность красных спутников практически мало меняется при повышении температуры.

В) Понятие люминесценции. Рентгеновские лучи.

1°. *Люминесценцией* называется излучение света телами при температуре T , избыточное над тепловым при той же температуре (V.5.1.1°). Длительность люминесценции значительно превышает периоды излучений атомных систем. В зависимости от способов возбуждения люминесцентного свечения различается: катодолюминесценция, электролюминесценция, фотолюминесценция, хемилюминесценция. Люминесцирующие вещества называются *люминофорами*.

2°. Люминесцентное излучение является неравновесным (ср. V.5.1.2°) и вызывается сравнительно небольшим числом *центров люминесценции* — атомов, молекул или ионов, — переходящих в возбужденное состояние под действием источника люминесценции. Возвращение возбужденного центра в нормальное или менее возбужденное состояние сопровождается *люминесцентным излучением*. Длительность этого излучения определяется длительностью возбужденного состояния, зависящей помимо свойств излучающих центров от свойств окружающей их среды. Длительность метастабильного возбужденного состояния достигает 10^{-4} с, что соответственно увеличивает и длительность люминесценции.

3°. Люминесценция, которая сразу прекращается после того как прекращается действие возбудителя свечения, называется *флуоресценцией*.

Люминесценция, сохраняющаяся длительное время после прекращения действия возбудителя свечения, называется *фосфоресценцией*.

Явление флуоресценции связано с переходами атомов, молекул или ионов из обычных возбужденных состояний с длительностью порядка 10^{-8} с в нормальное. Фосфоресценция, дающая длительное свечение, обусловлена переходом центров люминесценции из метастабильных состояний в нормальное (п. 2°). Подразделение люминесценции на флуоресценцию и фосфоресценцию условно — установление временную границу между ними иногда бывает затруднительно.

4°. Возбуждение люминесценции электронным пучком возможно, когда кинетическая энергия бомбардирующего электрона удовлетворяет неравенству:

$$\frac{mv^2}{2} \geq W_B - W_N,$$

где W_B и W_N — полная энергия люминесцирующей частицы в возбужденном и нормальном состояниях.

5°. *Фотолюминесценция* возбуждается электромагнитным излучением видимого или ультрафиолетового диапазона и подчиняется *правилу Стокса*: длина волны фотолюминесценции обычно больше, чем длина волны возбуждающего света. Квантовое обоснование правила Стокса: при поглощении фотона возбуждающего света с энергией $h\nu$ возникает фотон с энергией $h\nu_{\text{люм}}$, меньшей чем $h\nu$. Избыток энергии $h\nu - h\nu_{\text{люм}} = W$, где W — энергия, затраченная на различные процессы, кроме фотолюминесценции.

Обычно $W > 0$, и $\nu_{\text{люм}} < \nu$, т. е. $\lambda_{\text{люм}} > \lambda$ в соответствии с правилом Стокса. Иногда наблюдается *актистоксовое люминесцентное излучение*, подчиняющееся условию, противоположному правилу Стокса: $\lambda_{\text{люм}} < \lambda$. Это происходит в тех случаях, когда к энергии $h\nu$ фотона, возбуждающего излучения, добавляется определенная часть энергии теплового движения частиц люминесцирующего вещества:

$$h\nu_{\text{люм}} = h\nu + akT,$$

где a — коэффициент, зависящий от природы люминесцирующего вещества, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T — абсолютная температура.

6°. *Энергетическим выходом фотолюминесценции* называется отношение энергии люминесцентного излучения к энергии, поглощаемой в стационарных условиях люминофором от источника.

Квантовым выходом фотолюминесценции называется отношение числа фотонов фотолюминесцентного излучения к числу фотонов возбуждающего монохроматического света. *Закон Вавилова*: энергетический выход фотолюминесценции возрастает прямо пропорционально длине волны λ поглощаемого излучения, а затем, достигая максимального значения при $\lambda = \lambda_{\text{макс}}$, быстро уменьшается до нуля при дальнейшем увеличении длины волны. С возрастанием длины волны увеличивается число фотонов, соответствующих одной и той же энергии первичного излучения. Каждый из этих фотонов может вызвать появление фотона $h\nu_{\text{люм}}$. Поэтому с ростом λ возрастает энергетический выход фотолюминесценции. Резкое спадание этого выхода при $\lambda > \lambda_{\text{макс}}$ обусловлено тем, что фотоны с частотой $\nu < c/\lambda_{\text{макс}}$ не могут возбуждать частицы люминофора.

7°. *Рентгеновским излучением (рентгеновскими лучами)* называют электромагнитные волны с длиной волны от 10^{-14} м до 10^{-7} м, возникающие при торможении веществом быстрых электронов. Коротковолновое рентгеновское излучение бывает двух типов.

При энергиях электронов, не превышающих некоторой критической величины, зависящей от вещества, в котором тормозятся электроны, возникает *белое* или *тормозное рентгеновское излучение*. Оно излучается тормозящимися электронами и имеет непрерывный, сплошной спектр, ограниченный со стороны малых длин волн некоторой границей $\lambda_{\text{мин}}$, называемой *границей сплошного спектра*. Граничная длина волны $\lambda_{\text{мин}}$ зависит от кинетической энергии $W_{\text{к}}$ электронов, вызывающих тормозное излучение, и уменьшается с ростом $W_{\text{к}}$. Существование $\lambda_{\text{мин}}$ объясняется тем, что максимальная энергия фотона $h\nu_{\text{макс}}$ рентгеновских лучей, возникшего за счет энергии электрона, не может превышать $W_{\text{к}}$:

$$h\nu_{\text{макс}} = W_{\text{к}}$$

Следовательно, $\lambda_{\text{мин}} = c/\nu_{\text{макс}} = ch/W_{\text{к}}$. Это уравнение позволяет по данным о значениях $W_{\text{к}}$ и $\lambda_{\text{мин}}$ определить постоянную Планка (IX). Этот метод определения в свое время явился одним из наиболее точных и достоверных.

8°. Второй тип рентгеновских лучей — *характеристическое рентгеновское излучение* атомов вещества — имеет линейчатый спектр и является индивидуальной характеристикой вещества, не изменяющейся при вступлении его в химические соединения. Отсюда следует, что в отличие от оптических спектров, характеристические рентгеновские лучи связаны с процессами, происходящими в глубинных застроенных электронных оболочках атомов (VI.2.3.6°), которые не изменяются при химических реакциях атомов. *Линейчатые рентгеновские спектры* состоят из линий, составляющих несколько серий. У разных элементов обнаруживаются однотипные серии линий, отличающиеся тем, что у атомов более-тяжелых элементов сходные серии линий смещены в сторону более коротких волн.

9°. В порядке возрастания длин волн серии характеристических рентгеновских лучей называются соответственно *K*-, *L*-, *M*-, *N*-сериями. При удалении электрона с одной из внутренних оболочек атома с зарядом ядра Ze на освободившееся место переходит электрон из более удаленной от ядра оболочки и излучается рентгеновский фотон. Так, при удалении электрона с *K*-оболочки переход на нее электронов из *L*-, *M*- и т. д. оболочек приведет к возникновению K_{α} -, K_{β} -, K_{γ} -линий, образующих *K*-серию.

Частоты ν линий характеристических рентгеновских лучей находятся по *закону Мозли*:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b),$$

где a — постоянная для данной серии линий (в $\text{с}^{-1/2}$), b — постоянная экранирования. Смысл постоянной экранирования заключается в том, что на электрон, совершающий переход, соответствующий некоторой линии, действует не весь заряд ядра Ze , а заряд $(Z - b)e$, ослабленный экранирующим действием других электронов.

§ VI.2.6. Вынужденное излучение. Оптические квантовые генераторы

1°. Атом, находящийся в электромагнитном поле на возбужденном энергетическом уровне, может с некоторой вероятностью перейти под действием поля в низшее состояние. Электромагнитное поле как бы «сваливает» атом с возбужденного уровня вниз, на основной или менее возбужденный уровень. Такой пере-

ход сопровождается *вынужденным* (индуцированным, стимулированным) излучением вещества, вызванным действием на него электромагнитной волны.

2°. Явление вынужденного излучения с точки зрения волновой оптики (V.1.1.1°) означает, что при прохождении электромагнитной волны сквозь вещество ее интенсивность (IV.4.2.4°) увеличивается, т. е. происходит *отрицательное поглощение света* (отрицательная абсорбция света). При этом сохраняются неизменными частота волны (IV.3.2.5°), направление ее распространения, фаза (IV.3.2.5°) и поляризация (IV.4.1.7°). Вынужденное излучение строго когерентно (IV.3.5.1°) с вызвавшей его проходящей в веществе электромагнитной волной.

3°. С квантовой точки зрения когерентность, указанная в п. 2°, означает, что

новый фотон, появившийся в результате акта вынужденного излучения, ничем не отличается от фотона, вызвавшего его появление. Новый фотон, появившийся в результате индуцированного излучения, усиливает свет, проходящий в среде. На рис. VI.2.6, б показано, что процесс вынужденного излучения приводит к появлению вместо одного фотона с энергией $h\nu$ двух таких же фотонов. Однако, кроме индуцированного излучения происходит поглощение света. В результате поглощения фотона атомом, находящимся на энергетическом уровне W_1 , фотон исчезнет, и атом перейдет на энергетический уровень W_2 (рис. VI.2.6, а). Этот процесс уменьшает интенсивность света, проходящего сквозь вещество.

4°. Среда называется *усиливающей* (активная среда), если в ней интенсивность проходящего света возрастает. Это означает, что в активной среде процесс вынужденного излучения преобладает над процессом поглощения света. В противном случае, когда главную роль играет поглощение света, среда будет ослаблять проходящее сквозь нее излучение. Усиливающая среда называется также средой с отрицательным поглощением света (п. 1°).

5°. Поглощение света в веществе происходит в соответствии с законом Бугера — Ламберта: $I = I_0 e^{-a'x}$, где $a' > 0$ — натуральный показатель поглощения, x — толщина поглощающего слоя, I_0 — интенсивность света (IV.4.2.4°), входящего в среду (при $x=0$), I — интенсивность света, прошедшего слой толщиной x . Для среды с отрицательным поглощением света справедлив закон *Бугера — Ламберта — Фабриканта*:

$$I = I_0 e^{|a'|x},$$

где $|a'| > 0$ — положительная величина, соответствующая не ослаблению, а усилению света, проходящего через активную среду. Интенсивность света при этом круто возрастает с увеличением толщины слоя среды (рис. VI.2.7). Другими словами, натуральный показатель поглощения a' для активной, усиливающей среды является отрицательной величиной.



Рис. VI.2.6

6°. Между двумя энергетическими уровнями с энергиями W_1 и W_2 возможны три типа оптических процессов, изображенных на рис. VI.2.8. В условиях, когда можно пренебречь спонтанным излучением, при котором возбужденные атомы (молекулы или ионы) самопроизвольно переходят в нормальное состояние, оптические свойства среды определяются конкуренцией двух процессов — поглощения и вынужденного излучения. Число актов поглощения пропорционально концентрации частиц N_1 с энергией W_1 , находящихся на нижнем энергетическом

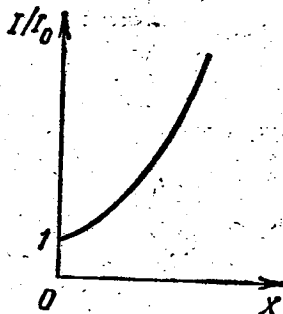


Рис. VI.2.7

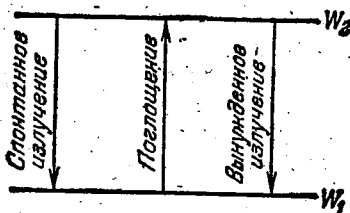


Рис. VI.2.8

уровне. Число актов вынужденного излучения пропорционально концентрации частиц N_2 на верхнем энергетическом уровне. Натуральный показатель поглощения a' в законе Бугера — Ламберта — Фабриканта (п. 5°) пропорционален разности между числом актов поглощения и вынужденного излучения:

$$a' = k(N_1 - N_2),$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

7°. В состоянии термодинамического равновесия системы (II.1.3.3°) $N_2 < N_1$ и $a' > 0$. Это означает, что число актов поглощения обычно превышает число переходов, сопровождающихся индуцированным излучением. Для получения среды с отрицательным натуральным показателем поглощения необходимо создание неравновесного состояния системы, при котором $N_2 > N_1$. Такие состояния называются *инверсными (обращенными) состояниями*. При этом число актов вынужденного излучения превышает число актов поглощения света.

8°. *Оптическими квантовыми генераторами (ОКГ) (генераторами когерентного света)* (ГКС) называются источники света, работающие на основе эффекта вынужденного излучения в активной среде с инверсной заселенностью энергетических уровней (п. 7°). ОКГ, работающие в оптическом диапазоне, называются *лазерами*, генераторы когерентного света, работающие в диапазоне ультракоротких радиоволн, называются *мазерами*.

9°. Процесс перевода среды в инверсное состояние (п. 7°), необходимое для работы ОКГ (п. 8°), называется *накачкой усиливающей среды*. Практически накачка осуществляется по *трехуровневой схеме ОКГ*. Одним из первых ОКГ, работающих по трехуровневой схеме, был генератор с рубиновым кристаллом в качестве усиливающей среды (окись алюминия Al_2O_3 с примесью окиси хрома Cr_2O_3). В кристаллической решетке окиси алюминия часть атомов Al заменена ионами Cr^{3+} , которые служат активным веществом, осуществляющим переходы с вынужденным излучением. Схема энергетических уровней Cr^{3+} изображена на рис. VI.2.9. Ближайшими к основному уровню C являются две широкие энергетические зоны A

(VII.2.8.2°) и двойной метастабильный уровень *B*. Интенсивное облучение рубина зеленым светом мощной импульсной лампы накачки, наполненной неоном и криптоном, переводит ионы хрома на уровни зоны *A*, откуда происходят безызлучательные переходы на уровень *B*. Избыток энергии передается кристаллической решетке рубина. В результате создается инверсная заселенность ионами хрома уровней *C* и *B* (п. 7°) и оптический квантовый генератор работает на красных линиях 6927 Å и 6943 Å, соответствующих переходу ионов хрома с уровня *B* на уровень *C*.

10°. Лавинообразное нарастание интенсивности в активной среде (п. 5°) означает, что такая среда действует как усилитель электромагнитных волн. Эф-

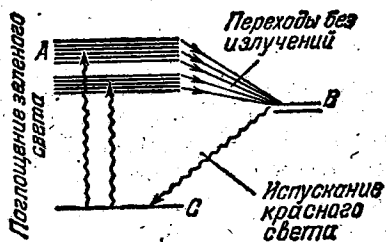


Рис. VI.2.9

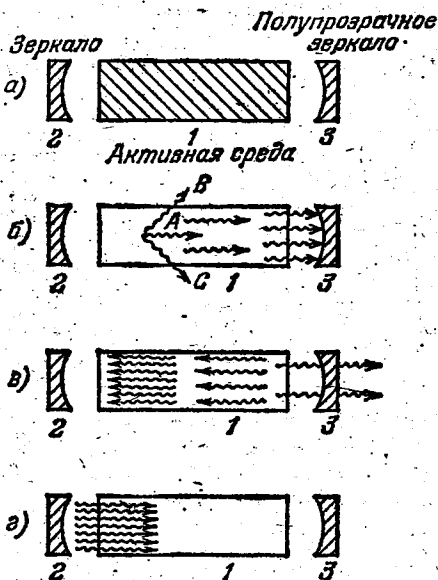


Рис. VI.2.10

фект усиления света в ОКГ увеличивается при многократном прохождении света через один и тот же слой усиливающей среды. Это происходит по схеме, изображенной на рис. VI.2.10, а. Фотон *A*, движущийся параллельно оси активной среды *1*, рождает лавину фотонов, летящих в том же направлении (рис. VI.2.10, б). Часть этой лавины пройдет через полупрозрачное зеркало *З* наружу, а часть отразится и будет возрастать в активной среде (рис. VI.2.10, в). Часть лавины фотонов, дошедших до сплошного зеркала *2*, поглотится в нем, но после отражения от зеркала *2* усиленный поток фотонов будет двигаться так же, как и первоначальный «затравоочный» фотон *A* (рис. VI.2.10, г). Многократно усиленный поток фотонов, вышедший из ОКГ сквозь полупрозрачное зеркало *З*, создает пучок лучей света большой интенсивности, остро направленный, с малым расхождением по углам.

Фотоны *B* и *C* (рис. VI.2.10, б), летящие под углом к оси активной среды, создают потоки фотонов, которые после многократных отражений выходят из активной среды и в усилении света не участвуют. Высокая когерентность, острая направленность и большая интенсивность лазерного излучения лежат в основе многочисленных и все возрастающих применений этого излучения.

ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава VII.1. СТРОЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ VII.1.1. Строение твердых тел

1°. *Твердыми телами* называются тела, которые обладают постоянством формы и объема. Различаются *кристаллические* и *аморфные* твердые тела.

Кристаллы имеют внешне правильную геометрическую форму и периодически повторяющееся на протяжении всего кристалла расположение составляющих его частиц — *кристаллическую решетку*. В этом смысле говорят о *дальнем порядке* кристаллах (ср. II.6.1.2°). Кристаллы ограничены упорядоченно расположенными друг относительно друга плоскими *гранями*, которые сходятся в *ребрах* и *вершинах*. Крупные одиночные кристаллы, имеющие форму правильных многогранников, называются *монокристаллами*. Их форма определяется химическим составом кристалла. *Поликристаллы* имеют мелкокристаллическую структуру — состоят из большого числа сросшихся мелких, хаотически расположенных кристаллов (*кристаллические зерна, кристаллиты*).

Аморфные твердые тела (вар, стекло и др.) представляют собой переохлажденные жидкости и не обладают четко выраженными свойствами кристаллов.

В дальнейшем речь пойдет о кристаллических твердых телах.

2°. Каждая частица в кристаллической решетке испытывает силы межмолекулярного взаимодействия (II.5.1.4°). Равновесное расположение всех частиц твердого тела в узлах кристаллической решетки (II.1.1.4°) соответствует минимуму свободной энергии кристалла (II.4.4.5°) и наиболее устойчивому его состоянию. При этом частицы в узлах решетки располагаются на некоторых равновесных расстояниях друг от друга, называемых *периодом кристаллической решетки*.

3°. Основные типы кристаллических твердых тел, различающиеся характером сил взаимодействия между частицами и видом частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки:

а) *ионные кристаллы* (NaCl, углекислый кальций и др. соли). В узлах кристаллической решетки расположены правильно чередующиеся положительные и отрицательные ионы, между которыми осуществляется гетерополярная связь (VI.2.4.3°);

б) *валентные (атомные) кристаллы* (C, Ge, Te и др.). В узлах кристаллической решетки расположены нейтральные атомы, между которыми осуществляется гомеополярная связь (VI.2.4.4°). Этот тип кристаллов имеют полупроводники (VII.2.10.1°), многие органические твердые тела;

в) *молекулярные кристаллы* (Ag, CH₄, парафин и др.). В узлах кристаллической решетки находятся молекулы, связь между которыми осуществляется вандер-ваальсовыми силами, в основном дисперсионными (II.5.1.8°);

г) *металлы* (Na, Cu, Al и др.). В узлах кристаллической решетки находятся положительные ионы, образовавшиеся после отщепления от атомов внешних (ва-

лентных) электронов (VI.2.3.9°), образующих электронный газ (III.5.1.1°) коллективизированных свободных частиц.

Особая *металлическая связь* является специфическим видом химической связи (VI.2.4.1°) и возникает между ионами кристаллической решетки и электронным газом. Электроны «стягивают» положительные ионы (главным образом электростатическими силами) и уравнивают отталкивание между ионами. При расстояниях между ионами, равных периоду кристаллической решетки (п. 2°), образуется устойчивое состояние металлического кристалла.

4°. Ангармонический характер тепловых колебаний частиц в узлах кристаллической решетки (II.1.1.4°) проявляется в том, что зависимость потенциальной энергии взаимодействия частиц от их смещения из положений равновесия не является параболической, а сила, действующая на частицу, не является квазиупругой (VII.1.3.5°). Это имеет основное значение для понимания некоторых тепловых (VII.1.2.4°) и электрических (VII.2.5.4°) свойств твердых тел.

5°. Характерной особенностью монокристаллов (п. 1°) является их анизотропия (*анизотропия кристаллов*) — зависимость физических свойств твердых тел (тепловых, упругих, электрических, оптических) от направлений в кристалле.

§ VII.1.2. Тепловое расширение твердых тел

1°. При повышении температуры твердого тела происходит его *тепловое расширение*, которое может быть *линейным* и *объемным*. Оба вида теплового расширения характеризуются средними коэффициентами линейного α_l и объемного α_v расширений в некотором интервале температур.

2°. Если l_0 — длина тела при температуре 0°C , то его удлинение Δl при нагревании до температуры $t^\circ\text{C}$ равно:

$$\Delta l = \alpha_l l_0 t,$$

откуда $\alpha_l = \Delta l / l_0 t$.

Коэффициент линейного расширения характеризует относительное удлинение $\Delta l / l_0$ тела при нагревании его на один градус. Для большинства твердых тел $\alpha_l \approx (10^{-6} \div 10^{-5}) \cdot \text{K}^{-1}$ и незначительно зависит от температуры.

3°. При нагревании тела от 0°C до $t^\circ\text{C}$ его объем изменяется от V_0 до V по закону:

$$V = V_0 (1 + \alpha_v t),$$

откуда $\alpha_v = \Delta V / V_0 t$. Коэффициент объемного расширения определяет относительное изменение объема $\Delta V / V_0$ при нагревании тела на один градус.

Связь коэффициентов α_v и α_l в первом приближении имеет вид:

$$\alpha_v \approx 3\alpha_l.$$

4°. Тепловое расширение твердых тел объясняется ангармоническим характером тепловых колебаний частиц в решетке (VII.1.1.4°). Если r_0 — равновесное расстояние между соседними частицами, то в произвольный момент времени расстояние между ними $r = r_0 + x$, где x — взаимное смещение частиц из положения равновесия, обусловленное тепловыми колебаниями. Силы, действующие между частицами в решетке, не являются квазиупругими, а зависят от смещения x по закону:

$$F_x = -kx + bx^3,$$

где κ — коэффициент квазиупругой силы (VII.1.3.5°), b — коэффициент аангармоничности колебаний. Член $b x^2$ характеризует отклонение колебаний от гармонического их характера, вызванное различной зависимостью от расстояния сил притяжения и отталкивания.

Для равновесного состояния твердого тела положение узлов кристаллической решетки не должно изменяться с течением времени и для каждой частицы в решетке среднее значение действующей на нее силы равно нулю: $\langle F_x \rangle = 0$.

Если бы колебания частиц были строго гармоническими ($F_x = -\kappa x$), то среднее смещение частиц $\langle x \rangle = -\frac{\langle F_x \rangle}{\kappa} = 0$, т. е. теплового расширения не происходило бы. Для реальных аангармонических колебаний из условия $\langle F_x \rangle = 0$ следует, что

$$-\kappa \langle x \rangle + b \langle x^2 \rangle = 0 \quad \text{или} \quad \langle x \rangle = \frac{b}{\kappa} \langle x^2 \rangle.$$

Для тепловых колебаний с малыми амплитудами потенциальная энергия колеблющейся частицы $W_{\text{п}}$ равна (IV.1.2.3°):

$$W_{\text{п}} = \frac{\kappa x^2}{2}.$$

По закону равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.4°):

$W_{\text{п}} = \frac{kT}{2}$, где k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T — абсолютная температура. Таким образом,

$$\frac{\kappa \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2} \quad \text{или} \quad \langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\kappa}.$$

Окончательно $\langle x \rangle = \frac{bkT}{\kappa^2}$. Среднее расстояние между частицами твердого тела увеличивается при нагревании кристалла и происходит тепловое расширение.

§ VII.1.3. Краткие сведения об упругих свойствах твердых тел

1°. *Деформацией* твердого тела называется изменение его размеров и объема. Обычно деформация сопровождается изменением формы тела. Иногда (при всестороннем растяжении или сжатии) форма тела не изменяется. Причинами деформаций являются внешние силы, действующие на тело, или изменения его температуры (VII.1.2.1°), и др. причины.

Деформация тела приводит к смещению его частиц из первоначальных положений равновесия в узлах кристаллических решеток (II.1.1.4°) в новые. Силы взаимодействия между частицами этому смещению препятствуют. В деформированном теле возникают внутренние *упругие силы*, уравнивающие внешние силы, вызывающие деформацию.

2°. Деформация называется *упругой (упругая деформация)*, если она исчезает после прекращения действия вызвавших ее внешних сил. При этом частицы твердого тела возвращаются в первоначальные положения равновесия (п. 1°). При неупругих деформациях происходит необратимая перестройка кристаллической решетки (VII.1.1.1°) и форма тела не восстанавливается. Такие деформации на-

ываются *пластическими* (п. 10°). Переход упругой деформации в пластическую может происходить при длительных воздействиях на тело даже малых внешних сил. Обратного перехода происходить не может.

3°. Физическая величина, численно равная упругой силе $dF_{\text{упр}}$, приходящейся на единицу площади dS сечения тела, называется *напряжением* σ :

$$\sigma = \frac{dF_{\text{упр}}}{dS}.$$

Если сила $dF_{\text{упр}}$ направлена по нормали к площадке dS , напряжение называется *нормальным*, если она направлена по касательной к площадке — *касательным*.

4°. Мерой деформации является *относительная деформация*, равная отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x , характеризующей форму или размеры тела: $\frac{\Delta x}{x}$.

Закон Гука: напряжение упруго деформированного тела прямо пропорционально его относительной деформации:

$$\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x}.$$

Здесь K_x — модуль упругости, численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице. Величина $\alpha_x = 1/K_x$ называется *коэффициентом упругости*. Закон Гука справедлив лишь при достаточно малых относительных деформациях. Напряжение σ_n , при котором нарушается пропорциональность между напряжением и относительной деформацией, называется *пределом пропорциональности* (точка A на рис. VII.1.1).

5°. Помимо упругих сил существуют силы, имеющие иную природу, чем упругие, но удовлетворяющие соотношению:

$$F_x = -kx,$$

где F_x — проекция силы на направление, вдоль которого происходит абсолютная линейная деформация x . Подобные силы называются *квазиупругими* (*квазиупругие силы*). Величина k называется *коэффициентом квазиупругой силы*.

6°. Простейшей деформацией является *продольное* или *одностороннее растяжение* (*сжатие*) — увеличение (уменьшение) длины тела под действием внешней растягивающей (сжимающей) силы F . Деформация прекращается при условии $F = F_{\text{упр}}$, где $F_{\text{упр}}$ — упругая сила (п. 1°). Относительная деформация $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$, где Δl — изменение длины под действием силы F , l — первоначальная длина тела. По закону Гука:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l},$$

где модуль упругости $K_x = E$ называется *модулем Юнга*. Модуль Юнга равен нормальному напряжению σ , при котором линейный размер тела изменяется в два раза: $\Delta l = l^0$.

*) В предположении, что закон Гука справедлив при столь большой деформации.

7°. Зависимость нормального напряжения σ от относительной деформации $\frac{\Delta l}{l}$ при одностороннем растяжении называется *диаграммой растяжения* (рис. VII.1.1). За пределом пропорциональности (п. 4°) увеличение σ вызывает значительное возрастание $\frac{\Delta l}{l}$. При напряжении σ_T , которому соответствует точка B на диаграмме растяжения, относительное удлинение тела продолжает возрастать без увеличения напряжения (горизонтальный участок BB' диаграммы). Напряжение σ_T называется *пределом текучести*. Наибольшее напряжение σ_B , соответствующее точке C на диаграмме, называется *пределом прочности или временным сопротивлением*. Точка D диаграммы соответствует разрыву тела.

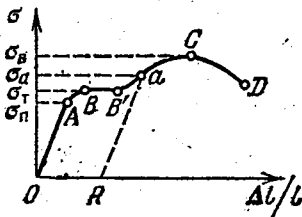


Рис. VII.1.1

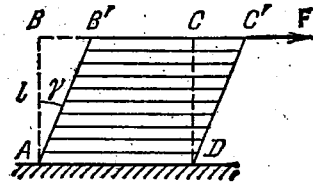


Рис. VII.1.2

8°. При медленном снятии нагрузки с тела, деформированного до напряжения σ_a (точка a на диаграмме) (рис. VII.1.1) график $\sigma = \varphi\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$ представляет собой прямую aR , параллельную прямолинейному участку OA диаграммы. Отрезок OR определяет *остаточную деформацию тела*, характерную для пластических деформаций.

9°. *Сдвигом* называется деформация тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой *плоскости сдвига*, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис. VII.1.2). Сдвиг происходит под действием касательной силы F , приложенной к грани BC , параллельной плоскости сдвига. Грань AD , параллельная BC , неподвижно закреплена. При малом сдвиге

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{CC'}{CD},$$

где $CC' = \Delta x$ — абсолютный сдвиг, γ — *угол сдвига* или *относительный сдвиг*, выраженный в радианах. По закону Гука (п. 4°) сдвиг пропорционален касательному («скальпяющему») напряжению $\sigma_T = F/S$, где S — площадь поверхности грани BC , т. е.

$$\sigma_T = G\gamma.$$

Величина G называется *модулем сдвига*. Модуль сдвига равен касательному напряжению, которое возникло бы в образце при относительном сдвиге, равном единице.

§ VII.1.4. Понятие о фазовых превращениях твердых тел

1°. Нагревание твердого кристаллического тела приводит к возрастанию амплитуды ангармонических тепловых колебаний частиц в узлах кристаллической решетки (VII.1.2.4°) и к возрастанию средних междуузельных расстояний в решетке (тепловое расширение (VII.1.2.1°)). Сильное нагревание твердого тела приводит к разрушению его кристаллической решетки и к переходу вещества из твердой фазы в жидкую или паровую фазу (фазовый переход I рода (II.5.4.2°)).

2°. Переход вещества из твердого состояния в газообразное называется *возгонкой (сублимацией)*. Переход вещества из твердого состояния в жидкое называется *плавлением*. Плавление начинается при определенной для данного давления температуре $T_{пл}$, [называемой *температурой плавления*]. В процессе плавления эта температура не изменяется. На рис. VII.1.3 изображена зависимость $T(Q)$, где Q — количество теплоты (II.2.2.1°), которое сообщено нагреваемому твердому телу. Изотермический участок BC соответствует двухфазной системе: твердое тело — жидкость (ср. (II.5.3.2°) — двухфазная система: жидкость — насыщенный пар). В процессе плавления вещество переходит из более упорядоченного, кристаллического состояния в менее упорядоченное — жидкое. По второму закону термодинамики (II.4.3.2°) плавление связано с возрастанием энтропии системы (II.4.4.3°).

3°. Количество теплоты $r_{пл}$, которое необходимо для того, чтобы расплавить единицу массы твердого тела при температуре $T_{пл}$, называется *удельной теплотой плавления*. Из первого начала термодинамики (II.2.3.1°) следует, что

$$r_{пл} = u_{ж} - u_{тв} + p(v_{ж} - v_{тв}),$$

где $u_{ж}$ и $u_{тв}$ — удельные внутренние энергии (II.2.1.2°) вещества в жидкой и твердой фазах, $v_{ж}$ и $v_{тв}$ — удельные объемы вещества в этих фазах, p — постоянное давление, при котором происходит фазовый переход I рода (II.5.4.2°).

4°. Температура плавления $T_{пл}$ зависит от давления p . Изменение давления на dp приводит к изменению температуры плавления на $dT_{пл}$. Зависимость $T_{пл} = T_{пл}(p)$ выражается уравнением Клапейрона — Клаузиуса (см. также (II.6.6.5°)):

$$\frac{dT_{пл}}{dp} = \frac{T_{пл}(v_{ж} - v_{тв})}{r_{пл}}.$$

Смысл всех величин указан в п. 3°. Уравнение Клапейрона — Клаузиуса справедливо для любого фазового перехода I рода.

В подавляющем большинстве случаев плавление вещества приводит к увеличению его удельного объема, т. е. $v_{ж} > v_{тв}$ и $\frac{dT_{пл}}{dp} > 0$ ($r_{пл} > 0$), т. е. температура плавления возрастает с увеличением давления. Такие вещества могут быть

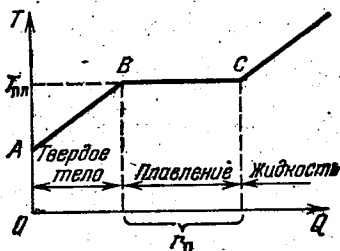


Рис. VII.1.3

твердыми при высоких давлениях в области температур, больших критической (II.5.3.1°).

У некоторых веществ (вода, висмут, галлий) плотность вещества при плавлении увеличивается, так что $v_{ж} < v_{тв}$. Например, лед при 0°C менее плотен, чем вода. У таких веществ $\frac{T d_{пл}}{dp} < 0$, т. е. с возрастанием давления температура плавления понижается.

5°. На диаграмме $T - p$ график зависимости температуры фазового перехода I рода от давления $p = f(T)$ изображается кривой, каждая точка которой соответствует равновесию двух сосуществующих фаз. Так, кривая парообразования изображает равновесие двухфазной системы жидкость — пар. Так как $v_{п} - v_{ж} > 0$

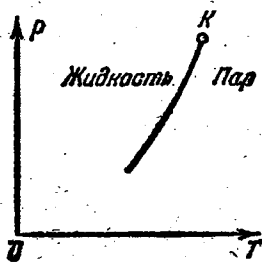


Рис. VII.1.4

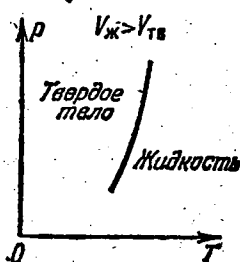


Рис. VII.1.5

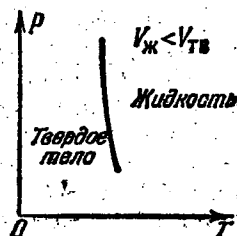


Рис. VII.1.6

($v_{п}$ — удельный объем пара), то из уравнения Клапейрона — Клаузиуса (п. 4°) следует, что $\frac{dp}{dT} > 0$. Кривая $p = f(T)$, разделяющая области жидкого и газообразного состояния вещества, заканчивается в критической точке K (II.5.3.1°) (рис. VII.1.4). На рисунках VII.1.5 и VII.1.6 изображены кривые равновесия твердое-тело — жидкость для случаев $v_{ж} > v_{тв}$ и $v_{ж} < v_{тв}$.

6°. При охлаждении жидкостей до некоторой температуры, называемой температурой кристаллизации $T_{кр}$, происходит кристаллизация вещества — переход его из жидкого в твердое кристаллическое состояние. При этом выделяется количество теплоты, равное теплоте плавления (п. 3°). Температура кристаллизации равна температуре плавления и зависит от наличия примесей. Примеси понижают $T_{кр}$, если только они не образуют с веществом смешанных кристаллов, называемых твердыми растворами. Например, морская вода, содержащая растворенные соли, кристаллизуется при более низкой температуре, чем дистиллированная вода. Это служит основой для создания охлаждающих смесей.

7°. Кристаллизация жидкостей связана с изменением характера теплового движения частиц вещества. Возрастает время их оседлого существования (время релаксации) (II.6.2.4°). Силы взаимного притяжения между частицами приводят к тому, что тепловое движение превращается в хаотические тепловые колебания около узлов кристаллической решетки. Переход вещества в более упорядоченную фазу связан с уменьшением энтропии системы (II.4.4.3°).

Глава VII.2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ VII.2.1. Понятие о квантовых статистиках

1°. *Квантовой статистикой* называется статистический метод исследования (II.1.2.2°), применяемый к системам, которые состоят из большого числа частиц и подчиняются законам квантовой механики (VI.1.1.1°).

2°. В отличие от исходных положений классической статистической физики (II.3.1.4°, 5°) квантовая статистика строится на *принципе неразличимости тождественных частиц*: все одинаковые частицы (например, все электроны в металлах, все протоны в ядрах атомов) считаются принципиально неразличимыми друг от друга.

3°. Основной в квантовой статистике является задача о распределении частиц по координатам и скоростям*. Ее можно сформулировать как задачу о распределении частиц по ячейкам (клеточкам) «фазового объема», элемент которого равен $\Delta\Gamma = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ (II.3.1.5°). Корпускулярно-волновая двойственность свойств частиц вещества (VI.1.1.3°) и соотношения неопределенностей Гейзенберга (VI.1.6.2°) приводят к тому, что элементарный объем $\Delta\Gamma$ не может быть меньше, чем h^3 , где h — постоянная Планка (IX). При размещении частиц по ячейкам с объемом h^3 каждая, в соответствии с принципом неразличимости тождественных частиц (п. 2°), ставится вопрос о числе частиц, находящихся в данной ячейке, но не о том, какие именно из данного сорта частиц находятся в этой ячейке. Состояние системы частиц не изменяется от перестановки тождественных частиц как внутри данной ячейки, так и между ячейками.

4°. Если элементарный объем $\Delta\Gamma_i$ разбить на ячейки с объемом h^3 , то отношение $\Delta\Gamma_i/h^3 = \Delta g_i$ определяет *число квантовых состояний*, содержащихся в объеме $\Delta\Gamma_i$ с энергией, заключенной в интервале от W_i до $W_i + \Delta W_i$. Частицы, число которых равно ΔN_i , находящиеся в объеме $\Delta\Gamma_i$, могут всевозможными способами распределиться между Δg_i состояниями с энергией W_i .

§ VII.2.2. Функции распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака

1°. Частицы с целым или нулевым спином (в единицах \hbar) называются *бозонами* (например, фотоны, фононы и некоторые ядра). Системы таких частиц описываются *квантовой статистикой Бозе — Эйнштейна*. Бозоны не подчиняются принципу Паули (VI.2.3.1°), и для них не накладываются ограничения на число частиц, которые могут находиться в некотором квантовом состоянии.

2°. *Функцией распределения Бозе — Эйнштейна* f_B называется средняя «заселенность» бозонами состояний с данной энергией, т. е. среднее число частиц в одном состоянии:

$$f_B = \frac{\Delta N(W_i)}{\Delta g_i}$$

* В классической статистике законы Максвелла (II.3.3.1°) и Больцмана (II.3.4.2°) позволяют решать аналогичную задачу.

где $\Delta N(W_i)$ — число частиц с энергией в интервале от W_i до $W_i + \Delta W_i$, Δg_i — число квантовых состояний в этом интервале энергий (VII.2.1.4°). Для отыскания функции f_B рассматривается термодинамическая вероятность P (II.4.5.2°) распределения частиц системы по квантовым состояниям и находится наиболее вероятное распределение при условии сохранения числа частиц N в системе и энергии W системы:

$$\sum_i \Delta N_i = N, \quad \sum_i \Delta N_i W_i = W.$$

Суммирование производится по всем квантовым состояниям системы.

3°. Метод неопределенных множителей Лагранжа при отыскании условного экстремума позволяет получить следующее выражение для функции распределения Бозе — Эйнштейна:

$$f_B = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) - 1}.$$

Здесь k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T — абсолютная температура. Величина $\mu = \frac{U - TS + pV}{N}$ называется *химическим потенциалом*, отнесенным к отдельной частице, где U — внутренняя энергия системы (II.2.1.2°), S — ее энтропия (II.4.4.2°), V — объем системы, p — давление. Химический потенциал является работой, которая совершается в изобарно-изотермических условиях при увеличении числа частиц в системе на единицу.

4°. Частицы с полуцелым спином (в единицах $\hbar = h/2\pi$) называются *фермионами* (электроны, протоны, нейтроны и др.). Системы фермионов описываются квантовой статистикой Ферми — Дирака. Фермионы подчиняются принципу Паули (VI.2.3.1°) и в данном квантовом состоянии системы фермионов не может находиться более одной частицы.

5°. *Функция распределения Ферми — Дирака* f_Φ определяется аналогично п. 2°:

$$f_\Phi = \frac{\Delta N(W_i)}{\Delta g_i}.$$

Смысл обозначений указан в п. 2°. Решение задачи о наиболее вероятном распределении фермионов по состояниям при условии сохранения в системе полной энергии W и полного числа N ее частиц приводит к следующему виду функции f_Φ :

$$f_\Phi = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

Смысл μ см. п. 3°.

6°. *Функции распределения в классической и квантовых статистиках*, введенные как среднее число частиц в одном состоянии (п. 2°), могут быть выражены единой формулой:

$$f = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) + \delta}.$$

Для распределения Максвелла — Больцмана (ср. II.3.4.2°) $\delta=0$, $\mu=0$, для распределения Бозе — Эйнштейна $\delta=-1$, для распределения Ферми — Дирака $\delta=+1$. На рис. VII.2.1 показаны эти три функции распределения.

Пример. В полости объема V при $T=\text{const}$ в состоянии термодинамического равновесия со стенками находится излучение абсолютно черного тела (V.5.1.8°). Его можно рассматривать как газ фотонов, подчиняющийся статистике Бозе — Эйнштейна, ибо для фотона спин равен \hbar (табл. VIII.2.1). Число квантовых состояний излучения в объеме V (VII.1.1.4°)

$$dg = 2 \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} = \frac{8\pi W^2 dW}{h^3 c} V,$$

где p — импульс фотона (V.6.2.2°), связанный с его энергией W соотношением:

$p = \frac{W}{c}$, c — скорость света в вакууме. Коэффициент 2 появляется в связи с тем, что существуют две возможные поляризации света (IV.4.1.8°). Энергия фотона $W = h\nu$ (V.6.1.4°), где ν — частота.

Число фотонов с частотами в интервале от ν до $\nu + d\nu$ в объеме V , согласно п. 2°:

$$dN = \frac{dg}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{8\pi\nu^2 d\nu V}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}.$$

При этом учтено, что для фотонного газа, в котором не выполняется условие сохранения полного числа частиц, химический потенциал μ (п. 3°) равен нулю.

Объемная плотность энергии излучения в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$

$$\rho(\nu, T) = \frac{h\nu dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Этот результат является формулой Планка для объемной плотности энергии излучения абсолютно черного тела (V.5.1.5°).

§ VII.2.3. Понятие о вырождении систем частиц, описываемых квантовыми статистиками

1°. Система частиц (в частности, идеальный газ) называется *вырожденной*, если ее свойства, описываемые квантовыми закономерностями, отличаются от свойств обычных систем, подчиняющихся классическим законам. Отступление в поведении бозе- и ферми-газов от классического максвелл-больцмановского газа называется *вырождением газов (вырожденный газ)*. Вырождение газов становится существенным при весьма низких температурах и больших плотностях (п. 3°).

2°. *Параметром вырождения A* называется величина

$$A = \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right),$$

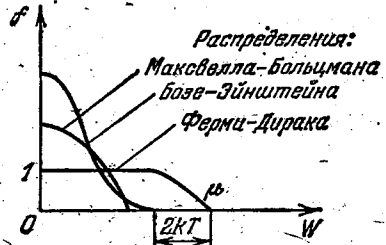


Рис. VII.2.1

где μ — химический потенциал (VII.2.2.3°). При условии $A \ll 1$ (малость вырождения) в квантовых функциях распределения f_B и f_Φ можно пренебречь единицей в знаменателях и эти функции переходят в классическую функцию распределения f_{M-B} Максвелла — Больцмана:

$$f_{M-B} = A \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right).$$

Параметр вырождения находится из условия нормировки функций распределения: $\sum_i \Delta N_i = N$ (VII.2.2.2°), означающего сохранение в системе общего числа частиц. Условие малости вырождения имеет вид:

$$A = \frac{n_0 h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \ll 1,$$

где n_0 — концентрация частиц, m — масса частиц, k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, T — абсолютная температура.

3°. Температурой вырождения T_B называется температура, при которой вырождение становится существенным (п. 1°). Она определяется из условия:

$$A = \frac{n_0 h^3}{(2\pi m k T_B)^{3/2}} = 1, \quad \text{откуда} \quad T_B = \frac{h^2 n_0^{2/3}}{2\pi m k}.$$

Температурный критерий вырождения: $T < T_B$ — система частиц вырождена, $T > T_B$ — система частиц не вырождена, и ее поведение описывается классическими законами.

Например, для водорода при нормальных условиях ($T = 300$ К и $n_0 \approx 3 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$) параметр вырождения $A \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll 1$. Температура вырождения для водорода $T_B \approx 1$ К. Для всех остальных газов, более тяжелых чем водород, A еще меньше. Газы при нормальных условиях не бывают вырождены. Вырождение, связанное с квантовыми свойствами газов, проявляется значительно меньше, чем отклонение газов от идеальности, вызванное межмолекулярными взаимодействиями. Фотонный газ всегда вырожден ($T_B = \infty$), ибо для фотона масса покоя равна нулю ($m_0 = 0$, табл. VIII.2.1). Газ фотонов описывается квантовой статистикой Бозе — Эйнштейна (VII.2.2.6°).

4°. Электроны в металлах являются примером вырожденного газа. В обычных условиях $n_0 \approx (10^{28} \div 10^{29}) \text{ м}^{-3}$. Так как масса электрона мала ($m \approx 10^{-30}$ кг), то $T_B \approx (16 \div 20) \cdot 10^3$ К. Электронный газ не подчиняется классической статистике Максвелла — Больцмана.

5°. Энергия вырожденного электронного газа (VII.2.4.5°) и других газов, описываемых квантовыми статистиками, не является линейной функцией температуры. Поэтому простое физическое истолкование абсолютной температуры (II.3.2.5°) непригодно в области вырожденных газов (п. 3°).

§ VII.2.4. Вырожденный электронный ферми-газ в металлах

1°. Распределение электронов проводимости в металлах по энергиям описывается функцией распределения Ферми — Дирака (VII.2.2.5°)

$$f_\Phi = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) + 1}$$

Число квантовых состояний электронов в единице объема металла, приходящееся на интервал энергий от W до $W+dW$ (VII.2.1.4°)

$$dg(W) = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{2\pi (2m)^{3/2} W^{1/2} dW}{h^3}.$$

Здесь использована связь между импульсом электрона p и его энергией:

$$p^2 = 2mW, \quad dp = \left(\frac{m}{2W}\right)^{1/2} dW.$$

Число электронов $dn_0(W)$ в единице объема металла, энергия которых лежит на интервале от W до $W+dW$, согласно (VII.2.2.2°):

$$dn_0(W) = 2f_{\Phi} dg(W) = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{W^{1/2} dW}{\exp\left(\frac{W-\mu}{kT}\right) + 1}.$$

Коэффициент 2 учитывает, что электроны подчиняются принципу Паули (VI.2.3.11°). Эта формула выражает закон распределения электронов проводимости в металле по энергиям.

2°. Свообразные свойства электронного газа сказываются на его поведении при абсолютном нуле температуры ($T=0$ К). Если μ_0 — химический потенциал электронного газа при $T=0$ К (VII.2.2.3°), то

$$f_{\Phi} = \frac{1}{\exp\left(\frac{W-\mu_0}{kT}\right) + 1},$$

при $W < \mu_0$ разность $W - \mu_0 < 0$ и $f_{\Phi} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\mu_0 - W}{kT}\right)}$, при $W - \mu_0 < 0$ и

$T \rightarrow 0$, $\exp\left(\frac{\mu_0 - W}{kT}\right) \rightarrow \infty$ и $f_{\Phi} \rightarrow 1$, при $W > \mu_0$ разность $W - \mu_0 > 0$ и при $T \rightarrow 0$, $\exp\left(\frac{W - \mu_0}{kT}\right) \rightarrow \infty$ и $f_{\Phi} \rightarrow 0$.

График функции распределения Ферми f_{Φ} при $T=0$ К показан на рис. VII.2.2. В интервале энергии от 0 до μ_0 функция f_{Φ} равна единице. При

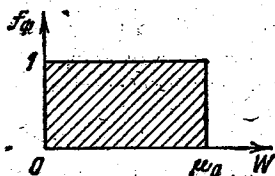


Рис. VII.2.2

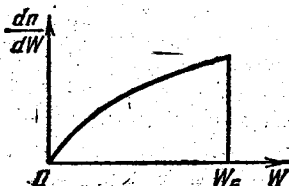


Рис. VII.2.3

переходе через $W = \mu_0$ она скачкообразно падает до нуля. При $T=0$ К электроны металла занимают все дозволенные уровни энергии с «заселенностью», равной единице (VII.2.2.2°), вплоть до уровня с энергией $W = \mu_0$. Все уровни с энергией, превышающей μ_0 , свободны — «заселенность» их равна нулю. Таким образом, μ_0

представляет собой максимальную энергию, которую могут иметь электроны проводимости в металле при абсолютном нуле температуры. Она называется *энергией Ферми*: $\mu_0 = W_F$. Если на рис. VII.2.2 по оси абсцисс отложены порядковые номера энергетических уровней, занятых электронами проводимости в единице объема, то наибольшим будет уровень с номером $n_0/2$, где n_0 — концентрация электронов. Наивысший уровень, занятый электронами, называется *уровнем Ферми*. Ему соответствует энергия Ферми W_F , которую имеет электрон на этом уровне.

3°. Закон распределения электронов проводимости по энергиям при $T=0$ К имеет вид:

$$dn_0(W) = \frac{4\pi (2m)^{3/2} W^{1/2} dW}{h^3}$$

и графически изображается кривой рис. VII.2.3.

Общее число электронов проводимости в единице объема металла

$$n_0 = \int_0^{W_F} dn_0(W) = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{W_F} W^{1/2} dW = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} W_F^{3/2}.$$

Отсюда

$$W_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

Средняя энергия электрона $\langle W \rangle$ при $T=0$ К

$$\langle W \rangle = \frac{3}{5} W_F = \frac{3}{5} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

При $n_0 = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, подставляя значения h и m , получим:

$$\langle W \rangle = 9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,4 \text{ эВ}.$$

Если сопоставить эту энергию со средней энергией молекулы невырожденного одноатомного газа $\langle W \rangle = \frac{3}{2} kT$ (II.3.2.5°), то получится, что энергию W_F молекула могла бы иметь при температуре $T \sim 10^4$ К.

Другими словами, в обычных условиях $\frac{kT}{W_F} < 1$.

4°. При температуре, отличной от абсолютного нуля, функция распределения Ферми — Дирака f_Φ имеет вид, изображенный на рис. VII.2.4 сплошной кривой. Там же пунктиром изображена функция f_Φ при $T=0$ К. Кривые отличаются характером спада вблизи значения $W = \mu$. Резкий спад по вертикали при $W = \mu_0 = W_F$ в случае $T=0$ К (рис. VII.2.2) сменяется плавной кривой ABC при $T \neq 0$ К. Существенно, что состояния электронов, расположенных на уровнях энергии, удовлетворяющих условию $W < \mu$, не изменяются при нагревании от 0 К до T . Искажение функции f_Φ происходит только на ее «хвосте» в интервале энергии шириной $2kT$ вблизи значения $W = \mu$, при котором $f_\Phi = 1/2$.

5°. Химический потенциал μ (VII.2.2.3°) электронного газа при температуре T

$$\mu = W_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{W_F} \right)^2 \right].$$

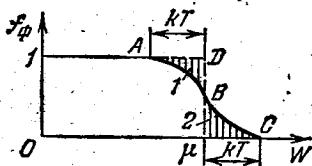


Рис. VII.2.4

Внутренняя энергия U (II.2.1.2°) моля электронного газа

$$U = \frac{3}{5} N_A W_F \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (kT)^2}{W_F^2} \right].$$

Здесь N_A — постоянная Авогадро (IX), k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°). Величины μ и U практически не изменяются с повышением температуры.

Молярная теплоемкость $C_{V\mu}$ (II.2.5.2°) электронного газа

$$C_{V\mu} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} N_A k \frac{kT}{W_F}.$$

Сравнение с теплоемкостью невырожденного одноатомного газа (II.3.7.1°)

$C_V^{\text{класс}} = \frac{3}{2} N_A k$ показывает, что

$$\frac{C_{V\mu}}{C_V^{\text{класс}}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{W_F}.$$

Для комнатных температур $\frac{kT}{W_F} \approx 0,01$ (п. 3°), поэтому $C_{V\mu}/C_V^{\text{класс}} \approx 0,03$. Теплоемкость вырожденного электронного газа ничтожно мала. Это связано с тем, что в процессе изменения внутренней энергии электронного газа при нагревании участвует незначительное число электронов, находящихся в «области спада» функции распределения f_F Ферми — Дирака (заштрихованные области 1 и 2 на рис. VII.2.4). Таким образом снимается одна из больших трудностей, существовавших в классической электронной теории проводимости металлов (III.7.3.7°).

§ VII.2.5. Понятие о квантовой теории электропроводности металлов

1°. Теория электропроводности металлов, построенная на основе квантовой механики (VI.1.1.1°) и квантовой статистики Ферми — Дирака (VII.2.2.5°), называется *квантовой теорией электропроводности металлов*. В этой теории с помощью функции распределения Ферми — Дирака (VII.2.2.5°) выведен закон Ома для плотности тока (III.7.3.4°):

$$j = \gamma E.$$

2°. Удельная электрическая проводимость γ в квантовой теории электропроводности вычисляется по формуле:

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \langle \lambda_F \rangle}{m \mu_F},$$

где n_0 — число электронов проводимости в единице объема металла, $\langle \lambda_F \rangle$ — средняя длина свободного пробега электрона (II.3.5.1°), имеющего энергию Ферми (VII.2.4.2°), μ_F — скорость теплового движения такого электрона. При внешнем сходстве этой формулы с формулой для γ в классической электронной теории (III.7.3.4°) она имеет совершенно другое физическое содержание и, в отличие от классической формулы, полностью соответствует опытным данным.

3°. В квантовой теории электропроводности металлов получает свое объяснение зависимость удельной электрической проводимости от температуры: $\gamma \sim 1/T$, а также аномально большая величина средней длины свободного пробега элект-

рона в металле (III.7.3.7°). Упорядоченное движение электронов в металле — электрический ток — рассматривается в квантовой теории как процесс распространения электронных дебройлевских волн (VI.1.1.4°), которые рассеиваются на ангармонических тепловых колебаниях узлов решетки металла (VII.1.2.4°). В оптике аналогичное явление происходит при распространении световой волны сквозь мутную среду, содержащую центры рассеяния (взвешенные в жидкости частицы, коллоидные растворы и т. д.) (V.3.3.1°). Если расстояния между центрами рассеяния имеют порядок, сравнимый с длиной волны λ , то происходит рассеяние света и интенсивность его убывает по мере распространения в среде. При расстояниях между центрами рассеяния, меньших $\lambda/2$, среда является оптически однородной и рассеяния света не происходит (V.2.4.3°).

4°. Идеальная кристаллическая решетка, в которой отсутствуют всякие нарушения периодичности, а в узлах находятся неподвижные частицы, ведет себя подобно оптически однородной среде — она не рассеивает электронные волны и электроны проводимости проходят в такой решетке без сопротивления. Рассеяние электронных волн происходит лишь при появлении искажений периодичности в решетке — неоднородностей, играющих роль центров рассеяния. Такими центрами являются, например, флуктуации плотности в решетке (I.4.6.3°), возникающие в результате ангармонических тепловых колебаний положительных ионов металла. За исключением сверхпроводников (VII.2.6.1°), это рассеяние и приводит к существованию у чистых металлов электрического сопротивления.

5°. С повышением температуры возрастает рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях узлов решетки и уменьшается средняя длина свободного пробега электронов.

Величина $\langle \lambda_F \rangle$ вычисляется по формуле:

$$\langle \lambda_F \rangle = \frac{Ed}{\pi n_0 k T},$$

где E — модуль Юнга (VII.1.3.6°), d — период кристаллической решетки, n_0 — число атомов в единице объема, k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T — абсолютная температура. При этом удельная электрическая проводимость оказывается обратно пропорциональной абсолютной температуре и не зависит от n_0 для одновалентных металлов *):

$$\gamma = \frac{e^2 Ed}{m u_F \pi k T}.$$

Эта формула согласуется с опытными данными в области комнатных температур. Например, для серебра ($E=10^7$ Н/м², $d=3 \cdot 10^{-10}$ м, $m=9 \cdot 10^{-31}$ кг, $kT \sim 4,2 \cdot 10^{-21}$ Дж, $u_F=1,4$ м/с) получается $\gamma_{теор} \approx 5 \cdot 10^7$ Ом⁻¹ м⁻¹, в то время как $\gamma_{экспер} \approx 6,3 \cdot 10^7$ Ом⁻¹ м⁻¹. При очень низких температурах вышеприведенные формулы не справедливы. Средняя длина свободного пробега в этих условиях зависит от температуры по закону $\langle \lambda_F \rangle \sim T^{-5}$.

6°. Помимо флуктуаций плотности, причиной рассеяния электронных волн и электрического сопротивления металлов являются искажения периодичности кристаллической решетки, вызванные включениями в решетку примесных атомов.

*) Для таких металлов концентрации электронов проводимости и ионов решетки совпадают.

Удельное сопротивление ρ металла ($\rho=1/\gamma$) состоит из двух частей:

$$\rho = \rho_T + \rho_{пр.}$$

Здесь ρ_T — удельное сопротивление, которое обусловлено рассеянием электронных волн на флуктуациях плотности, $\rho_{пр.}$ — удельное сопротивление, которое связано с рассеянием на примесях. Существенно, что $\rho_{пр.}$ не зависит от температуры, и поэтому, так как при $T \rightarrow 0$ и $\rho_T \rightarrow 0$, то с понижением температуры $\rho \rightarrow \rho_{пр.}$; $\rho_{пр.}$ называется *остаточным удельным сопротивлением*. Это сопротивление остается у металла при охлаждении вплоть до абсолютного нуля. На рис. VII.2.5 показана зависимость удельного сопротивления от температуры. Отрезок, отсекаемый на оси ординат продолжением кривой до $T=0$ К, представляет собой остаточное удельное сопротивление.

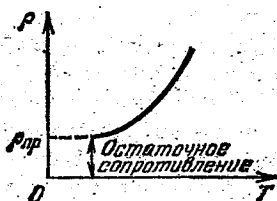


Рис. VII.2.5

§ VII.2.6. Явление сверхпроводимости

1°. *Явление сверхпроводимости* состоит в том, что у некоторых металлов и сплавов происходит резкое падение удельного сопротивления вблизи определенной температуры T_c , называемой *температурой перехода в сверхпроводящее состояние*. Вещества, обладающие такими свойствами, называются *сверхпроводниками*. В настоящее время известно свыше 500 чистых элементов и сплавов, обнаруживающих свойство сверхпроводимости. Температурный интервал AB (рис. VII.2.6) перехода в сверхпроводящее состояние для чистых образцов не превышает тысячных долей

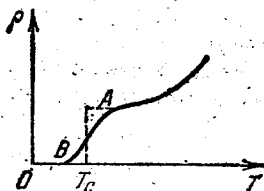


Рис. VII.2.6

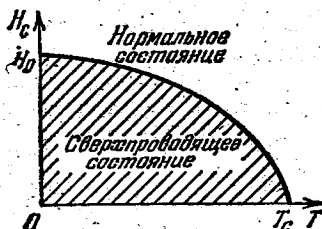


Рис. VII.2.7

градуса, и поэтому имеет смысл определенное значение T_c . Ширина интервала AB зависит от неоднородности металла, в первую очередь, от наличия примесей и внутренних напряжений. Известные в настоящее время температуры T_c изменяются в пределах от 0,155 К (BiPt) до 23,2 К (Nb_3Ge).

Изотопический эффект у сверхпроводников заключается в том, что температуры T_c обратно пропорциональны квадратным корням из атомных масс изотопов (VIII.1.1.2°) одного и того же сверхпроводящего металла.

2°. Достаточно сильное магнитное поле при данной температуре разрушает сверхпроводящее состояние вещества. При действии на сверхпроводник магнитного поля температура T_c (п. 1°) снижается.

Магнитное поле с напряженностью H_c , которое при данной температуре вызывает переход вещества из сверхпроводящего состояния в нормальное, называется *критическим полем*. При уменьшении температуры сверхпроводника величина H_c возрастает в первом приближении по закону: $H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$. Кривая на рис. VII.2.7₁ разделяет области сверхпроводящего и нормального состояния вещества.

Сверхпроводящие свойства проводников исчезают при пропускании через них сильного электрического тока, создающего магнитное поле, разрушающее сверхпроводящее состояние сверхпроводников.

3°. Внешнее магнитное поле, более слабое, чем критическое (п. 2°), не проникает в толщу сверхпроводника. Магнитная индукция B (III.10.1.2°) в объеме сверхпроводника всегда равна нулю. На рис. VII.2.8 однородное магнитное поле (III.10.1.4°) направлено вдоль оси цилиндрического сверхпроводника. Сверхпроводник как бы «выталкивает» магнитное поле из занимаемой им части пространства и является идеальным диамагнетиком с магнитной восприимчивостью (III.12.3.4°) $\chi = -1$. При этом магнитная проницаемость (III.12.4.5°) $\mu = 1 + \chi = 0$ и $B = \mu_0 \mu H = 0$.

4°. Переход вещества в сверхпроводящее состояние сопровождается изменением его тепловых свойств. Так, в отсутствие магнитного поля при температуре

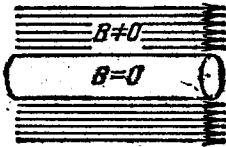


Рис. VII.2.8

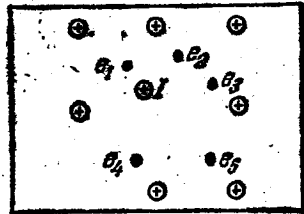


Рис. VII.2.9

перехода T_c (п. 1°) скачкообразно изменяется теплоемкость (II.2.5.1°). При наличии магнитного поля изотермический переход из сверхпроводящего состояния в нормальное связан с скачкообразным изменением теплопроводности и теплоемкости. Эти явления являются характерными признаками фазового перехода II рода (II.5.4.2°).

5°. Квантовомеханическая теория явления сверхпроводимости рассматривает его как сверхтекучесть (II.5.4.3°) электронов в металле с присущим сверхтекучести отсутствием трения. Электроны проводимости движутся в сверхпроводнике беспрепятственно — без «трения» об узлы кристаллической решетки. Основная особенность сверхпроводников заключается в том, что в них возникает взаимное притяжение электронов с образованием электронных пар. Причиной этого притяжения является дополнительное к кулоновскому отталкиванию взаимодействие между электронами, осуществляемое под воздействием кристаллической решетки и приводящее к притяжению электронов. Возникновение этого притяжения модельно изображено на рис. VII.2.9. Электрон проводимости e_1 притягивает к себе ион I кристаллической решетки, смещая его из положения равновесия. При этом изменяется электрическое поле в кристалле — ион I создает электрическое поле, действующее на электроны проводимости, в том числе и на электрон e_2 . Взаимодействие

электронов e_1 и e_2 осуществляется с помощью кристаллической решетки. Смещение иона под действием электрона приводит к тому, что электрон оказывается окруженным «облаком» положительного заряда, превышающего собственный отрицательный заряд электрона. Электрон вместе с этим «облаком» имеет суммарный положительный заряд и притягивается к другому электрону.

6°. В квантовой теории металлов притяжение между электронами (обмен фононами) связывается с возникновением элементарных возбуждений кристаллической решетки. Электрон, движущийся в кристалле и взаимодействующий с другим электроном посредством решетки, переводит ее в возбужденное состояние. При переходе решетки в основное состояние излучается квант энергии звуковой частоты — *фонон* (VII.2.7.5°), который поглощается другим электроном. Притяжение между электронами можно представить как обмен электронами фононами, причем притяжение наиболее эффективно, если импульсы взаимодействующих электронов антипараллельны.

7°. Возникновение сверхпроводящего состояния вещества связано с возможностью образования в металле связанных пар электронов. Расстояние δ между электронами пары равно:

$$\delta = \frac{h u_F}{k T_c},$$

где h — постоянная Планка, u_F — скорость электрона на уровне Ферми (VII.2.5.2°), k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), T_c — температура перехода в сверхпроводящее состояние (п. 1°). Оценка показывает, что $\delta \approx 10^{-4}$ см, т. е. электроны, образующие пару, находятся друг от друга на расстояниях порядка 10^4 периодов кристаллической решетки. Вся электронная система сверхпроводника представляет собой связанный коллектив, простирающийся на громадные, по атомным масштабам, расстояния.

Если при сколь угодно низких температурах кулоновское отталкивание между электронами преобладает над притяжением, образующим пары, то вещество (металл или сплав) остается по своим электрическим свойствам нормальным. Если же при температуре T_c (п. 1°) происходит преобладание сил притяжения над силами отталкивания, то вещество переходит в сверхпроводящее состояние.

8°. Важнейшей особенностью связанного в пары коллектива электронов в сверхпроводнике является невозможность обмена энергией между электронами и решеткой малыми порциями, меньшими чем энергия связи пары электронов. Это означает, что при соударении электронов с узлами кристаллической решетки не изменяется энергия электронов и вещество ведет себя как сверхпроводник с нулевым удельным сопротивлением. Квантовомеханическое рассмотрение показывает, что при этом не происходит рассеяния электронных волн на тепловых колебаниях решетки или примесях. А это и означает отсутствие электрического сопротивления.

9°. Для того чтобы разрушить состояние сверхпроводимости, необходима затрата определенной энергии. При температуре $T = T_c$ (п. 1°) происходит нарушение связанных состояний электронных пар, прекращается притяжение между электронами и явление сверхпроводимости перестает существовать.

10°. Явление сверхпроводимости используется для получения сильных магнитных полей, поскольку при прохождении по сверхпроводнику сильных токов,

создающих сильные магнитные поля, отсутствуют тепловые потери. Однако в связи с тем, что магнитное поле разрушает состояние сверхпроводимости (п. 2°), для получения сильных магнитных полей применяются особые *сверхпроводники II рода* — некоторые сплавы, тонкие сверхпроводящие пленки. В такие сверхпроводники магнитные поля с напряженностью большей чем H_c (п. 2°) проникают в вещество в виде нитей, пронизывающих образец. Вещество между нитями оказывается сверхпроводящим, и сильные токи могут привести к созданию сверхсильных магнитных полей. Широкое распространение имеют магниты, основанные на сверхпроводящих соленоидах.

§ VII.2.7. Теплоемкость твердых тел

1°. Для твердых тел не различаются теплоемкости C_V и C_P (II.2.5.4°, 7°). Основной вклад в теплоемкость неметаллических твердых тел вносит энергия тепловых колебаний частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток. Для металлов незначительный вклад в теплоемкость вносит вырожденный электронный газ (VII.2.4.5°).

2°. В основе классической теории теплоемкости твердых тел лежит закон равномерного распределения энергии по степеням свободы (II.3.6.4°). Однородное твердое тело рассматривается как система независимых друг от друга частиц, имеющих 3 степени свободы и совершающих тепловые колебания с одинаковой частотой. Средняя энергия $\langle W \rangle$, приходящаяся на одну степень свободы: $\langle W \rangle = kT$ (II.3.6.5°). Внутренняя энергия U (II.2.1.2°) моля твердого тела

$$U = 3N_A \langle W \rangle = 3N_A kT = 3RT,$$

где N_A — постоянная Авогадро (IX), k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°), $R = kN_A$ — универсальная газовая постоянная (II.1.4.4°). Молярная теплоемкость *) (II.2.5.4°) твердого тела с атомной кристаллической решеткой

$$C_M = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R = 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 5,97 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Правило Дюлонга и Пти: молярная теплоемкость всех химически простых кристаллических твердых тел приблизительно равна $6 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Согласно этому правилу молярная теплоемкость твердых тел не должна зависеть ни от температуры, ни от каких-либо характеристик кристаллов. Опыты опровергают это и указывают на зависимость теплоемкости от температуры, в особенности в области низких температур (рис. VII.2.10). Причины расхождения с опытом классической теории теплоемкости твердых тел состоят в ограниченности используемого закона равномерного распределения энергии по степеням свободы и непригодности его в области низких температур, где среднюю энергию колеблющихся частиц в кристаллической решетке необходимо вычислять по законам квантовой механики (VI.1.5.9°).

3°. В первоначальной квантовой теории теплоемкости твердых тел кристалл рассматривался как система N атомов, каждый из которых является квантовым

*) Часто говорят о теплоемкости, отнесенной к грамм-атому твердого тела.

гармоническим осциллятором. Колебания всех атомов происходят независимо друг от друга с одинаковой частотой ω . Средняя энергия $\langle W \rangle$, приходящаяся на одну степень свободы атома — квантового гармонического осциллятора, равна (VI.1.5.9):

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Внутренняя энергия U (II.2.1.2*) моля твердого тела выразится следующим образом:

$$U = 3N_A \langle W \rangle = 3N_A \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1},$$

откуда находится молярная теплоемкость твердого тела*):

$$C_{\mu} = 3R \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^2}.$$

Если ввести *характеристическую температуру* $T_{\theta} = \frac{h\nu}{kT}$, то

$$C_{\mu} = 3R \left(\frac{T_{\theta}}{T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{T_{\theta}}{T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{T_{\theta}}{T}\right) - 1\right]^2}.$$

Этот результат качественно описывает зависимость теплоемкости твердых тел от температуры, изображенную на рис. VII.2.10.

При высоких температурах ($h\nu \ll kT$), как показано в VI.1.5.9°, $\langle W \rangle = kT$ в соответствии с законом о равномерном распределении энергии по степеням свободы (II.3.6.5°) и $C_{\mu} = 3R$.

При низких температурах ($h\nu \gg kT$)

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \sim \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

и

$$C_{\mu} = 3R \left(\frac{T_{\theta}}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{T_{\theta}}{T}\right).$$

При $T \rightarrow 0$ имеем: $T_{\theta}/T \rightarrow \infty$ и

$e^{-T_{\theta}/T} \rightarrow 0$ быстрее, чем возрастает $(T_{\theta}/T)^2$. Поэтому при $T \rightarrow 0$ теплоем-

кость $C_{\mu} \rightarrow 0$, что качественно согласуется с опытом. Однако количественно поведение теплоемкости твердых тел вблизи абсолютного нуля простейшая квантовая теория не описывает.

4°. Предположение о том, что все атомы твердого тела совершают тепловые колебания независимо друг от друга с одинаковой частотой, чрезмерно упрощает

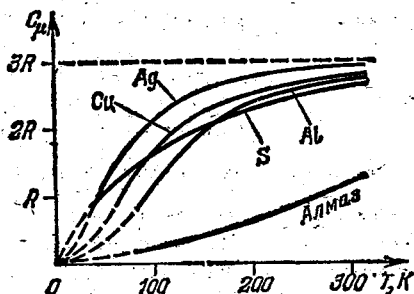


Рис. VII.2.10

*) См. сноску на стр. 420.

подлинную картину колебаний частиц в кристаллической решетке. Между атомами (или другими частицами) твердого тела имеются сильные взаимодействия, что все N частиц тела образуют связанную систему, обладающую $3N$ степенями свободы, причем колебания всех атомов могут происходить с различными частотами. Весьма сложная задача о распределении частот колебаний атомов в твердом теле явилась в свое время основой уточненной теории теплоемкости твердых тел. Твердое тело обладает широким спектром частот колебаний. Имеются колебания с достаточно низкими и более высокими частотами. Низким частотам соответствуют упругие колебания кристалла звукового (или ультразвукового) диапазона. Связь между частицами в кристаллической решетке приводит к тому, что в кристалле распространяются упругие звуковые волны.

Физическая идея теории теплоемкости твердых тел, уточнившей теорию, рассмотренную в п. 3°, состояла в том, что основной вклад в энергию тепловых колебаний кристалла вносят колебания низких частот, соответствующих упругим волнам с длинами волн, превышающими период кристаллической решетки. Это следует, в частности, из рис. VI.1.7, показывающего, что наибольший вклад в среднюю энергию квантового осциллятора вносят колебания с малыми частотами (VI.1.5.9°). Распространяющиеся упругие волны ведут себя так, как если бы они распространялись в сплошной среде. Атомная структура кристалла не оказывает влияния на распространение в нем упругих волн с длинами волн, превосходящими

$\lambda_{\text{мин}} = \frac{v}{\nu_{\text{макс}}}$, где v — скорость соответствующей упругой волны, $\nu_{\text{макс}}$ — ее частота. Длина волны $\lambda_{\text{мин}}$ должна быть соизмерима с периодом решетки, т. е. $\lambda_{\text{мин}} \sim d \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$, где N — число частиц (узлов кристаллической решетки) в кристалле объемом V .

5°. Упругие волны в кристалле имеют квантовые свойства, проявляющиеся в том, что существует наименьшая порция — квант энергии волны с данной частотой ν . Это позволяет сопоставить волне с частотой ν *кванти* — *фононы*, распространению которых со скоростью звука v соответствует звуковая волна.

Фонон обладает энергией $W = h\nu$, где h — постоянная Планка (IX), и квазиимпульсом $p = \frac{h\nu}{v}$. *Квазиимпульс* *фонона* p имеет направление, совпадающее с направлением распространения звуковой волны. Наиболее существенное отличие квазиимпульса от импульса состоит в том, что при столкновении фононов в кристаллах квазиимпульс может дискретными порциями передаваться кристаллической решетке — он при этом не сохраняется*).

Короче говоря, подобно тому как квантование электромагнитного поля приводит к фотонам (V.6.1.4°), квантование звукового поля приводит к фононам.

6°. Спин фононов равен нулю, поэтому они подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна (VII.2.2.2°). Фононы могут испускаться и поглощаться, но число их не сохраняется постоянным; поэтому химический потенциал для фононного газа (VII.2.2.3°) равен нулю (ср. VII.2.2.6°).

*) Детальное рассмотрение свойств квазичастиц, связанное с ролью периодичности структуры кристалла, выходит за рамки данного справочника.

Энергия кристалла может рассматриваться как энергия фононного газа и вычисляться аналогично тому, как это сделано в VII.2.2.6°. Число dN фононов с частотами в интервале от ν до $\nu + d\nu$

$$dN = \frac{dg}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1},$$

где dg — число квантовых состояний (число ячеек) в объеме V кристалла:

$$dg = 3 \frac{4\pi p^3 dp V}{h^3} = 3 \frac{4\pi \nu^3 d\nu}{v^3} V,$$

где $p = \frac{h\nu}{v}$ — квазиимпульс фонона, v — скорость звука в кристалле. Коэффициент 3 учитывает, что в твердом теле могут распространяться продольные и поперечные волны с двумя взаимно-перпендикулярными поляризациями *) (IV.4.1.8°). Таким образом,

$$dN = \frac{12\pi \nu^3 d\nu V}{v^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}.$$

Внутренняя энергия U (II.2.1.2°) кристалла (с точностью до нулевой энергии)

$$U = \int_0^{\nu_{\max}} h\nu dN = \frac{12\pi V h}{v^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1},$$

где $\nu_{\max} = v \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}$ — верхняя граница частот фононов, вносящих вклад в энергию тепловых колебаний кристалла. В п. 4° приведена оценка ν_{\max} по порядку величины.

При вычислении U вводится *характеристическая температура Дебая* $T_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}$ и рассматриваются два предельных случая:

а) Высокие температуры $T > T_D$. При этом

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \frac{h\nu}{kT} \quad \text{и} \quad U = \frac{12\pi V}{v^3} kT \int_0^{\nu_{\max}} \nu^3 d\nu = \frac{12\pi V kT}{v^3} \frac{\nu_{\max}^4}{3} = 3NkT.$$

Для одного моля кристалла $N = N_A$, где N_A — постоянная Авогадро (IX), и молярная теплоемкость C_μ соответствует правилу Дюлонга и Пти (п. 2°):

$$C_\mu = \frac{\partial U}{\partial T} = 3N_A k = 3R.$$

б) Низкие температуры $T < T_D$. При вычислении интеграла

$$\int_0^{\nu_{\max}} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

вводится новая переменная $\xi = h\nu/kT$ и верхний предел

*) Мы не учитываем различие скоростей продольных и поперечных волн и просто увеличиваем втрое число квантовых состояний фононов.

заменяется на ∞ :

$$U = \frac{12\pi Vh}{v^3} \int_0^{v_{\max}} \frac{v^3 dv}{\exp(hv/kT) - 1} = \frac{12\pi Vh}{v^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\xi} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{4\pi^5 k^4 V}{15 h^3 v^3} T^4.$$

— Молярная теплоемкость C_M пропорциональна кубу абсолютной температуры и подчиняется *закону Дебая*:

$$C_M = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{16\pi^5 k^4 V T^3}{15 h^3 v^3} = \text{const } T^3.$$

§ VII.2.8. Понятие о зонной теории твердых тел

1°. Дальний порядок в кристаллах (VII.1.1.1°) приводит к тому, что в твердых телах существует электрическое поле, которое является периодической функцией координат. В металле, например, где положительные ионы расположены в узлах решетки в строгом порядке, потенциальная энергия электрона изменится вдоль некоторого направления Ox так, как показано на рис. VII.2.11. Минимумы энергии соответствуют местам, где расположены положительные ионы.

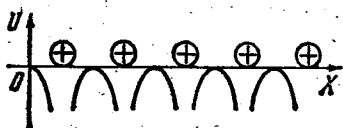


Рис. VII.2.11

2°. Периодическое электрическое поле в кристалле любого типа (VII.1.1.3°) существенно изменяет энергетические состояния электронов в твердом теле по сравнению с их состоянием в изолированных атомах. В изолированных атомах электроны находятся в дискретных энергетических состояниях (VI.1.2.5°). В твердом теле энергетические состояния электронов определяются как взаимодействием их с ядром своего атома, так и электрическим полем кристаллической решетки, т. е. взаимодействием с другими атомами. В результате этого взаимодействия энергетические уровни электронов расщепляются. Вместо дискретного энергетического уровня, характерного для изолированного атома, в твердом теле, содержащем N взаимодействующих атомов, возникает N близко расположенных друг от друга энергетических уровней, которые образуют *энергетическую полосу (энергетическую зону)*. В кристаллах образуется *зонный энергетический спектр электронов*.

3°. Образование зонного энергетического спектра в кристалле вытекает из соотношения неопределенностей (VI.1.6.6°). В изолированном атоме ввиду конечности времени τ жизни электрона в возбужденном состоянии ($\tau \sim 10^{-8}$ с) (VI.2.1.5°) ширина ΔW энергетического уровня составляет:

$$\Delta W \sim \frac{\hbar}{\tau} \approx 10^{-1} \text{ эВ}$$

(естественная ширина энергетического уровня).

В кристалле валентные электроны атомов (VI.2.3.9°) слабее, чем внутренние электроны, связанные с ядрами, могут с помощью туннельного эффекта (VI.1.7.2°) переходить от одного атома к другому. Происходит просачивание электронов сквозь потенциальный барьер (VI.1.7.1°), разделяющий атомы в кристалле.

Оценим величину τ среднего времени жизни валентного электрона в данном атоме. Примем, что прозрачность барьера D выражается простейшей

формулой (VI.1.7.2°):

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} L\right),$$

где $U_0 - W$ — высота барьера, представляющая собой энергию ионизации, составляет приблизительно 10 эВ, а L — ширина барьера, соизмеряемая с периодом кристаллической решетки $L \approx d \approx 10^{-10}$ м. Частота ν просачивания электрона сквозь барьер

$$\nu = \frac{v}{d} D \approx \frac{v}{d} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} L\right),$$

где v — скорость движения электрона в атоме — потенциальной яме — можно принять равной $v \approx 10^8$ м/с. Среднее время τ жизни электрона в данном атоме

$$\tau = \frac{1}{\nu} \approx \frac{d}{v} \exp\left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} L\right).$$

Подставляя численные значения всех величин, получим $\tau \approx 10^{-15}$ с. Из соотношения неопределенностей получим

$$\Delta W \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx 1 \text{ эВ.}$$

Вместо естественной ширины $\Delta W \approx 10^{-7}$ эВ электронного энергетического уровня в изолированном атоме в кристалле возникает зона дозволённых значений энергий.

4°. Для внутренних электронов в атомах частота просачивания электрона сквозь потенциальный барьер и перехода его к другому атому ничтожно мала. Это связано с ростом высоты барьера:

$U_0 - W \approx 10^8$ эВ и возрастанием ширины барьера: $L \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м. Расчеты дают $\tau \sim 10^{20}$ лет. Уширение энергетических уровней внутренних электронов несущественно, и внутренние электроны атомов в кристаллах ведут себя практически так же, как в изолированных атомах.

5°. Если N есть общее число атомов твердого тела, то энергетическая зона, образовавшаяся из электронного энергетического уровня валентного электрона атома, состоит из N близко расположенных друг к другу уровней. Соседние энергетические уровни в зоне отстоят друг от друга приблизительно на 10^{-22} эВ.

Разрешенные энергетические зоны разделены областями — зонами запрещенных значений энергии электронов. Ширина запрещенных зон соизмерима с шириной разрешенных зон. С увеличением энергии ширина разрешенных энергетических зон возрастает, а ширина запрещенных зон убывает. Схема энергетических зон твердого тела изображена на рис. VII.2.12.

6°. Разрешенные энергетические зоны в твердом теле могут быть различным образом заполнены электронами. В предельных случаях они могут быть целиком

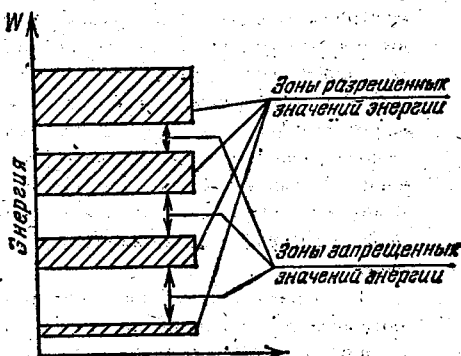


Рис. VII.2.12

заполнены или совершенно свободны (VII.2.9.1°). Электроны в твердых телах могут переходить из одной разрешенной зоны в другую. Для перехода электрона из нижней зоны в соседнюю верхнюю зону необходимо затратить энергию, равную ширине запрещенной зоны, расположенной между ними (энергию порядка нескольких эВ).

Для внутрizonных переходов электронов необходима весьма малая энергия. Например, для этого достаточно энергии ($10^{-4} \div 10^{-8}$) эВ, приобретаемой электроном в металле под действием электрического поля на длине свободного пробега при обычных разностях потенциалов. Для перевода электрона из одной зоны в другую этой энергии недостаточно. Под действием теплового возбуждения электроном может быть сообщена различная энергия, достаточная как для внутрizonных, так и для межзонных переходов.

§ VII.2.9. Металлы и диэлектрики в зонной теории

1°. Различия в электрических свойствах твердых тел объясняются в зонной теории (VII.2.8.2°) различным заполнением электронами разрешенных энергетических зон (VII.2.8.2°) и шириной запрещенных зон (VII.2.8.5°). Эти два фактора определяют отнесение данного твердого тела к проводникам электрического тока или к диэлектрикам. Необходимым условием возможности для того, чтобы твердое тело могло быть проводником, является наличие свободных энергетических уровней, на которые электрическое поле могло бы перевести электроны. Следует учитывать, что это поле может вызвать лишь внутрizonные переходы электронов (VII.2.8.6°).

2°. Типичными представителями проводников являются металлы первой группы периодической системы Менделеева (VI.2.3.5°), например, натрий. В изолированном атоме натрия имеются две заполненные электронные оболочки, содержащие соответственно 2 и 8 электронов (VI.2.3.4°). Одиннадцатый валентный электрон атома натрия по принципу Паули (VI.2.3.1°) заполняет лишь половину верхний энергетический уровень. В кристалле натрия первым двум заполненным оболочкам изолированных атомов соответствуют целиком заполненные электронами зоны энергии.

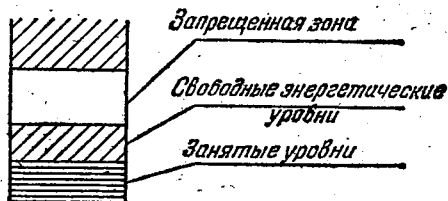


Рис. VII.2.13

Валентные электроны атомов натрия в кристалле заполняют половину уровни зоны разрешенных значений энергии (заштрихованы горизонтально на рис. VII.2.13). Эта зона называется *зоной проводимости*, потому что находящиеся в ней электроны участвуют в создании тока проводимости (III.7.1.2°). Под действием электрического поля, создаваемого в кристалле источником электрической энергии, валентные электроны увеличивают свою энергию и переходят на более высокие свободные энергетические уровни в зоне проводимости. При этом они приходят в упорядоченное движение и по кристаллу идет ток.

Таким образом, если зона не полностью занята валентными электронами, то твердое тело всегда является проводником электрического тока.

3°. В кристаллах возможна *гибридизация* разрешенных энергетических зон. Зона, возникающая при расщеплении верхнего возбужденного уровня, может перекрываться с зоной, возникшей за счет расщепления нижнего состояния валентных электронов. Это наблюдается у кристаллов элементов второй группы периодической системы Менделеева (Be, Cd, Mg, Zn). При этом образуется более широкая *гибридная зона*, в которой размещаются валентные электроны, заполняя ее лишь частично. Поэтому гибридная зона является зоной проводимости, а такие кристаллы — проводниками электрического тока.

4°. В твердых диэлектриках энергетические зоны не перекрываются, и зона, объединяющая энергетические уровни валентных электронов атомов или ионов, целиком заполнена электронами, а все выше расположенные зоны при $T=0$ К совершенно пусты. Зона, целиком заполненная электронами, называется *валентной зоной*. Пустые зоны являются зонами проводимости. Примером кристаллического диэлектрика является поваренная соль (NaCl). В молекуле NaCl осуществляется гетерополярная связь (VI.2.4.4°), приводящая к образованию ионов Na^+ и Cl^- с полностью застроенными электронными оболочками. В кристалле NaCl имеется валентная зона иона Cl^- , и все ниже лежащие зоны, целиком заполненные электронами, а лежащая выше верхняя зона иона Na^+ совершенно пуста. Зоны Cl^- и Na^+ раздвинуты на 6 эВ, и электрическое поле источника электрической энергии не может перевести электроны из целиком заполненной зоны Cl^- в свободную зону проводимости Na^+ . Этим объясняются диэлектрические свойства NaCl.

§ VII.2.10. Электропроводность полупроводников

1°. *Полупроводниками* называется большое число веществ, удельное сопротивление которых изменяется в широком интервале от 10^{-5} до 10^8 Ом·м и очень быстро, по экспоненциальному закону, уменьшается с повышением температуры (п. 2°). Типичными, наиболее широко применяемыми полупроводниками являются химические элементы германий, кремний и теллур. На внешней оболочке атомов германия и кремния находятся 4 валентных электрона, которые ковалентными связями (VI.2.4.5°) связаны с валентными электронами соседних атомов. В химически чистых кристаллах этих полупроводников отсутствуют «свободные» валентные электроны. С точки зрения зонной теории (VII.2.8.2°) кристаллические полупроводники относятся к типу твердых тел, у которых валентная зона (VII.2.9.4°) отделена от пустой зоны проводимости (при $T=0$ К) сравнительно узким интервалом энергии ΔW_0 (рис. VII.2.14), меньшим чем у диэлектрических кристаллов (VII.2.9.4°). У кремния $\Delta W_0=1,1$ эВ, у германия — 0,72 эВ.

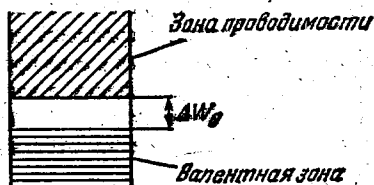


Рис. VII.2.14

2°. Электропроводность химически чистых полупроводников называется *собственной проводимостью*. *Электронная проводимость* (проводимость *n*-типа) возникает при перебросе электронов из валентной зоны в зону проводимости. Для этого нужно затратить энергию, не меньшую, чем ширина ΔW_0 запрещенной зоны (рис. VII.2.14). Величина ΔW_0 называется *энергией активации* собственной

проводимости. С повышением температуры полупроводника растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят из валентной зоны в зону проводимости и участвуют в электропроводности. Удельная электропроводность (III.7.3.4°) полупроводников возрастает с повышением температуры T по закону:

$$\gamma = \gamma_0 \exp \left(- \frac{\Delta W_0}{2kT} \right),$$

где k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°). Удельное сопротивление (III.7.3.4°) полупроводников резко уменьшается с повышением температуры по закону:

$$\rho = \rho_0 \exp \left(\frac{\Delta W_0}{2kT} \right).$$

Этим полупроводники существенно отличаются от металлов (III.7.3.7°).

3°. Перевод электрона из валентной зоны полупроводника в зону проводимости означает, что ковалентные связи (VI.2.4.5°) в атомах кристалла полупроводника нарушаются. Какой-либо из валентных электронов одного из атомов в решетке покидает свое место. В оставленном им месте возникает избыток положительного заряда — *положительная дырка*. С точки зрения волновой теории это означает, что в валентной зоне кристалла появляется вакантный энергетический уровень. Положительная дырка ведет себя как положительный заряд, равный по величине заряду электрона. На освобожденное электроном место (дырку) может переместиться другой электрон, а это равносильно перемещению положительной дырки — она появится в новом месте, откуда ушел электрон. Во внешнем электрическом поле электроны во всей массе полупроводника движутся в сторону, противоположную направлению напряженности электрического поля (III.2.1.2°). Положительные дырки перемещаются в направлении напряженности поля, т. е. в ту сторону, куда под действием электрического поля перемещался бы положительный заряд.

Электропроводность полупроводника, обусловленная перемещением дырок, называется *дырочной проводимостью* или *проводимостью p -типа*.

4°. Собственная проводимость полупроводника обусловлена двумя типами носителей тока: электронами в зоне проводимости и дырками в валентной зоне. Каждому электрону, перешедшему в зону проводимости, соответствует одна дырка в валентной зоне. Концентрации электронов n_e и дырок n_h одинаковы и быстро возрастают с повышением температуры T по закону:

$$n_e = n_h = \text{const} \exp \left(- \frac{\Delta W_0}{2kT} \right),$$

где ΔW_0 — энергия активации собственной проводимости (п. 2°), k — постоянная Больцмана (II.1.4.5°). Этим объясняется характер изменения удельной электропроводности и удельного сопротивления полупроводников (п. 2°) от температуры, резко отличающийся от зависимости этих величин у металлов (III.7.3.7°).

5°. Электропроводность полупроводников, обусловленная наличием в них примесных центров, называется *примесной проводимостью*.

Примесными центрами (примесями) являются: атомы или ионы посторонних элементов, различные дефекты и искажения в кристаллической решетке (пустые узлы, сдвиги, возникающие при деформациях кристалла, и т. п.).

Примеси изменяют периодическое электрическое поле в твердом теле и влияют на движение электронов и их энергетические состояния. Энергетические уровни

валентных электронов примесных атомов не располагаются в разрешенных энергетических зонах (VII.2.9.2°) основного кристалла, и возникают *примесные энергетические уровни (локальные уровни)*, расположенные в запрещенной зоне.

6°. Примеси могут быть дополнительными поставщиками электронов в твердом теле. Например, при замещении в решетке германия одного атома германия атомом примеси, обладающим пятью валентными электронами (фосфор, сурьма, мышьяк), один электрон атома примеси не может вступить в ковалентную связь (VI.2.4.5°) с атомами германия и оказывается «лишним». Энергетические уровни

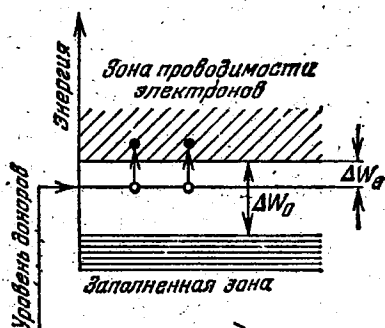


Рис. VII.2.15

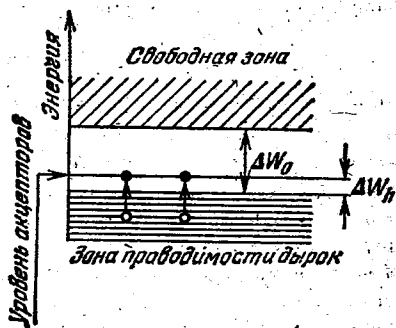


Рис. VII.2.16

таких электронов располагаются ниже зоны проводимости основного кристалла (рис. VII.2.15). Такие уровни, заполненные электронами, называются *донорными*, а атомы примесей, поставляющие «лишние» электроны, называются *атомами — донорами*. Чтобы перевести электроны с донорных уровней в зону проводимости, нужна незначительная энергия ΔW_e , получаемая, например, при тепловом возбуждении. Так, для кремния $\Delta W_e = 0,054$ эВ, если примесью является мышьяк. Если электроны перебрасываются с донорных уровней в зону проводимости, то в полупроводнике возникает *электронная примесная проводимость (примесная проводимость n-типа)*. Подобные полупроводники называются *электронными примесными* или *полупроводниками n-типа*.

7°. При замещении четырехвалентного атома в решетке полупроводника трехвалентным атомом примеси (бор, алюминий, индий) возникает недостаток одного электрона для образования насыщенных ковалентных связей. Недостающий электрон может быть заимствован в решетке у соседнего атома германия, у которого при этом появится положительная дырка (п. 3°). Последовательное заполнение электронами дырок, образующихся у атомов германия, эквивалентно движению дырок и приводит к проводимости полупроводника. Примесные энергетические уровни, не занятые электронами, называются *уровнями прилипания* или *акцепторными уровнями*. Атомы примесей в этом случае называются *атомами — акцепторами*. Акцепторные уровни располагаются выше верхнего края валентной зоны (VII.2.9.4°) основного кристалла (рис. VII.2.16). Так, в кристаллах кремния при введении бора акцепторные уровни лежат на $\Delta W_h = 0,08$ эВ выше валентной зоны. Перевод электронов из заполненной валентной зоны на акцепторные уровни приводит к появлению в этой зоне положительных дырок, и валентная зона становится зоной проводимости дырок. В полупроводнике возникает *дырочная*

примесная проводимость (примесная проводимость p -типа). Такие полупроводники называются *дырочными примесными* или *полупроводниками p -типа*.

8°. При введении в полупроводник одновременно донорных и акцепторных примесей характер проводимости (n - или p -тип) будет зависеть от того, какие примеси создают большую концентрацию носителей тока. Концентрация и энергия электронов (и дырок) в полупроводниках, в отличие от металлов, весьма сильно зависят от температуры, возрастая при ее повышении.

§ VII.2.11. Понятие о контактных электрических явлениях в металлах и полупроводниках

1°. *Работой выхода A* электрона из металла называется работа, которую нужно совершить при удалении электрона из металла в вакуум. Работа A совершается против сил притяжения со стороны избыточного положительного заряда, возникающего в металле в результате удаления электрона. Кроме того, необходимо преодолеть силы отталкивания со стороны ранее вылетевших электронов, если они не удалены и образуют вблизи поверхности проводника электронное «облако». Работа выхода имеет величину порядка нескольких эВ и зависит от рода металла и состояния его поверхности: загрязнения, следы влаги и пр. изменяют ее. В квантовой теории твердого тела работа выхода отсчитывается от верхнего занятого электронами уровня Ферми (VII.2.4.2°) (рис. VII.2.17).

2°. В результате вылета из металла наиболее быстро движущихся электронов образуется недостаток отрицательного заряда в металлическом проводнике и его избыток в окружающем пространстве. Проявляется это в очень тонком слое по обе стороны от поверхности проводника (толщиной в несколько межатомных расстояний в металле). Считается, что поверхность металла представляет собой *двойной электрический слой (контактный слой)*, подобный весьма тонкому конденсатору (III.5.3.4°).

3°. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ (III.3.2.4°), характеризующая электрическое поле двойного слоя, называется *поверхностным скачком потенциала* или *контактной разностью потенциалов* между металлом и вакуумом:

$$\Delta\varphi = \frac{A}{e},$$

где A — работа выхода (п. 1°), e — абсолютная величина заряда электрона.

Электрическое поле вне двойного слоя отсутствует, и потенциал вне металла за двойным слоем равен нулю. Внутри металла потенциал положителен и равен $\Delta\varphi$. Потенциальная энергия электронов проводимости (III.7.3.1°) отрицательна и равна $-e\Delta\varphi = -A$. Весь объем металла является для электронов проводимости потенциальной ямой (VI.1.4.1°), глубина которой равна работе выхода A .

4°. При контакте двух разнородных металлов 1 и 2 с работами выхода A_1 и A_2 происходит преимущественный переход электронов из металла с меньшей работой выхода в металл с большей работой выхода. Металлы заряжаются соответственно, и в состоянии термодинамического равновесия (II.1.3.3°) между двумя контактирующими разнородными металлами имеется разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$, называемая *внутренней контактной разностью потенциалов*.

Разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между двумя точками, находящимися вблизи от поверхности первого и второго контактирующих металлов вне их, называется *внешней контактной разностью потенциалов*.

При контакте двух металлов, изображенных на рис. VII.2.17 ($A_1 < A_2$), электроны будут переходить преимущественно в направлении от металла 1 к металлу 2

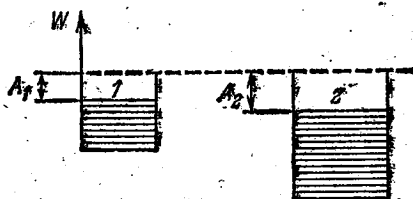


Рис. VII.2.17

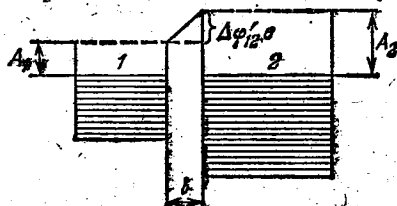


Рис. VII.2.18

и эти металлы зарядятся соответственно положительнo и отрицательно. Одновременно происходит смещение энергетических уровней электронов в металле 2 — вверх, в металле 1 — вниз. В состоянии термодинамического равновесия уровни Ферми (VII.2.4.2^o) в обоих металлах совпадают (рис. VII.2.18).

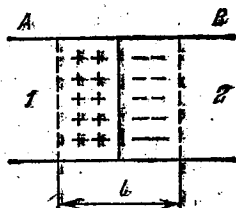


Рис. VII.2.19

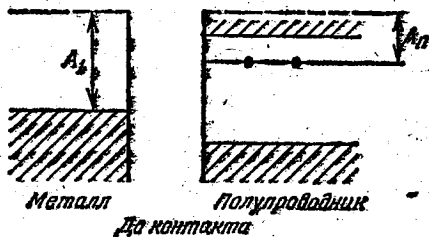


Рис. VII.2.20

Из рис. VII.2.18 видно, что внешняя контактная разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ зависит от работ выхода A_1 и A_2 :

$$\Delta\varphi_{12} = - \frac{A_1 - A_2}{e}$$

Внутренняя контактная разность потенциалов зависит от уровней Ферми в металлах:

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{F1} - W_{F2}}{e}$$

Изменение потенциала от φ_1 до φ_2 происходит на протяжении двойного электрического слоя (п. 2^o), имеющего толщину l (рис. VII.2.19), которая оценивается приближенно по формуле:

$$l = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \Delta\varphi_{12}}{en_0}} \quad (\text{в СИ})$$

Здесь n_0 — концентрация зарядов в двойном слое, ϵ_0 — электрическая постоянная (IX).

Толщина двойного слоя в контактирующих металлах имеет порядок междоуельных расстояний в металлах, и удельное сопротивление этого слоя не

отличается от удельного сопротивления остального объема металлов. Сквозь контактный слой двух металлов электрический ток проходит одинаково хорошо в обоих направлениях, и отсутствует *выпрямляющее (вентильное) действие контакта — односторонняя проводимость.*

5°. Контакт металла с полупроводником n -типа (VII.2.10.6°) приводит к односторонней проводимости контакта. Предположим, что $A_1 > A_n$, где A_1 и A_n — соответственно работы выхода электрона из металла

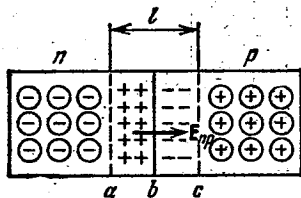


Рис. VII.2.21

и n -полупроводника. Расположение зоны проводимости металла (VII.2.9.2°), целиком заполненной до контакта показано на рис. VII.2.20. При контакте металла с полупроводником электроны с донорных уровней n -полупроводника (VII.2.10.6°) будут переходить в металл.

В контактном слое (п. 2°) со стороны n -полупроводника будет положительный заряд, а со стороны металла — отрицательный. В связи с малой концентрацией электронов в полупроводнике по сравнению с металлом (10^{15} см $^{-3}$ вместо 10^{22} см $^{-3}$) толщина контактного слоя на границе металл — полупроводник оказывается приблизительно в 10^4 раз больше, чем в металле.

6°. Малое число носителей тока в контактном слое полупроводника и большая толщина слоя означают, что удельное сопротивление этого слоя значительно больше, чем в остальном объеме полупроводника. Контактный слой называется в этом случае *запирающим слоем* и является основой выпрямляющего (вентильного) действия контакта металла с полупроводником на переменный ток. Если металл соединен с положительным полюсом источника электрической энергии, а полупроводник — с отрицательным, то внешнее электрическое поле направлено от металла к полупроводнику. В этом случае электроны втягиваются из объема полупроводника в двойной слой, толщина которого уменьшается и проводимость возрастает. В этом *пропускном направлении* электрический ток проходит через контакт металла с полупроводником. Если же внешнее электрическое поле направлено от полупроводника к металлу, то электроны вытесняются из двойного слоя в глубь полупроводника. Толщина запирающего слоя и его сопротивление увеличиваются, и в этом *запирающем направлении* контакт металла с полупроводником не пропускает электрического тока. Односторонняя проводимость контакта означает, что при прохождении через контакт переменного тока он выпрямляется.

7°. Область соприкосновения двух полупроводников с различными n - и p -типами проводимости называется *электронно-дырочным переходом* (n - p -переходом). Соприкосновение двух таких полупроводников в результате перемещения электронов и дырок через поверхность раздела приводит к образованию двойного электрического слоя (п. 2°). Электроны из n -полупроводника переходят в p -полупроводник, а дырки перемещаются в противоположном направлении. В ab -областях n -полупроводника и bc -областях p -полупроводника образуются избыточные заряды противоположных знаков (рис. VII.2.21). Двойной слой толщиной l создает контактное электрическое поле с напряженностью E_{nl} и некоторой разностью потенциалов на границах слоя. Это поле препятствует дальнейшему встречному движению электронов и дырок. При определенной толщине n - p -перехода насту-

пает состояние равновесия, соответствующее выравниванию уровней Ферми в обоих полупроводниках, и образуется *равновесный контактный слой*, являющийся запирающим слоем (п. 6°), обладающим повышенным сопротивлением по сравнению с сопротивлением остальных объемов полупроводников.

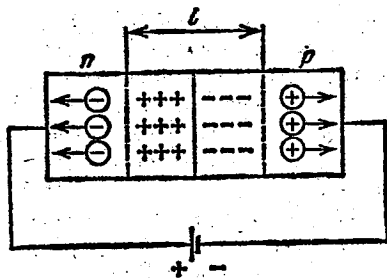


Рис. VII.2.22

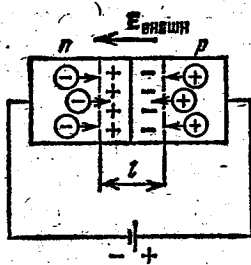


Рис. VII.2.23

8°. При включении контактирующих *n*- и *p*-полупроводников во внешнюю цепь источника электрической энергии так, как показано на рис. VII.2.22, внешнее электрическое поле, усиливая поле контактного слоя, вызовет движение электронов в *n*-полупроводнике и дырок в *p*-полупроводнике в противоположные стороны от контакта. Толщина запирающего слоя и его сопротивление будут возрастать. Такое направление внешнего электрического поля называется *запирающим*. В этом направлении ток через *p*—*n*-переход практически не проходит. При изменении полярности внешнего приложенного напряжения (рис. VII.2.23) внешнее электрическое поле с напряженностью $E_{\text{внешн}}$ направлено противоположно полю контактного слоя (п. 7°). Встречное движение электронов и дырок, перемещающихся под действием внешнего поля из глубины полупроводников к области *p*—*n*-перехода, увеличивает число подвижных носителей тока на контакте. Толщина и сопротивление контактного слоя при этом уменьшаются, и в таком *пропускном* направлении электрический ток проходит через *p*—*n*-переход. Вентильное действие *p*—*n*-перехода аналогично выпрямляющему действию двухэлектродной лампы — диода, и полупроводниковое устройство, содержащее один *p*—*n*-переход, называется *полупроводниковым диодом*. *Кристаллические триоды* или *транзисторы* содержат два *p*—*n*-перехода.

ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ *)

Глава VIII.1. СТРОЕНИЕ И ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА АТОМНЫХ ЯДЕР

§ VIII.1.1. Основные свойства и строение ядра

1°. Ядром называется центральная часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный электрический заряд. Все атомные ядра состоят из элементарных частиц (VIII.2.1.1°): протонов и нейтронов, которые считаются двумя зарядовыми состояниями одной частицы — нуклона. Протон имеет положительный электрический заряд, равный по абсолютной величине заряду электрона (IX). Нейтрон не имеет электрического заряда.

2°. Зарядом ядра называется величина Ze , где e — величина заряда протона, Z — порядковый номер химического элемента в периодической системе Менделеева (VI.2.3.5), равный числу протонов в ядре. В настоящее время известны ядра с Z от $Z=1$ до $Z=107$. Для всех ядер кроме ${}^1_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$ и некоторых других нейтронодефицитных ядер $N \geq Z$, где N — число нейтронов в ядре. Для легких ядер $N/Z \approx 1$; для ядер химических элементов, расположенных в конце периодической системы, $N/Z \approx 1,6$.

3°. Число нуклонов (A) в ядре $A = N + Z$ называется массовым числом. Нуклонам (протону и нейтрону) приписывается массовое число, равное единице, электрону — нулевое значение A .

Ядра с одинаковыми Z , но различными A называются *изотопами*. Ядра, которые при одинаковом A имеют различные Z , называются *изобарами*. Ядро химического элемента X обозначается A_ZX , где X — символ химического элемента.

Всего известно около 300 устойчивых изотопов химических элементов и более 2000 естественных и искусственно полученных радиоактивных изотопов.

4°. Размер ядра характеризуется *радиусом ядра*, имеющим условный смысл ввиду размытости границы ядра. Эмпирическая формула для радиуса ядра $R = R_0 A^{1/3}$, где $R_0 = (1,3 \pm 1,7) 10^{-15}$ м, может быть истолкована как пропорциональность объема ядра числу нуклонов в нем.

Плотность ядерного вещества составляет по порядку величины 10^{17} кг/м³ и постоянна для всех ядер. Она значительно превосходит плотности самых плотных обычных веществ.

5°. Нуклоны в атомных ядрах являются фермионами (VII.2.2.4°) и имеют спин $\hbar/2$. Ядро атома имеет собственный момент импульса — *спин ядра*, равный $L_{\text{яд}} = \sqrt{I(I+1)} \hbar$, где I — внутреннее (полное) спиновое квантовое число (ср. III.13.1.3°), $\hbar = h/2\pi$, h — постоянная Планка (IX).

*) В этом отделе справочника помещены краткие сведения о физике ядра и элементарных частицах, которыми ограничивается программа курса физики в высших технических учебных заведениях.

Число l принимает целочисленные или полуцелые значения 0, $1/2$, 1, $3/2$, 2 и т. д. Ядра с четными A имеют целочисленный спин (в единицах \hbar) и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна (VII.2.2.1°). Ядра с нечетными A имеют полуцелый спин (в единицах \hbar) и подчиняются статистике Ферми — Дирака (VII.2.2.4°).

6°. Ядерные частицы имеют собственные магнитные моменты, которыми определяется магнитный момент ядра $\mu_{\text{яд}}$ в целом. Единицей измерения магнитных моментов ядер служит ядерный магнетон $\mu_{\text{яд}}$:

$$\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2m_p} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} \quad (\text{в СГС}).$$

Здесь e — абсолютная величина заряда электрона, m_p — масса протона, c — электродинамическая постоянная (IX). Ядерный магнетон в $\frac{m_p}{m_e} = 1836,5$ раз меньше магнетона Бора (III.12.1.4°), откуда следует, что магнитные свойства атомов определяются магнитными свойствами его электронов.

Между спином ядра $L_{\text{яд}}$ и его магнитным моментом имеется соотношение

$$P_{\text{маг}} = g_{\text{яд}} L_{\text{яд}},$$

где $g_{\text{яд}}$ — ядерное гиромагнитное отношение (ср. III.12.1.4°). Нейтрон имеет отрицательный магнитный момент, равный $-(1,91814 \pm 0,00005) \mu_{\text{яд}}$. Направления спина нейтрона и его магнитного момента противоположны. Магнитный момент протона положителен и равен $(2,79277 \pm 0,00003) \mu_{\text{яд}}$. Его направление совпадает с направлением спина протона.

7°. Распределение электрического заряда протонов по ядру в общем случае несимметрично. Мерой отклонения этого распределения от сферически симметричного является квадрупольный электрический момент ядра Q . Если плотность заряда считается везде одинаковой, то Q определяется только формой ядра. Так, для эллипсоида вращения

$$Q = \frac{2}{5} Ze (b^2 - a^2),$$

где b — полюсь эллипсоида вдоль направления спина, a — полюсь в перпендикулярном направлении. Для ядра, вытянутого вдоль направления спина, $b > a$ и $Q > 0$. Для ядра, сплюсненного в этом направлении, $b < a$ и $Q < 0$. Для сферического распределения заряда в ядре $b = a$ и $Q = 0$. Это справедливо для ядер со спином, равным 0 или $\hbar/2$.

§ VIII.1.2. Энергия связи ядер. Дефект массы

1°. Нуклоны в ядрах находятся в состояниях, существенно отличающихся от их свободных состояний. За исключением ядра обычного водорода во всех ядрах имеется не менее двух нуклонов, между которыми существует особое ядерное сильное взаимодействие — притяжение — обеспечивающее устойчивость ядер несмотря на отталкивание одинаково заряженных протонов.

2°. Энергией связи нуклона в ядре называется физическая величина, равная той работе, которую нужно совершить для удаления нуклона из ядра без сообщения ему кинетической энергии.

Энергия связи ядра определяется величиной той работы, которую нужно совершить, чтобы расщепить ядро на составляющие его нуклоны без придания им кинетической энергии. Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра должна выделяться такая же энергия, какую нужно затратить при расщеплении ядра на составляющие его нуклоны. Энергия связи ядра является разностью между энергией всех свободных нуклонов, составляющих ядро, и их энергией в ядре.

3°. При образовании ядра происходит уменьшение его массы: масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов. Уменьшение массы ядра при его образовании объясняется выделением энергии связи. Если $W_{св}$ — величина энергии, выделяющейся при образовании ядра, то соответствующая ей масса Δm , равная (1.5.7.6°)

$$\Delta m = \frac{W_{св}}{c^2},$$

называется *дефектом массы* и характеризует уменьшение суммарной массы при образовании ядра из составляющих его нуклонов. Если ядро с массой $M_{яд}$ образовано из Z протонов с массой m_p и из $(A-Z)$ нейтронов с массой m_n , то

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - M_{яд}.$$

Вместо массы ядра $M_{яд}$ величину Δm можно выразить через атомную массу $M_{ат}$:

$$\Delta m = Zm_H + (A-Z)m_n - M_{ат},$$

где m_H — масса водородного атома.

При практическом вычислении Δm массы всех частиц и атомов выражаются в атомных единицах массы (IX).

Дефект массы служит мерой энергии связи ядра:

$$W_{св} = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A-Z)m_n - M_{яд}]c^2.$$

Одной атомной единице массы соответствует *атомная единица энергии* (а.е.э.):
1 а.е.э. = 931,5016 МэВ.

4°. *Удельной энергией связи ядра* $w_{св}$ называется энергия связи, приходящаяся на один нуклон: $w_{св} = \frac{W_{св}}{A}$. Величина $w_{св}$ составляет в среднем 8 МэВ/нуклон. На рис. VIII.1.1 приведена кривая зависимости удельной энергии связи от массового числа A , характеризующая различную прочность связей нуклонов в ядрах разных химических элементов. Ядра элементов в средней части периодической системы (VI.2.3.5°) ($28 < A < 138$), т.е. от ${}_{14}^{28}\text{Si}$ до ${}_{56}^{138}\text{Ba}$, наиболее прочны. В этих ядрах $w_{св}$ близка к $8,7 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$. По мере увеличения числа нуклонов в ядре удельная энергия связи убывает. Ядра атомов химических элементов, расположенных в конце периодической системы (например, ядро урана), имеют $w_{св} \approx 7,6 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$. Это объясняет возможность выделения энергии при делении тяжелых ядер (VIII.1.9.10°). В области малых массовых чисел имеются острые «пики» удельной энергии связи. Максимумы характерны для ядер с четными числами протонов и нейтронов (${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$). Минимумы — для ядер с нечетными количествами протонов и нейтронов (${}^3_3\text{Li}$, ${}^5_3\text{B}$, ${}^7_3\text{N}$).

Если ядро имеет наименьшую возможную энергию $W_{\text{мин}} = -W_{\text{св}}$, то оно находится в *основном энергетическом состоянии*. Если ядро имеет энергию $W > W_{\text{мин}}$, то оно находится в *возбужденном энергетическом состоянии*. Случай $W=0$ соответствует расщеплению ядра на составляющие его нуклоны. В отличие от энергетических уровней атома, раздвинутых на единицы электронвольт (см. рис. VI.2.1,

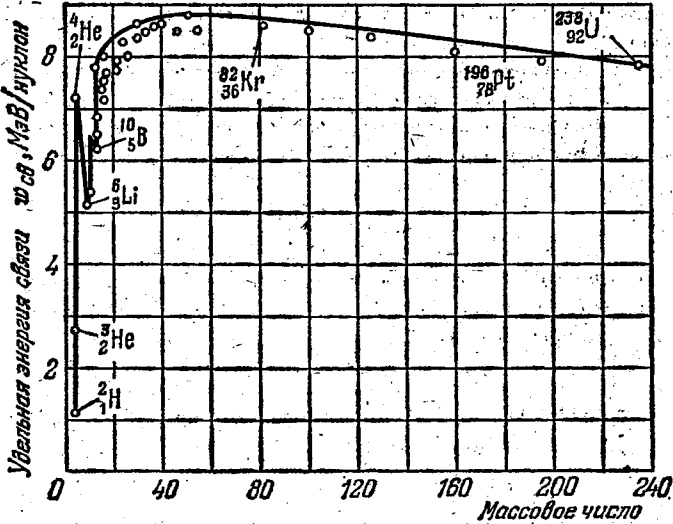


Рис. VIII.1.1

левая шкала), энергетические уровни ядра отстоят друг от друга на мегаэлектронвольты (МэВ). Этим объясняется происхождение и свойства гамма-излучения (VIII.1.7.1°).

б°. Данные об энергии связи ядер и использование капельной модели ядра *) позволили установить некоторые закономерности строения ядер.

Критерием устойчивости атомных ядер является соотношение между числом протонов и нейтронов в устойчивом ядре для данных изобаров (VIII.1.1.3°) ($A = \text{const}$). Условие минимума энергии ядра приводит к соотношению между $Z_{\text{уст}}$ и A :

$$Z_{\text{уст}} = \frac{A}{1,98 + 0,015A^{2/3}}$$

Берется целое число $Z_{\text{уст}}$, ближайшее к тому, которое получается по этой формуле.

При малых и средних значениях A числа нейтронов и протонов в устойчивых ядрах примерно одинаковы: $Z \approx A - Z$.

С ростом Z силы кулоновского отталкивания протонов растут пропорционально $Z(Z-1) \sim Z^2$ (парное взаимодействие протонов), и для компенсации этого отталкивания ядерным притяжением число нейтронов должно возрастать быстрее числа протонов.

*) Капельная модель ядра не рассматривается в данном справочнике.

§ VIII.1.3. Ядерные силы

1°. Ядерное взаимодействие свидетельствует о том, что в ядрах существуют особые *ядерные силы*, не сводящиеся ни к одному из типов сил, известных в классической физике (гравитационных и электромагнитных).

2°. Ядерные силы являются короткодействующими силами. Они проявляются лишь на весьма малых расстояниях между нуклонами в ядре порядка 10^{-15} м. Длина $(1,5 + 2,2) \cdot 10^{-15}$ м называется *радиусом действия ядерных сил*.

3°. Ядерные силы обнаруживают *зарядовую независимость*: притяжение между двумя нуклонами одинаково независимо от зарядового состояния нуклонов — протонного или нейтронного (VIII.1.1.1°). Зарядовая независимость ядерных сил видна из сравнения энергий связи в *зеркальных ядрах*. Так называются ядра, в которых одинаково общее число нуклонов, но число протонов в одном равно числу нейтронов в другом. Например, ядра гелия ${}^3_2\text{He}$ и тяжелого водорода — трития ${}^3_1\text{T}$. Энергии связи (VIII.1.2.4°) в этих ядрах составляют 7,72 МэВ и 8,49 МэВ.

Разность энергий связи ядер, равная 0,77 МэВ, соответствует энергии кулоновского отталкивания двух протонов в ядре ${}^3_2\text{He}$. Полагая эту величину равной

$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ (III.3.2.2°), можно найти, что среднее расстояние r между протонами в ядре ${}^3_2\text{He}$ равно $1,9 \cdot 10^{-15}$ м, что согласуется с величиной радиуса ядерных сил (п. 2°).

4°. Ядерные силы обладают свойством насыщения, которое проявляется в том, что нуклон в ядре взаимодействует лишь с ограниченным числом ближайших к нему соседних нуклонов. Именно поэтому наблюдается линейная зависимость энергий связи ядер от их массовых чисел A (VIII.1.1.3°). Если бы каждый нуклон взаимодействовал одновременно со всеми $(A-1)$ нуклонами ядра, то энергия связи ядра была бы пропорциональна возможному числу взаимодействующих пар нуклонов в ядре, т. е. числу сочетаний из A по два: $\frac{A(A-1)}{2}$ *). Зависимость энергии

связи от A была бы в этом случае не линейной, а квадратичной, что противоречит экспериментальным данным. Практически полное насыщение ядерных сил достигается у α -частицы (VIII.1.4.2°), которая является очень устойчивым образованием.

5°. Ядерные силы зависят от ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. Это подтверждается различным характером рассеяния нейтронов молекулами орто- и параводорода. В молекуле ортоводорода спины обоих протонов параллельны друг другу, а в молекуле параводорода они антипараллельны. Если бы взаимодействие нейтрона с протоном не зависело от взаимной ориентации их спинов, то рассеяние нейтронов на молекулах орто- и параводорода происходило бы одинаково. опыты показали, что рассеяние нейтронов на параводороде в 30 раз превышает рассеяние на ортоводороде. Это доказывает зависимость ядерных сил от ориентации спинов взаимодействующих нуклонов.

Ядерные силы не являются центральными силами (I.3.3.4°).

*) В предположении, что ядерное взаимодействие является парным.

§ VIII.1.4. Радиоактивность

1°. *Радиоактивностью* называется превращение неустойчивых изотопов (VIII.1.1.3°) одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием некоторых частиц.

Естественной радиоактивностью называется радиоактивность, наблюдающаяся у существующих в природе неустойчивых изотопов.

Искусственной радиоактивностью называется радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций (VIII.1.9.1°).

2°. В таблице VIII.1.1 приведены основные типы радиоактивности.

Таблица VIII.1.1

Тип радиоактивности	Изменение заряда ядра Z	Изменение массового числа A	Характер процесса
Альфа-распад	$Z-2$	$A-4$	Вылет α -частицы — системы двух протонов и двух нейтронов, соединенных воедино
Бета-распад	$Z \pm 1$	A	Взаимные превращения в ядре нейтрона (1_0n) и протона (1_1p)
β_- -распад	$Z+1$	A	${}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + (-{}^0_{-1}e + {}^0_0\nu_e)$
β_+ -распад	$Z-1$	A	${}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + ({}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e)$
Электронный захват (e^- или K -захват)	$Z-1$	A	${}^1_1p + {}^0_{-1}e \rightarrow {}^1_0n + ({}^0_0\nu_e)$, ${}^0_0\nu_e$ и ${}^0_{-1}e$ — электронные нейтрино и антинейтрино. В скобках указаны частицы, вылетающие из ядра
Спонтанное деление	$Z-(1/2)Z$	$A-(1/2)A$	Деление ядра обычно на два осколка, имеющие приблизительно равные массы и заряды

3°. Обычно все типы радиоактивности сопровождаются испусканием гамма-лучей — жесткого, коротковолнового электромагнитного излучения. Гамма-лучи являются основной формой уменьшения энергии возбужденных продуктов радиоактивных превращений. Ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется *материнским*; возникающее *дочернее* ядро, как правило, оказывается возбужденным, и его переход в основное состояние сопровождается испусканием γ -фотона.

4°. Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется *закону радиоактивного распада*:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 — количество ядер в данном объеме вещества в начальный момент времени $t=0$, N — число ядер в том же объеме к моменту времени t , λ — *постоянная распада*, имеющая смысл вероятности распада ядра за 1 секунду и равная доле ядер, распадающихся за единицу времени.

Закон самопроизвольного радиоактивного распада основывается на двух предположениях: 1) постоянная распада не зависит от внешних условий; 2) число ядер, распадающихся за время dt , пропорционально наличному количеству ядер. Эти предположения означают, что радиоактивный распад является статистическим процессом и распад данного ядра является случайным событием, имеющим определенную вероятность.

Величина $1/\lambda$ является *средней продолжительностью жизни (среднее время жизни)* радиоактивного изотопа. Действительно, суммарная продолжительность жизни dN ядер равна $t |dN| = \lambda N dt$. Средняя продолжительность τ жизни всех первоначально существовавших ядер

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N t dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

б°. Характеристикой устойчивости ядер относительно распада является *период полураспада $T_{1/2}$* . Так называется время, в течение которого первоначальное количество ядер данного радиоактивного вещества распадается наполовину. Связь λ и $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693\tau.$$

в°. Естественная радиоактивность (п. 1°) наблюдается у ядер атомов химических элементов, расположенных за свинцом в периодическом законе Менделеева (VI.2.3.5°). Естественная радиоактивность легких и средних ядер наблюдается лишь у ядер $^{40}_{19}\text{K}$, $^{87}_{37}\text{Rb}$, $^{115}_{49}\text{In}$, $^{138}_{57}\text{La}$, $^{147}_{63}\text{Sm}$, $^{176}_{71}\text{Lu}$, $^{187}_{75}\text{Re}$.

Закон сохранения электрических зарядов (III.1.1.3°) при радиоактивном распаде ядер:

$$Z_{\text{яд}} e = \sum_i Z_i e,$$

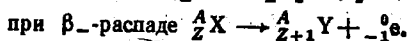
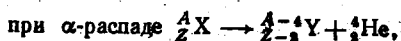
где $Z_{\text{яд}} e$ — заряд материнского ядра (п. 3°), $Z_i e$ — заряды ядер и частиц, возникших в результате радиоактивного распада. Этот закон применяется также при исследовании всех ядерных реакций (VIII.1.9.1°).

Правило сохранения массовых чисел (VIII.1.1.3°) при явлениях естественной радиоактивности:

$$A_{\text{яд}} = \sum_i A_i,$$

где $A_{\text{яд}}$ — массовое число материнского ядра, A_i — массовое число ядра или частиц, получившихся в результате радиоактивного распада.

г°. *Правила смещения (правила Фаянса и Содди)* при радиоактивных α - и β -распадах:



Здесь $\frac{A}{Z}X$ — материнское ядро, Y — символ дочернего ядра, $\frac{4}{2}\text{He}$ — ядро гелия, $\frac{0}{-1}e$ — символическое обозначение электрона, для которого $A=0$ и $Z=-1$.

Если дочернее ядро оказывается также радиоактивным, то возникает цепочка радиоактивных превращений. Естественно-радиоактивные ядра образуют *три*

радиоактивных семейства, называемых семейством урана ($^{238}_{92}\text{U}$), семейством тория ($^{232}_{90}\text{Th}$) и семейством актиния ($^{235}_{89}\text{Ac}$). Свои названия они получили по «родоначальнику» — долгоживущему изотопу с наибольшим периодом полураспада (п. 5°). Все семейства после цепочки α - и β -распадов заканчиваются на устойчивых ядрах изотопов свинца — $^{206}_{82}\text{Pb}$, $^{207}_{82}\text{Pb}$ и $^{208}_{82}\text{Pb}$. Семейство нептуния, начинающееся от трансуранового элемента нептуния $^{237}_{93}\text{Np}$, получено искусственным путем и заканчивается на $^{209}_{83}\text{Bi}$.

8°. Если происходит цепочка радиоактивных распадов и за время dt из общего числа N_m материнских ядер распадается $\lambda_m N_m dt$ ядер, а за это же время распадается $\lambda_d N_d dt$ дочерних ядер, то общее изменение dN_d числа ядер дочернего вещества за единицу времени выразится следующим образом:

$$\frac{dN_d}{dt} = \lambda_m N_m - \lambda_d N_d.$$

В случае подвижного равновесия между материнским и дочерним веществами $dN_d/dt = 0$ и выполняется условие радиоактивного равновесия:

$$\lambda_m N_m = \lambda_d N_d.$$

откуда

$$\frac{N_m}{N_d} = \frac{\lambda_d}{\lambda_m} = \frac{T_m}{T_d},$$

где T_m и T_d — периоды полураспадов (п. 5°) материнского и дочернего ядер. Произведение $A = \lambda N$ называется *активностью* данного радиоактивного вещества и представляет собой число распадов за единицу времени. Активность, отнесенная к единице массы вещества, называется *удельной активностью*. Активность измеряется числом распадов ядер радиоактивного вещества в единицу времени (с^{-1}). Единица активности называется беккерель (Бк).

§ VIII.1.5. Альфа-радиоактивный распад

1°. *Альфа-распадом* называется испускание ядрами некоторых химических элементов α -частиц. Альфа-распад (п. 2°) является свойством тяжелых ядер с массовыми числами $A > 200$ и зарядами ядер $Ze > 82$. Внутри таких ядер происходит образование обособленных α -частиц, состоящих каждая из двух протонов и двух нейтронов. Этому способствует насыщение ядерных сил (VIII.1.3.4°). Образовавшаяся α -частица подвержена большему действию кулоновских сил отталкивания от протонов ядра, чем изолированные протоны. Одновременно α -частица испытывает меньшее ядерное притяжение к нуклонам в ядре, чем отдельные нуклоны.

2°. Ядро является для α -частицы потенциальным барьером (VI.1.7.1°), высота U которого больше, чем W — энергия α -частицы в ядре. Альфа-распад происходит путем просачивания α -частицы сквозь потенциальный барьер с помощью туннельного эффекта (VI.1.7.2°). Формула прозрачности D потенциального барьера показывает, что незначительные изменения энергии α -частицы в ядре приводят к сильному изменению величины

$$\exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_\alpha [U(x) - W]} dx \right\}.$$

Этим объясняются большие различия в периодах полураспадов α -излучателей — от 10^9 лет до 10^{-2} с — при сравнительно небольшом возрастании энергии α -частиц от 4 до 9 МэВ.

3°. Постоянная распада λ (VIII.1.4.4°) связана с прозрачностью D потенциального барьера для α -частицы. Для упрощенной модели прямоугольного потенциального барьера длины L (VI.1.7.2°)

$$\lambda = Dn,$$

где n — число ударов α -частицы о стенку барьера за единицу времени, равное $n = v/2L$; $v = \sqrt{2W/m_\alpha}$ — скорость α -частицы в ядре. Величина L обычно принимается равной радиусу R ядра ($2R$ — ширина потенциального барьера).

Упрощенная формула для постоянной α -радиоактивного распада:

$$\lambda = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2W}{m_\alpha}} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha(U_0 - W)} R\right).$$

4°. Закон Гейгера — Нэттола: чем больше постоянная распада λ радиоактивного элемента, тем больше пробег R_α испускаемых им α -частиц в воздухе:

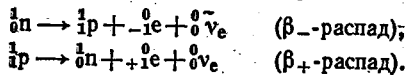
$$\ln \lambda = A + B \ln R_\alpha,$$

где A и B — эмпирические постоянные, имеющие различные значения для каждого из радиоактивных семейств (VIII.1.4.7°).

5°. С помощью сведений, приведенных в пп. 3° и 4°, экспериментально доказано, что у одного и того же α -радиоактивного элемента имеется несколько групп α -частиц с различными длинами пробегов. Внутри каждой группы наблюдается постоянство пробегов. Отсюда следует, что выбрасываемые из ядер α -частицы обладают определенным энергетическим спектром и, следовательно, атомные ядра обладают дискретными энергетическими уровнями.

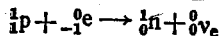
§ VIII.1.6. Бета-распад

1°. Термином бета-распад обозначают три типа ядерных превращений: *электронный* (β_-) и *позитронный* (β_+) распады, а также *электронный захват* (ϵ - или K -захват). Первые два типа превращений состоят в том, что ядро испускает электрон (позитрон) и электронное антинейтрино (электронное нейтрино). Эти процессы происходят путем превращения одного вида нуклона в ядре в другой: нейтрона в протон или протона в нейтрон. Превращения происходят по схеме:



Здесь ${}^1_0\text{n}$ и ${}^1_1\text{p}$ — символические обозначения нейтрона и протона, ${}^0_{-1}\text{e}$ и ${}^0_{+1}\text{e}$ — обозначения электрона и позитрона, ${}^0_0\nu_e$ и ${}^0_0\bar{\nu}_e$ — электронные нейтрино и антинейтрино (VIII.1.4.2°).

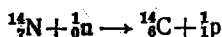
В случае ϵ -захвата превращение протона в нейтрон происходит по схеме



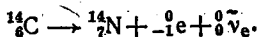
и заключается в том, что исчезает один из электронов на ближайшей к ядру K -оболочке атома. Протон, превращаясь в нейтрон, как бы «захватывает» электрон; отсюда произошел термин «электронный захват» (или « ϵ -захват»). Особенностью

этого типа бета-распада является вылет из ядра только одной частицы ${}^0_0\nu_e$. Примером ϵ -захвата является превращение радиоактивного ядра бериллия ${}^7_4\text{Be}$ в устойчивое ядро лития ${}^7_3\text{Li}$. Электронный захват в отличие от β_{\pm} -распада сопровождается характеристическим рентгеновским излучением, принадлежащим K -линии соответствующего элемента (VI.2.5B.9°).

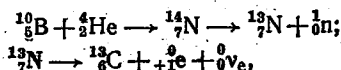
2°. β_- -распад происходит у естественно-радиоактивных, а также искусственно-радиоактивных ядер; β_+ -распад характерен только для явления искусственной радиоактивности — возникновения собственных радиоактивных излучений ядер под действием α -частиц, нейтронов и других частиц. При этом нарушается условие устойчивости атомного ядра (VIII.1.2.5°). Например, искусственно-радиоактивный изотоп углерода ${}^{14}_6\text{C}$ возникает из стабильного ядра азота под действием нейтронов с выделением протонов:



и, испытывая бета-распад, вновь превращается в устойчивый изотоп ${}^{14}_7\text{N}$:

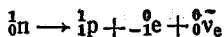


Нарушение условия устойчивости (VIII.1.2.5°) введением в ядро избыточных протонов приводит к искусственному β_+ -распаду. Это видно из следующего примера:



где ${}^+1_0\text{e}$ — позитрон, ${}^0_0\nu_e$ — электронное нейтрино.

3°. Естественный β_- -распад происходит так, что нейтрон ${}^1_0\text{n}$ самопроизвольно превращается в протон. Энергия покоя (1.5.7.3°) нейтрона превышает энергию покоя атома водорода (т. е. протона и электрона вместе взятых) на 782 кэВ. Поэтому превращение типа (п. 1°)



энергетически возможно и вне ядра. В потоках нейтронов большой интенсивности, возникающих в ядерных реакторах, обнаружен *радиоактивный распад свободных нейтронов*, происходящий с периодом полураспада (VIII.1.4.5°) (898 ± 16) с. В тяжелых ядрах, перегруженных нейтронами, такое превращение приводит к β_- -естественной радиоактивности.

Превращение типа (п. 1°) ${}^1_0\text{n} \rightarrow {}^1_1\text{p} + {}^+1_0\text{e} + {}^0_0\nu_e$ возможно только в ядрах, где необходимая для этого энергия заимствуется у соседних частиц. Это превращение приводит к искусственному β_+ -распаду.

4°. Полупериоды бета-распадов (VIII.1.4.5°) изменяются для различных источников β_{\pm} -радиоактивного излучения в широком интервале времен от 10^{-2} с до 10^{18} лет, несоизмеримо больших по сравнению с ядерным временем ($10^{-23} \div 10^{-22}$) с (VIII.2.2.8°). Это указывает на то, что бета-распад обуславливается слабым взаимодействием (VIII.2.2.6°).

5°. Решающим экспериментальным фактом для понимания механизма β_- -распада и создания его теории стало изучение энергетического спектра испускаемых электронов. Этот спектр оказался непрерывным, простирающимся до $W = W_{\text{макс}}$ (рис. VIII.1.2). Энергия $W_{\text{макс}}$ называется *верхней границей энергии*

β_- -спектра и является характеристикой источника β_- -радиоактивного излучения. Для данного источника невозможны энергии электронов, превышающие W_{\max} .

6°. Для того чтобы согласовать непрерывность спектра энергии электронов с дискретностью энергетических уровней ядер (VIII.1.5.5°), необходимо считать, что

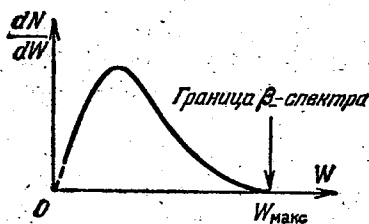


Рис. VIII.1.2

вместе с электроном ${}^0_{-1}e$ из ядра испускается еще одна частица — электронное антинейтрино *) ${}^0_{-1}\bar{\nu}_e$. Полная энергия, теряемая ядром при β_- -распаде, равна W_{\max} , но она различным образом распределяется между электроном и электронным антинейтрино **). В частности, граничная точка на кривой рис. VIII.1.2 означает, что вся энергия β_- -распада уносится электроном. Нулевое значение энергии электрона на кривой соответствовало бы тому, что вся энергия уносится антинейтрино ${}^0_{-1}\bar{\nu}_e$.

Для β_- -радиоактивности свободных нейтронов $W_{\max} = 782$ кэВ, что полностью соответствует изложенному в п. 3°. При бета-распаде не изменяется массовое число A и спин ядра (VIII.1.1.5°).

§ VIII.1.7. Гамма-излучение

1°. Гамма-излучением (гамма-лучами) называется жесткое электромагнитное излучение, энергия которого испускается при переходах ядер из возбужденных энергетических состояний в основное или менее возбужденные состояния (VIII.1.5.5°), а также при ядерных реакциях. В первом случае, согласно правилу частот Бора (VI.2.1.6°), энергия фотона гамма-излучения равна разности энергий конечного и начального энергетических уровней ядра:

$$h\nu_{ik} = W_i - W_k = \Delta W_{ik},$$

где ν_{ik} — частота фотона, соответствующего переходу ядра из состояния с энергией W_i в состояние с энергией W_k . Величина ΔW_{ik} имеет порядок 0,1 МэВ и значительно превышает разность энергий электронных уровней в атоме (VI.2.1.5°). Гамма-лучи являются весьма коротковолновым электромагнитным излучением с длиной волны, не превышающей 10^{-2} нм, т. е. $0,1 \text{ \AA}$. Дискретный линейчатый спектр γ -лучей является подтверждением вышесказанного (см. п. 4°).

2°. Гамма-излучение не является самостоятельным типом радиоактивности (VIII.1.4.2°). Оно сопровождается процессами α - и β -распадов и не вызывает изменения заряда и массового числа ядер. Установлено, что γ -лучи испускаются дочерним ядром (VIII.1.4.3°), которое в момент своего образования оказывается возбужденным (п. 4°). Снятие энергии возбужденного ядра происходит за время $(10^{-12} \div 10^{-14})$ с, значительно меньшее, чем время жизни возбужденного атома ($\sim 10^{-8}$ с).

*) Об античастицах см. VIII.2.1.7°.

***) Очевидно, что W_{\max} определяет разность ΔW_{ik} энергий двух уровней ядра.

3°. Происхождение и свойства гамма-лучей подтверждаются закономерностями *внутренней конверсии* γ -лучей — явлением фотоэффекта (V.6.1.1°) на электронах внутренних оболочек атома под действием гамма-излучения его ядра. Электроны, образовавшиеся в результате такого внутреннего фотоэффекта, называются *конверсированными* (электроны конверсии).

В ряде случаев вся энергия γ -лучей расходуется на явление внутренней конверсии и вместо γ -излучения наблюдаются только электроны конверсии. Энергия $e\varphi_n$ фотоэлектрона конверсии связана с энергией $h\nu$ фотона γ -лучей уравнением Эйнштейна для фотоэффекта (V.6.1.4°)

$$e\varphi_n = h\nu - A_n,$$

где A_n — работа выхода электрона с n -й электронной оболочки атома, численно равная энергии электронов, находящихся на определенных энергетических уровнях в атоме (VI.2.1.5°). Эти энергии известны из данных о характеристических рентгеновских спектрах атомов (VI.2.5B.9°). Гамма-фотон с энергией $h\nu$ может удалить электрон из любой внутренней оболочки (K -, M - и т.д.) атома (VI.2.3.6°). Соответственно энергии $e\varphi_n$ электронов конверсии выражаются так:

$$e\varphi_L = h\nu - A_L, \quad e\varphi_M = h\nu - A_M, \quad e\varphi_N = h\nu - A_N \text{ и т. д.},$$

где A_L , A_M , A_N и т. д. — энергии рентгеновских уровней атома.

4°. Результатом внутренней конверсии (п. 3°) является потеря электронов из внутренних оболочек атома и, следовательно, создание условий для излучения линейного рентгеновского характеристического спектра (VI.2.5B.9°). Внутренняя конверсия сопровождается испусканием характеристических рентгеновских лучей. Измерения энергии конверсированных электронов и данные о величинах A_L , A_M , A_N и т. д. (п. 3°) позволили убедиться в том, что ядро может испускать определенный ряд монохроматических γ -лучей, т. е. что γ -лучи имеют линейчатый спектр. Кроме того, все эти данные показали, что γ -лучи испускаются не материнским, а дочерним ядром.

5°. Гамма-излучение оказывает сильное воздействие на вещество, в частности, на биологические объекты. Действие γ -лучей и других видов ионизирующих излучений оценивается *дозой излучения* D — отношением поглощенной энергии излучения к массе облучаемого вещества. Единицей дозы является $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ — доза излучения, при которой массе в 1 кг облученного вещества передается энергия ионизирующего излучения 1 Дж (*). Эта единица называется грей (Гр). Применяется также внесистемная единица 1 рад = 10^{-2} Гр.

Мощностью N дозы излучения называется доза D , отнесенная к единице времени,

$$N = D/t.$$

Единицей мощности дозы является ватт на килограмм $\frac{\text{Вт}}{\text{кг}} = \frac{\text{Гр}}{\text{с}}$.

6°. Энергетической характеристикой излучения, оцениваемой по ионизации сухого атмосферного воздуха, является *экспозиционная доза излучения* D_0 . Едини-

*) Ввиду определенной специфики сведений о биологическом действии гамма-лучей, соответствующие единицы физических величин не вынесены в дополнения IX справочника, а приводятся здесь.

цей ее служит кулон на килограмм $\left(\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}\right)$ — экспозиционная доза рентгеновского или гамма-излучения, при которой сумма электрических зарядов ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе массой 1 кг при полном использовании ионизирующей способности, равна 1 Кл. Внесистемной единицей экспозиционной дозы служит *рентген*: $1\text{Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

При экспозиционной дозе, равной 1 Р, в 10^{-6} м³ сухого воздуха при нормальном атмосферном давлении возникает суммарный заряд ионов одного знака, равный $(1/3) \cdot 10^{-9}$ Кл.

Мощностью N_3 экспозиционной дозы называется экспозиционная доза D_3 , отнесенная к единице времени, $N_3 = D_3/t$. Единицей N_3 служит ампер на килограмм

$\left(\frac{\text{А}}{\text{кг}}\right)$ — мощность экспозиционной дозы электромагнитного излучения, при которой за время 1 с экспозиционная доза возрастает на $1 \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$. Внесистемные

единицы мощности экспозиционной дозы: $1 \frac{\text{Р}}{\text{с}} = 2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{А}}{\text{кг}}$, $1 \frac{\text{Р}}{\text{мин}} = 4,30 \times$

$\times 10^{-6} \frac{\text{А}}{\text{кг}}$, $1 \frac{\text{Р}}{\text{ч}} = 7,17 \cdot 10^{-8} \frac{\text{А}}{\text{кг}}$.

7°. Доза излучения может быть оценена по ее биологическому воздействию. С этой целью вводится *биологический эквивалент рентгена* (бэр). Так называется поглощенная энергия излучения, биологически эквивалентная одному рентгену,

$$1 \text{ бэр} = 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

Эквивалентная доза ионизирующего излучения измеряется также в *зивертах* (Зв).

Для человека безопасной считается мощность дозы, примерно в 250 раз превосходящая ту мощность, которую создают космический фон и естественная радиоактивность Земли.

§ VIII.1.8. Эффект Мёссбауэра

1°. Все возбужденные энергетические уровни ядра имеют значения энергии, определенные с точностью до величины ΔW , определяемой из соотношения неопределенностей (VI.1.6.6°),

$$\Delta W \approx \frac{\hbar}{\Delta t},$$

где Δt — время жизни ядра в возбужденном состоянии. Только для основного состояния стабильного ядра $\Delta t = \infty$ и $\Delta W = 0$, т. е. ядро имеет значение энергии, в точности равное W^*). Например, ядро иридия $^{191}_{77}\text{Ir}$ за время Δt , которое можно принять равным периоду полураспада (VIII.1.4.5°) $T = 10^{-12}$ с, переходит из возбужденного состояния с энергией $W = 129$ кэВ в основное состояние, испуская

*) Это в равной мере относится к энергетическим уровням электронов в атомах.

γ -фотон. Величина ΔW неопределенности энергии оказывается равной $\Delta W \approx 5 \cdot 10^{-6}$ эВ.

Конечное время жизни возбужденных энергетических состояний ядра приводит к некогерентности γ -излучения, сопровождающего переход ядра из возбужденного в нормальное состояние. Эта некогерентность называется *естественной шириной линии γ -излучения*, а неопределенность ΔW величины энергии возбужденного состояния называется *естественной шириной Γ энергетического уровня ядра* *).

2°. *Резонансным поглощением* γ -лучей ядрами называется поглощение ядром гамма-фотонов такой частоты ν , что энергия $h\nu$ фотона равна разности энергий одного из возбужденных и основного энергетических состояний ядра. Смысл названия в том, что такая же частота ν будет у линии γ -фотона, излученного при переходе ядра из возбужденного состояния ядра в нормальное.

В актах излучения и поглощения ядром γ -фотонов учитывается *отдача ядра*. При переходе ядра из возбужденного состояния с энергией W в основное (энергия которого принята равной нулю) γ -фотон приобретает энергию W_f , равную

$$h\nu_{\text{изл}} = W_f = W - W_{\text{яд}} < W,$$

где $W_{\text{яд}}$ — энергия отдачи ядра.

При возбуждении ядра и переходе его из основного состояния в состояние с энергией W гамма-фотон должен обладать энергией W'_f , равной $h\nu_{\text{погл}} = W'_f = W + W_{\text{яд}} > W$.

Частоты в максимумах линий излучения $\nu_{\text{изл}}$ и поглощения $\nu_{\text{погл}}$ сдвинуты друг относительно друга на величину

$$\nu_{\text{погл}} - \nu_{\text{изл}} = \Delta\nu \quad \text{такую, что} \quad h\Delta\nu = 2W_{\text{яд}}.$$

Энергия $W_{\text{яд}}$ отдачи ядра определяется по импульсу p_f фотона (V.6.2.2°), который в процессах излучения и поглощения γ -фотона должен быть равен импульсу ядра ($p_f = p_{\text{яд}}$):

$$W_{\text{яд}} = \frac{p_{\text{яд}}^2}{2M_{\text{яд}}} = \frac{p_f^2}{2M_{\text{яд}}} = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{1}{2M_{\text{яд}}}$$

где $M_{\text{яд}}$ — масса ядра. Для ядра $^{191}_{72}\text{Ir}$ с энергией возбужденного состояния $W = 129$ кэВ вычисления дают: $W_{\text{яд}} = 0,06$ эВ и максимумы линий излучения и поглощения сдвинуты на величину $\Delta\nu = \frac{2W_{\text{яд}}}{h}$. При этом $h\Delta\nu = 0,1$ эВ, что значительно превышает естественную ширину уровня Γ (п. 1°).

3°. Резкое сокращение энергии отдачи ядер при испускании и поглощении γ -лучей достигается при наблюдении этих процессов в ядрах, находящихся в кристаллической решетке, т. е. в связанном состоянии. В этих условиях импульс и энергия отдачи передаются не одному ядру, излучающему (или поглощающему) γ -фотон, а всей кристаллической решетке в целом. Масса кристалла значи-

*) Эти определения справедливы также для переходов атома из возбужденного состояния в нормальное. В этом случае говорят о *естественной ширине спектральной линии* и о *естественной ширине энергетических уровней электронов* в атоме.

тельно больше массы ядра, и потери энергии $W_{\text{яд}}$ при излучении и поглощении γ -лучей становятся весьма малыми. В этом случае будет наблюдаться резонансное поглощение и излучение γ -фотона строго определенной частоты ν , причем ширина линии будет сравнима с естественной шириной (п. 1°). Явление резонансного поглощения (излучения) γ -лучей без отдачи называется *эффектом Мёссбауэра*.

4°. В *ядерной спектроскопии* эффект Мёссбауэра используется для точных измерений энергетических уровней атомных ядер. Так, например, для γ -перехода в ядрах ^{57}Fe с энергией перехода $W=14,4$ кэВ изменение энергии уровня определено с точностью до величины $\Gamma/W=3\cdot 10^{-12}$. Для γ -перехода в ^{119}Sn с энергией перехода $W=93$ кэВ величина Γ/W оказалась равной $5\cdot 10^{-16}$.

Эффект Мёссбауэра использован для проверки вывода о смещении частоты спектральных линий в гравитационном поле (I.6.2.1°). При движении фотона в гравитационном поле его энергия изменяется на величину $\Delta W = -m(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $m = h\nu/c^2$ — масса фотона (V.6.2.1°), φ_1 и φ_2 потенциалы гравитационного поля в точках 1 и 2 (I.6.2.4°). Знак минус указывает на то, что увеличение энергии фотона в гравитационном поле происходит за счет уменьшения его энергии $W = h\nu$:

$$h \Delta \nu = -m \Delta \varphi.$$

Относительное изменение частоты при прохождении фотоном гравитационной разности потенциалов $\Delta \varphi$:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = -\frac{\Delta \varphi}{c^2}.$$

Здесь $\Delta \varphi > 0$, так как потенциал поля тяготения Солнца увеличивается по мере удаления от него. На поверхности Земли он больше, чем на поверхности Солнца.

Следовательно, $\frac{\Delta \nu}{\nu} < 0$ и все частоты линий Солнца и звезд, регистрируемые на Земле, сдвинуты к красному участку спектра. Этот эффект называется *гравитационным «красным смещением»*.

Эффект Мёссбауэра позволил обнаружить гравитационное смещение частоты γ -фотона при движении его в поле тяготения Земли. При движении по вертикали от пола до потолка лаборатории на высоту порядка 10 м относительное изменение частоты будет равно:

$$\left| \frac{\Delta \nu}{\nu} \right| = \frac{\Delta \varphi}{c^2} = \frac{g \Delta h}{c^2} \approx 10^{-15},$$

где g — ускорение силы тяжести (I.7.3.3°). Для регистрации такого сдвига частоты необходимо осуществить резонансное поглощение γ -фотонов так, чтобы источник и приемник γ -лучей имели относительную ширину линий меньшую или равную 10^{-15} . Тогда поглощение будет отсутствовать, если частота γ -фотона, падающего на ядро, отличается от частоты фотона, который ядро может поглотить, на величину $\Delta \nu = 10^{-15} \nu$.

Опыт ставился с двумя одинаковыми кристаллическими источниками γ -лучей, которые могли располагаться на 20 м один выше другого. Когда приемник γ -лучей находился на одной высоте с источником γ -фотонов, происходило резонансное поглощение. При подъеме приемника на 20 м поглощение прекращалось вследствие гравитационного смещения частоты. Для восстановления поглощения использовался эффект Доплера (IV.3.6.1°). При определенной скорости сближения

приемника с источником излучения, доплеровское увеличение частоты компенсировало ее гравитационное уменьшение и резонансное поглощение γ -лучей восстанавливалось. Опыт явился подтверждением в лабораторных условиях гравитационного «красного смещения».

§ VIII.1.9. Ядерные реакции

1°. *Ядерными реакциями* называются превращения атомных ядер, вызванные взаимодействием их друг с другом или с элементарными частицами (VIII.2.1.1°). Как правило, в ядерных реакциях участвуют два ядра и две частицы. Одна пара «ядро — частица» является *исходной*, другая пара — *конечной*.

Символическая запись ядерной реакции:



где A и B — исходное и конечное ядра, a и b — исходная и конечная частицы в реакции. Иногда ядерная реакция может происходить неоднозначно и наряду с предыдущей реакцией может происходить по схеме $A + a \rightarrow C + c$, т. е. $A(a, c)C$ или по другим схемам. Возможные схемы протекания ядерной реакции называются ее *каналами*. Начальный этап реакции называется *входным каналом*.

2°. Ядерная реакция характеризуется *энергией ядерной реакции* Q , равной разности энергий конечной и исходной пар в реакции (п. 1°). Если $Q < 0$, то реакция идет с поглощением энергии и называется *эндотермической*; если $Q > 0$, то реакция идет с выделением энергии и называется *экзотермической*. Эндотермическая ядерная реакция оказывается возможной при некоторой наименьшей (пороговой) кинетической энергии $W_{\text{порог}}$ вызывающих реакцию ядер или частиц:

$$W_{\text{порог}} = \frac{M_A + M_a}{M_A} |Q|,$$

где M_A — масса неподвижного ядра — мишени, M_a — масса налетающей на ядро частицы (или ядра).

В ядерных реакциях выполняются законы сохранения энергии, импульса, электрического заряда и массовых чисел. Если кинетическая энергия вступающих в реакцию частиц достаточна для рождения нуклон-антинуклонной пары (VIII.2.1.7°), то массовое число может изменяться. Кроме того, в ядерной физике существуют особые законы сохранения, которых нет в других областях физики (VIII.2.4.2.1°).

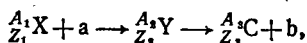
3°. Эффективность ядерной реакции определяется величиной *эффективного поперечного сечения* σ данной реакции (*сечение реакции*). Величина σ имеет размерность площади и характеризует «выход» реакции на одну облучаемую ядро частицу:

$$\sigma = \frac{dn_0}{n_0 N_0 dx}.$$

В этом определении считается, что за единицу времени на единицу площади поперечного сечения вещества, содержащего N_0 ядер в единице объема, падает плоскопараллельный поток, содержащий n_0 частиц; dn_0 — число этих частиц, претерпевших ядерную реакцию в слое толщиной dx .

4°. В зависимости от характера взаимодействия частицы a с мишенью A различаются *прямые взаимодействия*, когда ядерные реакции происходят в один этап по схеме (п. 1°), и ядерные реакции, происходящие в два этапа с образованием *составного ядра (компаннд — ядро)*. На первом этапе налетающая частица застревает в ядре — мишени и ее энергия передается не одному какому-либо нуклону, а равномерно распределяется между всеми частицами составного ядра, так что ни одна из них не получает энергии, достаточной для вылета из ядра *). Составное ядро рассматривается как возбужденная статистическая система частиц, совершающих неупорядоченные движения, подобные движению частиц в капле жидкости. Быстрое перераспределение энергии между частицами в ядре возможно лишь при частых столкновениях частиц, а это характерно для перераспределения энергии между частицами в капле жидкости. В результате случайных отклонений от равномерного распределения энергии возбуждения между частицами составного ядра на какой-либо одной из них концентрируется энергия, достаточная для вылета этой частицы из ядра. Этот второй этап ядерной реакции происходит по истечении времени $(10^7 \div 10^8) \tau_{яд}$ после первого этапа, где $\tau_{яд}$ — характерное ядерное время (VIII.2.2.6°).

Схема ядерной реакции, происходящей с образованием составного ядра:

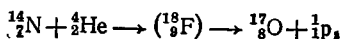


где ${}_{Z_1}^{A_1}X$ — исходное ядро — мишень, a — налетающая частица, ${}_{Z_2}^{A_2}Y$ — составное ядро, ${}_{Z_3}^{A_3}C$ — ядро — продукт ядерной реакции, b — частица, вылетевшая из ядра в результате реакции. Если $a=b$, то происходит рассеяние частицы ядром (упругое или неупругое в зависимости от того, одинаковы или различны энергии частицы до и после рассеяния). Если $b \neq a$, то происходит ядерная реакция в прямом смысле слова.

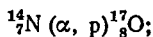
5°. Ядерные реакции классифицируются по различным признакам: по энергиям вызывающих их частиц, по роду участвующих в них частиц, по характеру происходящих ядерных превращений. Ядерные реакции при малых энергиях (порядка эВ) происходят в основном под действием нейтронов. Реакции при средних энергиях (до нескольких МэВ) вызываются, кроме того, заряженными частицами (α -частицами, протонами, дейтронами, ядрами тяжелого водорода), а также γ -фотонами. Заряженными частицами, вызывающими ядерные реакции, могут быть многозарядные ионы тяжелых химических элементов, а также заряженные частицы, ускоренные в ускорителях. Реакции при высоких энергиях (сотни и тысячи МэВ) приводят к рождению отсутствующих в свободном состоянии элементарных частиц (мезонов, гиперонов и др.).

6°. Примеры ядерных реакций под действием α -частиц и дейтронов ${}^2_1\text{D}$:

а) исторически первая ядерная реакция превращения азота в кислород:

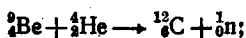


или сокращенно:

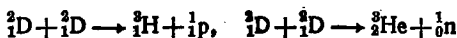


*) Захваченный ядром «снаряд», например α -частица или дейтрон, может состоять из нескольких частиц.

б) ядерная реакция, в которой впервые были получены нейтроны,



в) ядерные реакции под действием дейтронов ${}^2_1\text{D}$ — ядер тяжелого водорода (дейтерия) — могут приводить к синтезу тяжелых ядер — трития ${}^3_1\text{H}$ или легкого изотопа гелия ${}^3_2\text{He}$ с образованием протона или нейтрона:

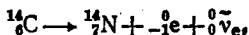


(см. также п. 13°).

7°. Под действием нейтронов ${}^1_0\text{n}$ происходит образование искусственно-радиоактивных изотопов, например, радиоуглерода ${}^{14}_6\text{C}$ в периодом полураспада (VIII.1.4.5°) свыше 5000 лет:



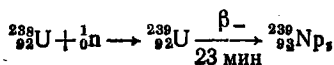
Последующий распад:



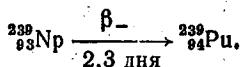
где ${}^0_{-1}\text{e}$ и ${}^0_0\bar{\nu}_e$ — обозначения электрона и электронного антинейтрино. Большой период полураспада ${}^{14}_6\text{C}$ лежит в основе радиоуглеродного метода датировки в археологии. Определение относительного количества нераспавшегося радиоактивного углерода, который перестал накапливаться в погибшем организме, по реакции (*) позволяет установить момент, когда организм перестал поглощать из атмосферы изотоп ${}^{14}_6\text{C}$, образующийся в атмосфере из азота под действием космических нейтронов.

8°. Характер взаимодействия нейтронов с ядрами различен для быстрых и медленных нейтронов. Нейтроны называются быстрыми (*быстрые нейтроны*), если их скорость v так велика, что соответствующая длина дебройлевской волны $\lambda = h/mv$ меньше радиуса R ядра, т. е. $h/mv < R$, или $v > h/mR$. Энергии быстрых нейтронов заключены в пределах от 0,1 МэВ до 50 МэВ. Если $\lambda > R$, то нейтроны называются медленными (*медленные нейтроны*). Их энергии не превышают 100 кэВ. Медленные нейтроны с энергиями от 0,005 эВ до 0,5 эВ называются *тепловыми нейтронами*. При энергиях, меньших 0,005 эВ, различают *холодные* и *ультрахолодные нейтроны*.

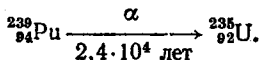
Взаимодействие нейтронов с ядрами состоит, главным образом, либо в упругом рассеянии нейтронов на ядрах, либо в захвате нейтронов ядрами. В веществах, называемых *замедлителями* (графит, тяжелая вода D_2O , HDO , соединения бериллия), быстрые нейтроны рассеиваются на ядрах, и их энергия переходит в энергию теплового движения атомов вещества — замедлителя. В результате нейтроны становятся тепловыми. Их энергии при комнатных температурах становятся примерно 0,025 эВ. При совпадении энергии тепловых нейтронов с энергией составного ядра (п. 4°) происходит *резонансное поглощение* (*резонансный захват*) нейтронов. Этот процесс лежит в основе получения *трансурановых* (*заурановых*) химических элементов. Так, трансурановый элемент нептуний ${}^{238}_{93}\text{Np}$ образуется при резонансном захвате нейтронов наиболее распространенным изотопом урана ${}^{238}_{92}\text{U}$ по схеме:



где указан период полураспада радиоактивного изотопа $^{238}_{92}\text{U}$, превращающегося в $^{239}_{93}\text{Np}$. Далее, ядро изотопа $^{239}_{93}\text{Np}$ превращается в плутоний $^{239}_{94}\text{Pu}$:



Благодаря эффективному делению под действием тепловых нейтронов (п. 10°) плутоний играет выдающуюся роль в получении ядерной энергии. Плутоний $^{239}_{94}\text{Pu}$ является α -радиоактивным с огромным периодом полураспада (24000 лет) и превращается в устойчивый изотоп урана $^{235}_{92}\text{U}$:



9°. Ядерные реакции под действием ускоренных ядер химических элементов позволили продвинуться в таблице Менделеева до химического элемента с номером $Z=107$. Элемент с $Z=105$ назван нильсборием (Ns). При облучении изотопа $^{242}_{94}\text{Pu}$ ядрами неона $^{22}_{10}\text{Ne}$ получен химический элемент с $Z=104$ (курчатовий $^{260}_{104}\text{Ku}$). После захвата ядра $^{22}_{10}\text{Ne}$ плутонием образовалось составное ядро курчатовия $^{264}_{104}\text{Ku}$ и в одном случае на 10 миллиардов составных ядер после испускания четырех нейтронов возникло ядро элемента $^{260}_{104}\text{Ku}$:



В самых мощных пучках ускоренных ядер неона одно ядро курчатовия рождается за несколько часов.

10°. Тяжелое составное ядро, возбужденное при резонансном захвате нейтрона, может разделиться на две приблизительно равные части (*реакция деления тяжелых ядер*). Образовавшиеся части называются *осколками деления*. Неустойчивости тяжелых ядер относительно деления способствует большое количество в них протонов, испытывающих кулоновское отталкивание друг от друга.

Деление тяжелого ядра на два осколка сопровождается выделением огромной энергии. Это вытекает из сравнения удельных энергий связи в ядрах химических элементов, расположенных в конце и середине периодической системы Менделеева. В реакции деления выделяется энергия, пропорциональная разности удельных энергий неустойчивого «рыхлого» ядра и двух «упакованных» устойчивых осколков деления. Эта разность составляет 1,1 МэВ на один нуклон (VIII.1.2.4°). При делении ядра урана $^{238}_{92}\text{U}$, содержащего 238 нуклонов, должна выделяться энергия порядка 200 МэВ. При делении ядер, содержащихся в 1 г урана $^{235}_{92}\text{U}$, выделяется энергия $8 \cdot 10^{10}$ Дж или 22000 кВт·ч.

Тяжелые ядра способны к делению, если для них выполняется условие: $Z^2/A \geq 17$, где Z^2/A называется *параметром деления*. Это условие выполняется для всех ядер, начиная с серебра $^{108}_{47}\text{Ag}$, для которого $Z^2/A \approx 20$. Ядра, для которых $Z^2/A \geq 49$ — *критический параметр деления*, совершенно неустойчивы относительно деления и не могут существовать. Для курчатовия ($Z=104$) (п. 9°) $Z^2/A \approx 41$.

При значениях $Z^2/A < (Z^2/A)_{\text{крит}}$ возможно *самопроизвольное (спонтанное) деление ядер*, происходящее аналогично α -радиоактивности (VIII.1.5.1°) путем

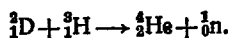
туннельного эффекта (VI.1.7.2°). Период полураспада (VIII.1.4.5°) для самопроизвольного деления ядер составляет ($10^{16} \div 10^{17}$) лет.

11°. Осколки деления в момент своего образования обладают избытком нейтронов над протонами. Избыточные нейтроны, испускаемые осколками, называются *нейтронами деления*. Число их может быть различным, и процесс деления ядер сопровождается размножением нейтронов, характеризуемым средним числом (ν) возникших нейтронов, приходящихся на один акт деления. Для ядер плутония ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ и урана ${}_{92}^{235}\text{U}$, которые делятся под действием тепловых нейтронов, $\langle \nu \rangle$ равно соответственно 3,0 и 2,5. Среди нейтронов деления имеются *мгновенные (вторичные)* и *запаздывающие нейтроны*. Мгновенные нейтроны испускаются непосредственно при делении ядра за время порядка 10^{-14} с. Запаздывающие нейтроны испускаются продуктами деления спустя некоторое время после деления.

12°. Если каждый из мгновенных нейтронов, возникших в реакции деления (п. 11°), взаимодействуя с соседними ядрами делящегося вещества, вызывает в них реакцию деления, то происходит лавинообразное нарастание числа актов деления — *цепная реакция деления*. Условие возникновения цепной реакции является наличие размножающихся нейтронов.

Коэффициентом размножения нейтронов k называется отношение числа нейтронов, возникающих в некотором звене реакции, к числу таких нейтронов в предшествующем звене. Условие развития цепной реакции: $k \geq 1$. Практическая возможность существования цепных реакций деления доказана развитием *ядерной энергетики* — областью техники, в которой созданы различные типы *ядерных реакторов* — устройств, где реализованы управляемые цепные реакции.

13°. Рассмотренные в п. 6° в) реакции синтеза ядер трития и гелия из ядер дейтерия являются вторым путем выделения внутриядерной энергии, помимо деления тяжелых ядер. Удельные энергии связи (VIII.1.2.4°) в трех ядрах — ${}^2_1\text{D}$, ${}^3_1\text{H}$ и ${}^4_2\text{He}$ — относятся приблизительно как 1 : 3 : 6. Это означает, что ядерные реакции, рассмотренные в п. 6° в), сопровождаются выделением больших количеств энергии: в первой из них выделяется энергия 4,04 МэВ, во второй — энергия 3,27 МэВ. Еще большая энергия 17,58 МэВ выделяется в реакции



На одну частицу эта энергия будет равна $\frac{17,6}{5}$ МэВ = 3,5 МэВ, т. е. примерно в 4 раза больше, чем в реакции деления урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ (п. 10°): $\frac{200}{238}$ МэВ = 0,85 МэВ.

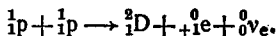
Еще более эффективной в смысле удельного выделения энергии является реакция синтеза ядер гелия ${}^4_2\text{He}$ из четырех протонов — 6,70 МэВ — на одну частицу.

14°. Реакции синтеза легких ядер, связанные с преодолением потенциальной энергии их отталкивания, эффективно могут протекать при сверхвысоких температурах порядка ($10^8 \div 10^9$) К, превышающих температуру центральных областей Солнца ($T = 1,3 \cdot 10^8$ К). Такие реакции называются *термоядерными (термоядерные реакции синтеза)* и происходят в веществе, находящемся в плазменном состоянии (III.9.5.1°). Термоядерные реакции являются, по-видимому, источниками энергии звезд, компенсирующими их излучение. Солнце ежесекундно

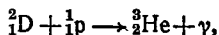
излучает энергию $3,8 \cdot 10^{26}$ Дж, что соответствует выделению энергии на единицу массы в 1с, всего $1,88 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{кг}}$. Оно составляет лишь 1% от удельного выделения энергии в живом организме в процессе обмена веществ.

Термоядерные реакции на Солнце, как считается, могут протекать в форме *термоядерных циклов*, в которых выделение энергии происходит за счет превращения ядер водорода в ядра гелия.

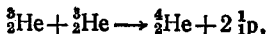
Один из вариантов *протон-протонного цикла* начинается с соединения двух протонов в дейтерий с испусканием позитрона и электронного нейтрино:



Дальнейшее протекание цикла происходит по схеме:



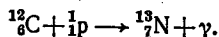
где γ -излучение образуется не только в виде избытка энергии реакции, но и при соединении позитрона с электронами, всегда существующими в плазме. Вероятным продолжением цикла является реакция с выделением энергии:



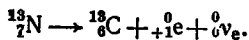
где ${}^4_2\text{He}$ — символ α -частицы.

В *углеродно-азотном цикле* ядра углерода являются «катализаторами» реакции соединения ядер водорода в ядро гелия.

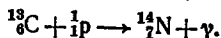
В начале цикла быстрый протон проникает в ядро углерода:



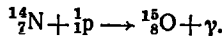
В радиоактивном изотопе азота ${}^{13}_7\text{N}$ с периодом полураспада 14 мин происходит превращение (VIII.1.6.1°) ${}^1_1\text{p} \rightarrow {}^0_0\text{p} + {}^0_{+1}\text{e} + {}^0_0\nu_e$ и образуется ядро изотопа углерода:



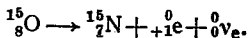
Приблизительно через каждые 2,7 млн. лет ядро ${}^{13}_6\text{C}$ захватывает протон, образуя ядро устойчивого изотопа азота ${}^{14}_7\text{N}$:



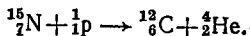
Спустя в среднем 32 млн. лет, ядро ${}^{14}_7\text{N}$ захватывает протон и превращается в ядро кислорода ${}^{15}_8\text{O}$:



Неустойчивое ядро ${}^{15}_8\text{O}$ с периодом полураспада 3 мин, испускает позитрон и нейтрино и превращается в ядро ${}^{15}_7\text{N}$:



Цикл завершается реакцией, происходящей приблизительно через 100 тыс. лет:



Результатом цикла является превращение четырех протонов в ядро гелия с появлением двух позитронов и γ -излучения. На одно ядро гелия выделяется энергия 26,8 МэВ, что составляет в пересчете на грамм-атом гелия 700 000 кВт.час энер-

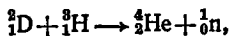
гии. Этой энергии достаточно для компенсации излучения Солнца. Отдельные реакции цикла отдалены друг от друга временем непомерно большим по земным масштабам. Однако этот цикл замкнут и происходит непрерывно. Поэтому все стадии цикла происходят на Солнце одновременно, начавшись в разные моменты времени.

15°. Условия, близкие к тем, какие реализуются в недрах Солнца, были осуществлены в *водородной бомбе*, где происходит самоподдерживающаяся термоядерная реакция взрывного характера в смеси дейтерия и трития типа

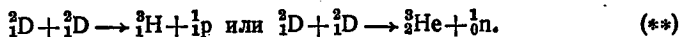


Высокая температура, необходимая для протекания термоядерной реакции, была получена за счет взрыва «обычной» атомной бомбы, действующей на принципе быстрой цепной реакции деления тяжелых ядер.

Теоретической основой искусственных управляемых термоядерных реакций являются реакции типа



а также типа



Для осуществления этих реакций необходимо, чтобы плазма была достаточно сильно нагрета, а также чтобы концентрация n частиц в ней и время τ их удержания в плазме удовлетворяли определенному условию, называемому *критерием Лоусона*:

$$\begin{aligned} \text{для реакции } (*) \quad n\tau &> 10^{14} \text{ с/см}^3, \quad T > 10^8 \text{ К}, \\ \text{для реакции } (**) \quad n\tau &> 10^{15} \text{ с/см}^3, \quad T > 10^9 \text{ К}. \end{aligned}$$

Практическое осуществление управляемых термоядерных реакций является в настоящее время актуальной задачей огромной значимости, и, возможно, она будет решена в ближайшие годы.

Г л а в а VIII.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

§ VIII.2.1. Общие сведения об элементарных частицах

1°. В микромире выделяются три уровня, различающиеся характерными масштабами R и энергиями E . Первый из них — молекулярно-атомный уровень (VI.2.4.1°, VI.2.1.1°), для которого $R \sim 10^{-8} \div 10^{-10}$ м, $E \sim 1 \div 10$ эВ; второй — ядерный уровень (VIII.1.1.1°) с $R \sim 10^{-14} \div 10^{-15}$ м, $E \sim 10^6 \div 10^8$ эВ. На третьем уровне располагаются мельчайшие микрочастицы, не являющиеся молекулами, атомами или ядрами *). По традиции они именуются *элементарными частицами*, хотя и не обязаны быть бесструктурными образованиями. Их иногда называют субъядерными частицами, физики обычно предпочитают говорить просто о «частицах». В настоящее время уровень элементарных частиц расщеплен на два подуровня: подуровень адронов и подуровень фундаментальных частиц (VIII.2.4).

2°. *Физика элементарных частиц* устанавливает характеристики этих микрообъектов, проводит их классификацию, изучает свойства фундаментальных взаи-

*) Исключение составляет протон — ядро атома водорода.

модействий и анализирует обусловленные ими процессы. В последнее время интенсивно исследуется внутренняя структура элементарных частиц. Из соотношений неопределенностей (VI.1.6.2°) следует, что для выявления деталей структуры с размерами порядка Δr нужны зондирующие частицы с импульсами p , не меньшими $\Delta p \sim \hbar/\Delta r$. Таким образом, для изучения очень мелких деталей нужны очень большие энергии. Поэтому современная физика элементарных частиц называется также *физикой высоких энергий*. Максимальные доступные в настоящее время в лаборатории энергии составляют по порядку величины 100 ГэВ, чему соответствуют минимальные расстояния $R \sim 10^{-18}$ м.

3°. Сейчас общее число известных элементарных частиц (вместе с античастицами) приближается к 400. Некоторые из них стабильны или квазистабильны и существуют в природе в свободном или слабо связанном состоянии. Это — *электроны* ${}^0_1e = e^-$ (III.1.1.2°)*, входящие в состав атомов (VI.1.2); *протоны* ${}^1_1H = p$ (III.1.1.2°) и *нейтроны* ${}^0_1n = n$, входящие в состав атомных ядер и объединяемые общим названием *нуклоны* N (VIII.1.1.1°); *фотоны* γ , являющиеся квантами электромагнитного поля (V.6.1.4°). Сюда же можно отнести *электронные (анти)нейтрино* ν_e **), рождающиеся в процессах бета-превращений (VIII.1.6.6°) и в термоядерных реакциях, протекающих в звездах (VIII.1.9.14°).

4°. Все остальные элементарные частицы крайне нестабильны и образуются во вторичном космическом излучении (VIII.2.2.5°) или получают в лаборатории. Основной способ их генерации — столкновения быстрых стабильных частиц (VIII.2.2.4°), в процессе которых часть начальной кинетической энергии превращается в энергию покоя (I.5.7.3°) образующихся частиц. Едва родившись, нестабильные частицы очень быстро распадаются, и в конечном итоге вновь образуются стабильные частицы (как правило, не совпадающие со сталкивающимися).

5°. В 1937 г. в космических лучах был зарегистрирован *мион* μ^- — тяжелый аналог электрона ($m_\mu \approx 200 m_e$ ***). В конце 40-х гг. открыты *пионы* (пи-мезоны) π^+ , π^0 , π^- — переносчики ядерного взаимодействия (VIII.1.3.6°). В 50-е гг. в космических лучах и на ускорителях зарегистрированы *странные частицы*: каоны (ка-мезоны) K^+ , K^0 , лямбда-гипероны Λ^0 , сигма-гипероны Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , кси-гипероны Ξ^0 , Ξ^- , омега-гиперон Ω ****). 60-е гг. ознаменовались открытием более сотни короткоживущих частиц со средними временами жизни (VIII.1.4.4°) $\tau \sim 10^{-24} \div 10^{-23}$ с. Они называются *резонансами*, так как проявляются в виде характерных пиков в графиках зависимости сечений рассеяния (VIII.1.9.3°) от энергии*****). В 1974 г. обнаружены массивные (второе тяжелее протона), но относи-

*) А также позитроны (п. 7°).

***) И другие сорта нейтрино и антинейтрино (VIII.2.3.3°).

****) В 1975 г. с помощью встречных электрон-позитронных пучков (VIII.2.2.5°) открыт еще более тяжелый аналог электрона — тяжелый лептон, или *таон* τ^- ($m_\tau \approx 3500 m_e$).

*****) Омега-гиперон был предсказан в 1962 г. на основе весьма глубоких теоретических соображений и открыт экспериментально в 1964 г.

*****) Длина пробега резонансов с момента их рождения до момента распада составляет около 10^{-25} м, и они не могут быть зарегистрированы непосредственно с помощью обычных детекторов.

тельно устойчивые ($\tau \sim 10^{-19}$ с) джи-пси-мезоны J/ψ , явившиеся родоначальниками группы очарованных частиц (D^+ , D^0 , F^+ , Λ_c^+ и др.). В 1977 г. открыты чрезвычайно тяжелые ипсилон-мезоны Υ ($m_\Upsilon \approx 11 m_p$), которые, как считается, служат родоначальниками еще одной группы частиц — «прелестных». В 1983 г. зарегистрированы промежуточные бозоны W^+ , W^- , Z^0 — переносчики слабого взаимодействия (VIII.2.4.11°).

6°. Для описания свойств отдельных элементарных частиц вводится целый ряд физических величин (квантовых чисел), значениями которых они и различаются. Наиболее известными физическими величинами являются: масса, среднее время жизни, спин, электрический заряд и магнитный момент.

а) *Масса m* измеряется в энергетических единицах (МэВ или ГэВ), в соответствии с соотношением Эйнштейна (I.5.7.3°). Спектр масс известных элементарных частиц нерегулярен и простирается от 0 (фотон) до 90 ГэВ (промежуточные бозоны). Для сравнения укажем, что масса электрона равна примерно 0,5 МэВ. Первоначально систематика элементарных частиц основывалась именно на значениях их масс, откуда и ведут происхождение такие термины, как лептоны («легкие»), мезоны («средние»), барионы («тяжелые») и гипероны (греческий префикс «гипер» — «над», «сверх»). Эти термины сохранились, но они потеряли свой исходный смысл*).

б) *Среднее время жизни τ* служит мерой стабильности частицы** и измеряется в секундах (VIII.1.4.4°). Значения τ варьируются в чрезвычайно широком диапазоне. Фотон, нейтрино, электрон и протон абсолютно стабильны ($\tau = \infty$ ***), резонансы предельно нестабильны ($\tau \sim 10^{-24} \div 10^{-23}$ с). Для нестабильных частиц в таблицах наряду с временами жизни указываются также *типы распадов*.

в) *Спин J* — собственный момент импульса частицы, измеряется в единицах \hbar (III.12.1.3°) и принимает целые и полуцелые значения. Элементарная частица со спином J имеет $2J+1$ спиновых состояний, различающихся проекцией J_z (VI.2.2.3°). Значение спина однозначно определяет *тип статистики*, которой подчиняются данные частицы: все частицы с целыми спинами являются бозонами (VII.2.2.1°), все частицы с полуцелыми спинами — фермионами (VII.2.2.4°), для которых справедлив принцип Паули (VI.2.3.1°). Для известных частиц значения спина J лежат в интервале от 0 (например, пионы π) до 6 (мезонный резонанс ρ , зарегистрированный на Серпуховском ускорителе в 1983 г.).

г) *Электрический заряд q* измеряется в единицах элементарного заряда e (III.1.1.2°). Для всех частиц, существующих в свободном состоянии, он принимает лишь целочисленные значения****): обычно 0 и ± 1 , для некоторых резонансов ± 2 . Это правило квантования (сравни с VI.2.2.1°) выполняется с огромной

*) Например, лептон τ^- более чем в 3 раза тяжелее бариона p .

**) Согласно соотношению неопределенностей (VI.1.6.6°) при $W = mc^2$, масса нестабильной частицы не имеет строго определенного значения. В качестве меры нестабильности резонансов обычно как раз и принимают ширину $\Gamma \sim \hbar/\tau$, измеряемую в энергетических единицах.

***) В последнее время абсолютная стабильность протона подвергается серьезным сомнениям (VIII.2.4.15°).

****) Кварки, которым приписываются дробные значения электрического заряда, требуют особого обсуждения, так как они могут существовать только внутри адронов (VIII.2.4.7°).

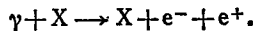
точностью: так, согласно последним измерениям,

$$|q_p + q_e| < 10^{-21}e, \quad |q_n| < 10^{-21}e.$$

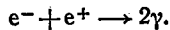
д) *Магнитный момент* μ — это максимальное значение проекции вектора собственного магнитного момента \mathbf{r}_m частицы. Вектор \mathbf{r}_m и вектор спина \mathbf{J} коллинеарны; если они параллельны, то $\mu > 0$, если они антипараллельны, то $\mu < 0$. Магнитные моменты μ элементарных частиц обычно измеряются в единицах соответствующих магнетонов $\mu_0 = e\hbar/2m$. Если $m = m_e$, то μ_0 есть магнетон Бора μ_B (III.12.1.4°), если $m = m_p$, то получаем ядерный магнетон $\mu_{яд}$ (VIII.1.1.6°).

7°. У каждой частицы имеется *античастица*, обычно обозначаемая тем же символом, но с добавлением тильды над ним. Массы, времена жизни и спины частицы и античастицы одинаковы. Остальные характеристики, в том числе электрический заряд и магнитный момент, равны по модулю, но противоположны по знаку. Примеры частиц и античастиц: электрон e^- и позитрон e^+ , протон p и антипротон \bar{p} , нейтрон n и антинейтрон \bar{n} , нейтрино ν_e и антинейтрино $\bar{\nu}_e$. Первые две пары различаются, например, знаками электрического заряда, p и \bar{p} — знаками магнитного момента*), ν_e и $\bar{\nu}_e$ — знаками так называемой *спиральности* — проекции спина на направление движения**). Некоторые частицы, называемые *истинно нейтральными*, тождественны своим античастицам. К ним относятся: фотон γ , нейтральный пион π^0 и несколько других.

Первая античастица — *позитрон* e^+ — была зарегистрирована в 1932 г. Часто позитрон образуется совместно с электроном при соударении фотона с энергией $E_\gamma > 2m_e c^2$ с заряженной частицей X ***):



Встречаясь друг с другом, медленные электрон и позитрон аннигилируют, порождая два (гораздо реже три) фотона:



При соударениях достаточно быстрых электронов и позитронов могут порождаться самые разнообразные частицы, вплоть до наиболее тяжелых. Использование встречных электрон-позитронных пучков — один из самых эффективных методов генерации и исследования новых частиц, и он широко применяется в современной физике (VIII.2.2.5°).

Понятия частицы и античастицы являются относительными, а не абсолютными. Например, p мы называем протоном, а \bar{p} — антипротоном только потому, что объектов первого типа во Вселенной неизмеримо больше, чем объектов второго

*) Но, главное, знаками барионного заряда B и проекции изоспина T_3 (VIII.2.3.8°).

***) Спиральность у нейтрино отрицательна, у антинейтрино положительна. Кроме того, ν_e и $\bar{\nu}_e$ различаются знаками лептонного заряда L (VIII.2.3.4°) (сравни с предыдущей сноской).

****) Эта частица (обычно некоторое ядро) необходима для того, чтобы удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. Свободный безмассовый фотон не может самопроизвольно превратиться в массивную электрон-позитронную пару.

типа. В то же время основные уравнения теории не изменяются при замене частиц на античастицы и обратно. Природа зарядовой асимметрии реальной Вселенной до конца не выяснена и составляет одну из загадок современной физики и космологии.

§ VIII.2.2. Взаимопревращения элементарных частиц, Фундаментальные взаимодействия

1°. Основной экспериментальный и теоретический метод исследования в физике элементарных частиц (и в ядерной физике) — *метод рассеяния*. В опытах по рассеянию сначала приготавливают два пучка частиц. Часто один из них формируется *ускорителем* (III.11.4), а вместо другого используется неподвижная *мишень*. В последнее десятилетие широко применяются *встречные пучки*, формируемые ускорителями и так называемыми накопительными кольцами, — протон-протонные, протон-антипротонные, электрон-электронные и электрон-позитронные. В некоторой области пучки пересекаются, и частицы из разных пучков вступают во взаимодействие. В результате они рассеиваются: изменяется состояние их движения или рождаются новые частицы. Затем с помощью *детекторов* регистрируются рассеянные частицы и измеряются их характеристики. По полученным экспериментальным данным судят о взаимодействии между частицами и их внутренней структуре. Основной динамическая характеристика любого процесса рассеяния — *эффективное сечение* σ (VIII.1.9.3°). Все процессы рассеяния управляются *законами сохранения*, из которых отметим законы сохранения энергии и импульса (I.5.6.2°, I.5.7.2°), а также электрического заряда (III.1.1.3°). Некоторые другие законы сохранения обсуждаются в (VIII.2.3).

2°. Взаимодействия между частицами обуславливают самые разнообразные процессы. Они делятся на три большие группы.

а) При *упругом рассеянии*

$$a + b \rightarrow a + b$$

(a и b — символы частиц) частицы не претерпевают превращений, а просто изменяют состояние своего движения. Примеры: комптоновское рассеяние (V.6.3); рассеяние α -частиц ядрами в опытах Резерфорда.

б) В *неупругих процессах (реакциях)*

$$a + b \rightarrow c_1 + \dots + c_n$$

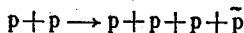
сталкивающиеся частицы превращаются в частицы других сортов. Эти процессы подразделяются на экзотермические (энергия реакции $Q > 0$) и эндотермические ($Q < 0$), причем для последних вводится понятие пороговой энергии $W_{\text{порог}}$ (VIII.1.9.2°). В экзотермических реакциях часть начальной энергии покоя превращается в кинетическую энергию, в эндотермических реакциях происходит превращение начальной кинетической энергии в энергию покоя образующихся частиц *). В последнем случае благодаря закону сохранения импульса часть начальной кинетической энергии в общем случае должна затрачиваться на движение центра масс рождающихся частиц, а потому всегда $W_{\text{порог}} \geq |Q|$. Примеры: реакция аннигиляции электрон-позитронной пары (VIII.2.1.7°) — экзотермическая с $Q = 2m_e c^2 \approx 1,02$ МэВ; реакция рождения электрон-позитронной пары

*) Случай $Q = 0$ соответствует упругому рассеянию.

(VIII.2.1.7°) — эндотермическая, с

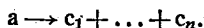
$$W_{\text{порог}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_X} \right) > |Q| = 2m_e c^2.$$

Еще один пример: реакция рождения антипротона (VIII.2.1.7°)



эндотермическая с $|Q| = 2m_p c^2 \approx 1,9$ ГэВ; если один из начальных протонов покоится, то $W_{\text{порог}} = 6m_p c^2 \approx 5,6$ ГэВ, что много больше $|Q|$, но если начальные протоны принадлежат встречным пучкам, то $W_{\text{порог}} = 2m_p c^2 = |Q| \approx 1,9$ ГэВ.

в) Частицы, рождающиеся в процессах рассеяния, за редкими исключениями являются нестабильными (VIII.2.1.6°) и претерпевают распады:



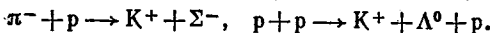
Распад — экзотермический процесс ($Q > 0$), и он может протекать только при условии

$$m_a \geq \sum_i m_{c_i}.$$

Пример: свободный нейтрон — самая устойчивая из нестабильных частиц — претерпевает β_- -распад со средним временем жизни 898 ± 16 с (VIII.1.6.1°) и с энерговыделением $Q = m_n - (m_p + m_e) \approx 0,78$ МэВ. С другой стороны, протон легче нейтрона, и он может претерпевать β_+ -распад (VIII.1.6.1°), только находясь в связанном состоянии внутри атомного ядра.

3°. *Взаимопревращаемость* элементарных частиц — одно из наиболее фундаментальных их свойств. Подчеркнем, что образующиеся частицы не входят в состав исходных частиц, а *рождаются* непосредственно в процессах их соударений или распадов. Для пояснения заметим, что фотон также не входит в состав атома, а рождается непосредственно при переходе электрона с одного энергетического уровня на другой (VI.2.1.3°).

4°. Именно в процессах взаимопревращений и открывают ранее неизвестные частицы (VIII.2.1.4°). Для этого сталкивают друг с другом известные стабильные частицы с как можно большими энергиями, а затем исследуют продукты протекающих реакций и те фрагменты, на которые распались образовавшиеся частицы. В качестве примера приведем две реакции, в которых были открыты странные частицы (VIII.2.1.5°):



5°. До начала 50-х гг. основным источником частиц с высокими энергиями служили *космические лучи*, которые представляют собой стабильные ядра (в основном протоны), заполняющие космическое пространство. При попадании космического протона в атмосферу иногда порождается в общей сложности до миллиарда различного рода частиц, образующих космический ливень. Достоинство космических лучей как источника частиц — чрезвычайная широта энергетического диапазона (средняя энергия примерно 10^{10} эВ, максимальная энергия порядка 10^{20} эВ); существенные недостатки — неконтролируемость опытов, редкость событий со сверхвысокими энергиями, огромные экспериментальные трудности (прецизионную аппаратуру приходится поднимать на большую высоту).

Основными источниками частиц, применяемыми в настоящее время, являются *ускорители* (III.11.4), которые формируют интенсивные пучки заряженных частиц (электронов, протонов и тяжелых ионов) с высокими энергиями. При взаимодействии первичного пучка с мишенью получаются вторичные, третичные и т. д. пучки, содержащие элементарные частицы и атомные ядра, не существующие в природе. Максимальная энергия электронов, достигнутая в лаборатории, составляет 35 ГэВ, максимальная энергия протонов — 500 ГэВ.

С точки зрения генерации новых частиц особенно эффективны *установки со встречными пучками (коллайдеры)*, в которых сталкиваются частицы с нулевым суммарным импульсом (частицы из разных пучков обладают равными по модулю, но противоположно направленными импульсами). Благодаря этому вся начальная кинетическая энергия может быть преобразована в энергию покоя рождающихся частиц, суммарный импульс которых также равен нулю. Энергия E обычного ускорителя (с неподвижной мишенью), эквивалентного ускорителю со встречными пучками с энергией E_c , вычисляется по формуле

$$E \approx \frac{2E_c^2}{mc^2}.$$

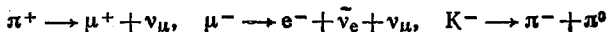
Встречные пучки впервые реализованы в СССР в 1967 г. В крупнейших современных установках сталкиваются протоны и антипротоны с энергиями $E_c = 270$ ГэВ, электроны и позитроны с энергиями $E_c = 19$ ГэВ. В последнем случае энергия E эквивалентного обычного ускорителя равна примерно $1,5 \cdot 10^{23}$ эВ, что уже гораздо больше средней энергии космических частиц.

6°. Все процессы, в которых участвуют элементарные частицы, обусловлены взаимодействиями между ними. В настоящее время различают четыре типа *фундаментальных взаимодействий* *): сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

Сильное взаимодействие свойственно тяжелым частицам, начинающимся с протонов **). Наиболее известное его проявление — ядерные силы, обуславливающие существование атомных ядер. Примеры процессов, обусловленных сильным взаимодействием: реакция рождения антипротона (п. 2°), реакции образования странных частиц (п. 4°).

В *электромагнитном взаимодействии* непосредственно участвуют только электрически заряженные частицы и фотоны. Наиболее известное его проявление — кулоновские силы (III.1.2.1°), обуславливающие существование атомов. Именно электромагнитное взаимодействие ответственно за подавляющее большинство макроскопических свойств вещества. Оно же управляет процессами рождения и аннигиляции электрон-позитронной пары (VIII.2.1.7°), процессами упругого рассеяния электронов на атомных ядрах, на протонах и друг на друге и т. д.

Слабое взаимодействие характерно для всех частиц, кроме фотонов. Наиболее известное его проявление — бета-превращения атомных ядер (VIII.1.6). Оно же обуславливает нестабильность многих элементарных частиц. Например, распады



*) См., однако, (VIII.2.4.14°).

***) За исключением тяжелого лептона τ (VIII.2.3.2°).

вызваны именно слабым взаимодействием. В последние годы интенсивно изучаются слабые процессы рассеяния нейтрино и антинейтрино на протонах и электронах.

Гравитационное взаимодействие присуще всем телам Вселенной, проявляясь в виде сил всемирного тяготения (I.6.1.1°). Эти силы обуславливают существование звезд, планетных систем и т. п. Гравитационное взаимодействие является предельно слабым (см. табл. VIII.2.1) и в мире элементарных частиц при обычных энергиях роли не играет *).

Т а б л и ц а VIII.2.1

Взаимодействие	Механизм *)	Интенсивность	Радиус, м	Характерное время, с
Сильное	обмен глюонами	~ 1	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-23}$
Электромагнитное	обмен фотонами	$1/137$	∞	$\sim 10^{-20}$
Слабое	обмен промежуточными бозонами	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-13}$
Гравитационное	обмен гравитонами	$\sim 10^{-38}$	∞	?

*) См. VIII.2.4.

7°. На полуфеноменологическом уровне фундаментальные взаимодействия различаются интенсивностями, радиусами действия и характерными временами (табл. VIII.2.1), а также свойственными им законами сохранения (VIII.2.3). С динамической точки зрения они различаются типами обменного механизма (VIII.2.4).

8°. *Интенсивность* данного взаимодействия характеризуется некоторой безразмерной величиной (*константой связи*), построенной из фундаментальных констант и соответствующего «заряда». Для электромагнитного взаимодействия такой величиной является *постоянная тонкой структуры* $\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137$. Из таблицы VIII.2.1 видно, что среди взаимодействий, которые существуют в мире элементарных частиц, сильное — самое интенсивное, слабое — наименее интенсивное, откуда и их названия. Гравитационное взаимодействие обладает предельно малой интенсивностью (п. 6°), и во Вселенной оно играет важную роль лишь потому, что массы астрономических объектов колоссальны **).

Электромагнитные и гравитационные силы относятся к силам *далекого действия*, так как с ростом расстояния они убывают медленно — по степенному (а не экспоненциальному) закону (III.1.2.1°, I.6.1.1°). Сильное взаимодействие сказывается лишь на малых расстояниях $R \sim 10^{-15}$ м (VIII.1.3.2°), радиус слабого взаимодействия еще меньше ***).

*) В мире элементарных частиц гравитация становится существенной при энергиях $E \sim 10^{26}$ эВ, которые соответствуют расстояниям $R \sim 10^{-35}$ м (!).

**) И потому, что радиус гравитационного взаимодействия бесконечен.

***) Радиусы взаимодействий связаны с массами переносящих их частиц (VIII.2.4.8°).

Понятие *характерного времени* является весьма условным. Эмпирически его можно ввести как минимальное время жизни частиц, подверженных распадам за счет данного взаимодействия. Например, характерное время сильного взаимодействия по порядку величины совпадает со средними временами жизни резонансов — самых нестабильных частиц, подверженных сильным распадам (VIII.2.1.5°). Кроме того, это время можно получить делением характерного расстояния (радиуса сильного взаимодействия) на характерную скорость (скорость света). Отношения характерных времен взаимодействий примерно совпадают с обратными отношениями их интенсивностей.

§ VIII.2.3. Лептоны и адроны

1°. На макроскопическом уровне, описываемом классической физикой, материя существует в двух формах — в виде вещества и в виде поля (III.2.1.1°). Вещество состоит из молекул, молекулы — из атомов, каждый атом — из электронной оболочки и ядра, построенного из нуклонов (протонов и нейтронов). Электроны — типичные представители класса так называемых лептонов, нуклоны — класса адронов. Фотоны — кванты электромагнитного поля — являются типичными представителями класса переносчиков взаимодействий (VIII.2.4). Вообще, содержательная систематика элементарных частиц основывается на их отношении к фундаментальным взаимодействиям.

Таблица VIII.2.2°

Семейство лептонов	Частица	Лептонный заряд			Спин, $\frac{h}{\hbar}$	Масса, МэВ	Среднее время жизни, с
		L_e	L_μ	L_τ			
Электронный дублет E	e^-	+1	0	0	1/2	0,511	∞
	ν_e	+1	0	0	1/2	$<46 \cdot 10^{-6}$	∞
Мюонный дублет M	μ^-	0	+1	0	1/2	105,66	$2,2 \cdot 10^{-6}$
	ν_μ	0	+1	0	1/2	$<0,50$	∞
Таонный дублет T	τ^-	0	0	+1	1/2	1784	$3,5 \cdot 10^{-12}$
	ν_τ	0	0	+1	1/2	<164	?

2°. *Лептонами* называются элементарные частицы, не участвующие в сильном взаимодействии (VIII.2.2.6°) и имеющие спин $J=1/2$ (III.12.1.3°, VIII.2.1.6°), т. е. являющиеся фермионами (VII.2.2.4°, VIII.2.1.6°). Их основные характеристики приведены в табл. VIII.2.2.

3°. Известно три заряженных лептона, участвующих в электромагнитном и слабом взаимодействиях: *электрон* e^- , *мюон* μ^- , *таон* τ^- . Каждому из них соответствует нейтральная частица, участвующая только в слабом взаимодействии

*) Старое название мю-мезон с современной точки зрения является неправильным, так как μ^- не относится к классу мезонов (п. 6°).

ви: электронное нейтрино ν_e , мюонное нейтрино ν_μ , таонное нейтрино ν_τ . Кроме того, у каждого лептона имеется антилептон (VIII.2.1.7°). Нейтрино разных сортов различаются характером взаимопревращений. Например, реакции



запрещены, а реакции



запрещены. Именно путем изучения подобных процессов в 1962 г. было экспериментально доказано отличие мюонных нейтрино ν_μ , рождающихся в распадах π^+ -мезонов (VIII.2.2.6°), от электронных нейтрино, участвующих, например, в β -превращениях ядер (VIII.1.6).

Итак, известно три семейства («поколения») лептонов, в каждое из которых входит заряженная частица и нейтрино: *электронный дублет* $E = (e^-, \nu_e)$, *мюонный дублет* $M = (\mu^-, \nu_\mu)$ и *таонный дублет* $T = (\tau^-, \nu_\tau)$. Всем лептонам присписывается *лептонный заряд* $L = +1$, для антилептонов $L = -1$. Лептонный заряд разбивается на три компонента: $L = L_e + L_\mu + L_\tau$, где L_e — *электронный заряд* *), L_μ — *мюонный заряд*, L_τ — *таонный заряд*. Значения этих квантовых чисел для лептонов приведены в табл. VIII.2.2, для антилептонов они имеют противоположные знаки.

Пока считается, что лептонный заряд и его отдельные компоненты сохраняются во всех взаимодействиях. Сохранение L обуславливает, в частности, то, что в β_+ -распадах и К-захватах участвуют нейтрино ν_e , а в β_- -распадах — антинейтрино $\bar{\nu}_e$ (VIII.1.6.). Законы сохранения L_e и L_μ разрешают две первые и запрещают две последние реакции. Однако законы сохранения лептонного заряда и его компонентов проверены на опыте с не очень высокой точностью.

4°. До недавних пор нейтрино считались безмассовыми (в таблице VIII.2.2 указаны экспериментальные границы для значений их масс). В 1980 г. был установлен нижний предел на массу нейтрино: $m_\nu > 14$ эВ. Однако из-за крайней сложности измерений и обработки их результатов этот вывод пока не подтвержден другими экспериментами. Наличие у нейтрино ненулевой массы привело бы к важным физическим (п. 4°) и даже космологическим следствиям **). В частности, если $m_\nu \neq 0$, а законы сохранения лептонных зарядов в какой-то степени нарушаются (п. 3°), то возможно возникновение *нейтринных осцилляций*, т. е. самопроизвольных взаимопревращений $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e$, $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ и т. п.

5°. *Адронами* называются элементарные частицы, которые могут участвовать и реально участвуют в сильном взаимодействии; все они участвуют также в электромагнитном и слабом (и в гравитационном) взаимодействиях (VIII.2.2.6°). Классификация адронов и их основные характеристики указаны в таблице VIII.2.3.

6°. Различают *стабильные* (точнее, метастабильные) *адроны*, со средними временами жизни $\tau \gg 10^{-23}$ с и *резонансы* (VIII.2.1.5°), времена жизни которых $\tau \sim 10^{-24} - 10^{-23}$ с совпадают по порядку величины с характерным временем сильного взаимодействия (табл. VIII.2.1). Стабильные частицы распадаются за счет

*) Не путать с электрическим зарядом.

***) В частности, если $m_\nu \neq 0$, то не исключена возможность, что наша Вселенная — замкнутая. Это означает, что она конечна (но безгранична), и что теперешний период ее расширения сменится сжатием.

Таблица VIII.2.3*)

Семейства адронов		Частицы	Спин, \hbar	Масса, МэВ	Среднее время жизни, с	Кварковый состав **)	
Мезоны ($B=0$)	«Обычные» ($S=C=0$)	Пионы π ($T=1, S \neq 0, C=0$)	π^\pm π^0	0	139,57 134,96	$2,6 \cdot 10^{-8}$ $0,8 \cdot 10^{-16}$	$u\bar{d}$ ($d\bar{u}$) $u\bar{u}, d\bar{d}$
		Эта-мезон η ($T=0, S=0, C=0$)	η^0	0	548,8	$0,7 \cdot 10^{-18}$	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$
	Странные ($S \neq 0$)	Каоны K^{***} ($T=1/2, S=+1, C=0$)	K^+	0	493,67	$1,2 \cdot 10^{-8}$ $\left\{ \begin{array}{l} K_S^0: 0,9 \cdot 10^{-10} \\ K_L^0: 5,2 \cdot 10^{-8} \end{array} \right.$	$u\bar{s}$ $d\bar{s}$
			K^0		497,7		
	Очарованные ($C \neq 0$)	D-мезоны ($T=1/2, S=0, C=+1$)	D^+	0	1869	$9 \cdot 10^{-13}$ $5 \cdot 10^{-13}$	$c\bar{d}$ $c\bar{u}$
			D^0		1865		
	F-мезон ($T=0, S=+1, C=+1$)	F^+	0	1971	$2 \cdot 10^{-13}$	$c\bar{s}$	
Барионы ($B=+1$)	«Обычные» ($S=C=0$)	Нуклоны N ($T=1/2, S=0, C=0$)	p	1/2	938,28	$> 10^{32}$ лет 898 ± 16	uud udd
			n		939,57		
	Странные ($S \neq 0$)	Лямбда-гиперон Λ ($T=0, S=-1, C=0$)	Λ^0	1/2	1115,6	$2,6 \cdot 10^{-10}$	uds
			Σ^+ Σ^0 Σ^-	1/2	1189,4	$0,8 \cdot 10^{-10}$ $5 \cdot 10^{-20}$ $1,5 \cdot 10^{-10}$	uus uds dds
					1192,5		
					1197,3		
Ξ^0 Ξ^-	1/2	1315	$2,9 \cdot 10^{-10}$ $1,6 \cdot 10^{-10}$	uss dss			
		1321,3					
Омега-гиперон Ω ($T=0, S=-3, C=0$)	Ω^-	3/2	1672,5	$0,8 \cdot 10^{-10}$	sss		
Очарованные ($C \neq 0$)	Лямбда-це-гиперон Λ_c ($T=0, S=0, C=+1$)	Λ_c^+	1/2	2282	$(2-3) \cdot 10^{-13}$	udc	

*) В таблицу не включены резонансы и античастицы (кроме π^-).

**) См. (VIII.2.4.5*).

***) Нейтральные каоны распадаются из состояний K_S^0 и K_L^0 , являющихся суперпозициями состояний частицы K^0 и античастицы \bar{K}^0 .

электромагнитного или слабого взаимодействий, резонансы — за счет сильного взаимодействия. Последнее свойство является главным для резонансов, и оно может служить наиболее адекватным их определением. Группа резонансов наиболее многочисленна: она включает несколько сотен частиц, которые в табл. VIII.2.3 не представлены.

7°. Стабильные адроны, обладающие целыми спинами, т. е. являющиеся бозонами (VII.2.2.1°, VIII.2.1.6°), называются *мезонами*; адроны с полуцелыми спинами, т. е. фермионы (VII.2.2.4°, VIII.2.1.6°), именуются *барионами*. Аналогично определяются *мезонные резонансы* и *барионные резонансы*. Барионам и барионным резонансам приписывается *барионный заряд* $B=+1$, антибарионам и их резонансам — барионный заряд $B=-1$, у всех остальных частиц $B=0$ (сравни с п. 3°).

8°. Класс адронов разбивается на *изомультиплеты* — небольшие семейства, члены которых тождественны по отношению к сильному взаимодействию, а все различия они обретают за счет электромагнитного (и отчасти за счет слабого) взаимодействия. Наиболее характерный внешний признак принадлежности частиц к одному изомультиплету — приближенное равенство их масс при разных значениях электрического заряда. Типичный пример изомультиплета дает нуклонный изодублет N , содержащий протон p и нейтрон n . Тождественность протона и нейтрона по отношению к сильному взаимодействию находит выражение в свойстве зарядовой независимости ядерных сил (VIII.1.3.3°).

Изомультиплету в целом приписывается *изоспин* T , который определяет число его членов N по формуле $N=2T+1$. Отдельные члены изомультиплета различаются значениями *проекции изоспина* T_3 , изменяющейся от $-T$ до T через единицу в порядке возрастания электрического заряда. Пример: для нуклона $N=2$, а потому $T=1/2$; у нейтрона $T_3=-1/2$, у протона $T_3=+1/2$.

9°. Первоначально из адронов были известны только нуклоны и пионы. Электрические заряды этих «обычных» частиц могут быть вычислены по простой формуле $q=T_3+B/2$. В 50-е гг. открыты *странные частицы* (VIII.2.1.5°), которым было приписано новое квантовое число — *странность* S . Она вводится так, чтобы электрические заряды странных частиц удовлетворяли *соотношению Гелл-Манна — Нишиджимы*

$$q = T_3 + \frac{1}{2}(B+S).$$

После открытия в 70-х гг. *очарованных* частиц эта формула потребовала дальнейшего обобщения:

$$q = T_3 + \frac{1}{2}(B+S+C),$$

где C — *очарование* (*чарм*). Имеются четкие экспериментальные указания на существование «преlestных» частиц, а теория предсказывает «истинные» частицы. Обобщения последней формулы для них очевидны.

10°. Смысл введенных здесь и ранее квантовых чисел в том, что они *сохраняются* в определенных классах взаимопревращений частиц (VIII.2.2.2°). Фундаментальные взаимодействия различаются не только характеристиками, приведенными в таблице VIII.2.1, но и свойственными им законами сохранения (VIII.2.2.7°). Чем более интенсивно взаимодействие, тем оно более симметрично, т. е. тем больше ему присуще законов сохранения.

а) Во всех взаимодействиях сохраняются только энергия и импульс (I.5.6.2°, I.5.7.2°), момент импульса (I.4.4.1°) и электрический заряд (III.1.1.3°). Пока считается, что этим свойством обладают также лептонные заряды (п. 3°) и барионный заряд (п. 7° *). Из закона сохранения энергии следует, в частности, необходимое условие распадов (VIII.2.2.2°). Совместно с законом сохранения электрического заряда он обуславливает абсолютную стабильность электрона (**), совместно с законом сохранения барионного заряда — абсолютную стабильность протона *).

б) Сильное взаимодействие наиболее симметрично. В обусловленных им процессах сохраняются также изоспин и его проекции (п. 8°), странность и очарование (п. 9°) и многие другие квантовые числа. Сохранение T -и T_3 равнозначно зарядовой независимости сильного взаимодействия (VIII.1.3.3°). Сохранение S объясняет, в частности, почему в процессах соударений «обычных» частиц странные частицы всегда рождаются парами (VIII.2.2.4°).

в) Слабое взаимодействие наименее симметрично. Ему свойственны только универсальные законы сохранения (а). Именно благодаря несохранению S (C) странные (очарованные) частицы могут распадаться поодиночке, превращаясь в «обычные» частицы.

§ VIII.2.4. Фундаментальные частицы

1°. Совсем недавно уровень элементарных частиц (VIII.2.1.1°) считался единым, а лептоны, адроны и переносчики взаимодействий (VIII.2.3.1°) трактовались на более или менее равной основе. В настоящее время этот уровень расщеплен на подуровни адронов и фундаментальных частиц. Первые рассматриваются в качестве составных, а последние — в качестве истинно элементарных частиц. В результате картина строения материи в значительной степени унифицировалась и упростилась, и открылись возможности описания всех частиц и взаимодействий на некоей единой основе. Но следует подчеркнуть, что проблема истинной элементарности фундаментальных частиц чрезвычайно сложна и до конца не решена.

2°. Лептоны (табл. VIII.2.2) считаются фундаментальными частицами. Во-первых, их всего лишь шесть; во-вторых, они или абсолютно стабильны, или живут долго по ядерным масштабам; в-третьих, лептоны ведут себя как точечные объекты. Так, электрон не обнаруживает размеров, а тем более внутренней структуры, даже при сверхвысоких энергиях $E \approx 40$ ГэВ, т. е. вплоть до расстояний $R \approx 2 \cdot 10^{-18}$ м***) (VIII.2.1.2°).

3°. Согласно современным воззрениям адроны (табл. VIII.2.3) — составные частицы. Во-первых, их очень много — несколько сотен. Далее, большинство адронов является резонансами — крайне нестабильными частицами (VIII.2.3.6°). Но главное, у адронов обнаружена внутренняя структура. Из результатов опытов по упругому рассеянию электронов на нуклонах (VIII.2.2.2°) явствует, что

*) См., однако, (VIII.2.4.15°).

**) Электрон — самая легкая из электрически заряженных частиц.

***) Эти результаты получены в 1982 г. в опытах со встречными электрон-позитронными пучками.

радиусы протона и нейтрона *) равны примерно $0,8 \cdot 10^{-15}$ м и что электрический заряд и магнитный момент распределены в них плавно, спадая от центра к периферии по экспоненциальному закону. Мало того, опыты по неупругому рассеянию электронов высоких энергий на нуклонах выявили зернистую («партонную») структуру протона и нейтрона.

4°. Считается, что все адроны состоят из кварков — дробнозаряженных фундаментальных частиц. При этом предполагается, что их имеется шесть сортов, или «ароматов». Как и лептоны (VIII.2.3.3°), они образуют три дублета, или поколения: (u, d), (c, s), (t, b), так что имеет место довольно глубокая с теоретической точки зрения кварк-лептонная симметрия. Трём дублетам антилептонов соответствуют три поколения антикварков. Значения основных квантовых чисел кварков первых двух поколений приведены в табл. VIII.2.4.

Таблица VIII.2.4

Кварк	Сям-вол	J	B	T	T_3	S	C	q
Верхний (up)	u	$1/2$	$+1/3$	$1/2$	$+1/2$	0	0	$+2/3$
Нижний (down)	d	$1/2$	$+1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0	$-1/3$
Странный (strange)	s	$1/2$	$+1/3$	0	0	-1	0	$-1/3$
Очарованный (charm)	c	$1/2$	$+1/3$	0	0	0	$+1$	$+2/3$

5°. Каждый мезон M строится из одного кварка q и одного антикварка \bar{q} , каждый барион B — из трех кварков: $M=q\bar{q}$, $B=qqq$ (см. табл. VIII.2.3). В состав обычных адронов входят только кварки u и d , странные адроны включают один или несколько кварков s . В 1974 г. открыт мезон J/ψ , интерпретированный как связанное состояние пары $c - \bar{c}$; впоследствии зарегистрированы и мезоны с явным очарованием ($C \neq 0$): $D^0 = \bar{c}u$, $F^+ = \bar{c}s$ и другие (VIII.2.1.5°, табл. VIII.2.3). В 1977 г. открыт ипсилон-мезон Υ (VIII.2.1.5°), обладающий «скрытой прелестью»: $\Upsilon = b\bar{b}$; практически идентифицирован также B -мезон с «явной прелестью». Адроны, включающие кварк t , пока не зарегистрированы.

6°. Чтобы построить Ω^- -гиперон ($S = -3$, $J = 3/2$), необходимы три кварка s ($S = -1$, $J = 1/2$) с параллельными спинами, что противоречит принципу Паули (VI.2.3.1°). Для разрешения этой трудности кваркам было приписано дополнительное квантовое число, принимающее три значения. Оно именуется цветом со значениями: R (red — красный), G (green — зеленый), B (blue — голубой). Антикваркам приписываются «антицвета» \bar{R} , \bar{G} , \bar{B} , которые можно рассматривать как дополнительные к основным цветам R, G, B **).

Мезоны можно считать составленными из одного кварка и одного антикварка, представленными всеми цветами (например, в символической форме записи, $\pi^+ =$

*) Имеются в виду среднеквадратичные радиусы распределения электрического заряда и магнитного момента в нуклонах.

**) Разумеется, к физиологии зрения «цвет» никакого отношения не имеет, но принятая терминология весьма удобна.

$=u_R\bar{d}_R + u_G\bar{d}_G + u_B\bar{d}_B$), а барионы строятся из трех кварков разных цветов (скажем, $\Omega^- = s_R s_G s_B$), так что принцип Паули не нарушается. Таким образом, реально наблюдаемые адроны являются белыми, или бесцветными частицами. Этим же свойством обладают и лептоны, только у них, как у фундаментальных частиц, нет даже «скрытого» цвета.

7°. Кварки интенсивно искали, но безуспешно. Сейчас общепринятой является точка зрения, согласно которой кварки, будучи цветными объектами, в принципе не могут существовать в свободном состоянии, а входят только в состав белых частиц — адронов. Теоретическое обоснование «конфайнмента» цвета (его «удержания», «пленения») находится пока в стадии разработки. Однако справедливость модели кварков в целом не вызывает сомнений. Она позволила разобраться со всем многообразием адронов и их свойств, а многие ее нетривиальные предсказания нашли экспериментальное подтверждение.

8°. Третий класс (наряду с лептонами и кварками) фундаментальных частиц составляют *переносчики взаимодействий*. Крупнейшим достижением физики 70-х гг. является установление единства механизмов фундаментальных взаимодействий. Их *элементарными актами* являются процессы испускания и поглощения данной частицей некоторой другой частицы, как раз и определяющей тип взаимодействия. Силы, действующие между двумя частицами, трактуются как результат их обмена промежуточной частицей (сравн. с VIII.1.3.6°), которая и называется переносчиком взаимодействия. Таким образом, механизмы всех фундаментальных взаимодействий — *обменные*. Конкретные их переносчики вместе с основными характеристиками указаны в таблице VIII.2.5 (см. также

Т а б л и ц а VIII.2.5

Взаимодействие	Переносчики	Символ	J, \hbar	Масса, ГэВ	Аромат	Цвет
Сильное Электромагнитное	8 глюонов	g_i	1	0	—	+
	1 фотон	γ	1	0	—	—
Слабое Гравитационное	3 промежуточных бозона	W^\pm Z^0	1	≈ 80 ≈ 90	+	—
	1 гравитон	G	2	0	—	—

табл. VIII.2.1). Радиус данного взаимодействия (табл. VIII.2.1) связан с массой его переносчика соотношением типа (VIII.1.3.6°): $R \sim \hbar/mc$ *).

9°. Переносчик электромагнитного взаимодействия — нейтральный безмассовый фотон γ . Вероятность испускания и поглощения фотона частицей определяется ее электрическим зарядом, который, тем самым, служит мерой интенсивности электромагнитного взаимодействия (VIII.2.2.8°). Так как $m_\gamma = 0$, то радиус электромагнитного взаимодействия бесконечно велик (VIII.2.2.8°, п. 8°). В нем участвуют все

*) Исключение составляет сильное взаимодействие, так как, подобно кваркам, его переносчики глюоны подвержены конфайнменту (п. 7°, 9°).

кварки и заряженные лептоны, а также сам фотон. При испускании и поглощении фотона аромат и цвет фундаментальных частиц не изменяется. Предсказания теории электромагнитного взаимодействия — *квантовой электродинамики* — совпадают с результатами измерений с точностью до десяти (!) значащих цифр.

10°. Переносчики сильного взаимодействия — восемь электрически нейтральных безмассовых *глюонов* g_i , несущих цвет и антицвет. Испуская глюон или поглощая его, кварк изменяет свой цвет, но не аромат. Например, кварк u_R может испустить глюон $R\bar{G}$, превращаясь в u_G , а кварк u_G может поглотить этот глюон, превращаясь в u_R . Таким образом, аналогом электрического заряда для сильного взаимодействия является *цвет* *), благодаря чему в нем могут непосредственно участвовать только кварки, но не лептоны. Сами глюоны подвержены только сильному (и практически несущественному гравитационному) взаимодействию. Наблюдаемое взаимодействие между белыми адронами, в частности ядерные силы, есть результат наличия у них «скрытого» цвета. В процессах сильного взаимодействия ароматы кварков не меняются, чем сразу объясняется сохранение в них квантовых чисел типа странности (VIII.2.3.9°). Современной теорией сильного взаимодействия является *квантовая хромодинамика*, основы которой заложены, но которая пока не завершена. Она предсказывает взаимодействие глюонов друг с другом, которое, по-видимому, и приводит к явлению конфайнмента (п. 7°).

11°. Переносчики слабого взаимодействия — *промежуточные бозоны* W^+ , W^- , Z^0 , которые несут электрический заряд и обладают большими массами (табл. VIII.2.5). Благодаря последнему обстоятельству радиус слабого взаимодействия очень мал (табл. VIII.2.1, п. 8°). Промежуточные бозоны могут испускаться и поглощаться как лептонами, так и кварками, и поэтому в слабом взаимодействии участвуют практически все известные частицы (кроме фотона и глюонов). Сами промежуточные бозоны участвуют в слабом и электромагнитном (и гравитационном) взаимодействиях, но не подвержены сильному взаимодействию. Обмен ими изменяет аромат, но не цвет фундаментальных частиц. Адекватная теория слабого взаимодействия создана совсем недавно, и многие ее предсказания уже подтверждены на опыте. Промежуточные бозоны — сначала W^\pm , а затем Z^0 — зарегистрированы в 1983 г. во встречных протон-антипротонных пучках с энергией 270 ГэВ.

12°. Переносчик гравитационного взаимодействия — нейтральный безмассовый *гравитон* G . Это взаимодействие универсально: в нем участвуют все частицы. Квантовая теория гравитации только начинает создаваться. Экспериментальная регистрация гравитонов откладывается на неопределенный срок **).

13°. Таким образом, в настоящее время начала вырисовываться стройная картина строения материи. Ее составными элементами являются кварки шести сортов (п. 3°—7°) и лептоны также шести сортов (п. 2°), взаимодействия между которыми возникают за счет обмена соответствующими переносчиками (п. 8°—13°). Электромагнитное взаимодействие не изменяет ни аромат, ни цвет фундаментальных частиц, сильное взаимодействие изменяет их цвет, но не аромат, слабое взаимодействие изменяет аромат, но не цвет (табл. VIII.2.5).

*) Хотя первоначально он был введен только для того, чтобы не нарушался принцип Паули (п. 6°).

**) Пока не поддаются детектированию даже гравитационные волны.

14°. Мало того, выявление общего механизма (обменного) всех фундаментальных взаимодействий (п. 8°) вселяет надежду на возможность построения единых теорий. Практически завершенной можно считать единую теорию электромагнитного и слабого взаимодействий, которые выступают в качестве разных проявлений одного *электрослабого* взаимодействия. Довольно успешны попытки «великого объединения» электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий в одно *электростроительное* взаимодействие. Некоторые успехи достигнуты и в объединенном описании всех четырех фундаментальных взаимодействий.

15°. Все схемы «великого объединения» включают обмен чрезвычайно тяжелыми ($m \sim 10^{15}$ ГэВ) частицами, приводящий к изменению как цвета, так и аромата (сравни с п. 13°). В результате кварки и лептоны могут превращаться друг в друга, и барионный заряд перестает строго сохраняться (VIII.2.3.10°). Следствием этого является крайне малая *нестабильность протона*, который может распадаться, например, по схеме $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ со средним временем жизни $\tau_p = 10^{30 \pm 3}$ лет. В 1984 г. установлен экспериментальный предел $\tau_p > 10^{32}$ лет, но поиски распадов протонов, квалифицируемые как «эксперимент века», продолжают. Обнаружение нестабильности протона подтвердило бы правильность основных направлений, по которым ведется в настоящее время создание единой картины строения материи,

ДОПОЛНЕНИЯ

§ IX.1. Системы единиц физических величин

1°. *Единицей физической величины* называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же физический смысл, что и рассматриваемая. *Системой единиц* называется совокупность единиц физических величин, относящаяся к некоторой системе величин и образованная в соответствии с принятыми правилами. *Основными единицами* данной системы единиц называются единицы нескольких разнородных физических величин, произвольно-выбранные при построении этой системы. Соответствующие физические величины называются *основными величинами* данной системы. Система единиц называется *абсолютной*, если ее основными физическими величинами являются длина, масса и время.

Производными единицами называются единицы, устанавливаемые через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими физическими величинами.

2°. *Размерностью физической величины* называется выражение, характеризующее связь этой физической величины с основными величинами данной системы единиц. Это выражение представляет собой одночлен в виде произведения символов основных величин в соответствующих степенях (целых или дробных, положительных или отрицательных). Физическая величина называется *безразмерной*

Т а б л и ц а IX.1

Множитель	Приставка			Множитель	Приставка		
	Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение	
		русское	международное			русское	международное
10 ¹⁸	экса	Э	E	10 ⁻¹	(деци)	д	d
10 ¹⁵	пета	П	P	10 ⁻²	(сантиметр)	с	с
10 ¹²	тера	Т	T	10 ⁻³	милли	м	т
10 ⁹	гига	Г	G	10 ⁻⁶	микро	мк	μ
10 ⁶	мега	М	M	10 ⁻⁹	нано	н	п
10 ³	кило	к	k	10 ⁻¹²	пико	п	p
10 ²	(гекто)	г	h	10 ⁻¹⁵	фемто	ф	f
10 ¹	(дека)	да	da	10 ⁻¹⁸	атто	а	a

Примечание. В скобках указаны приставки, которые допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (например, гектар, декалитр, дециметр, сантиметр).

Таблица IX.2а. Основные единицы СИ

Величина		Единица СИ				Определение
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение			
			русское	международное		
Длина	L	метр	м	m	<i>Метр</i> —единица длины, равная расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299792458$ долей секунды.	
Масса	M	килограмм	кг	kg	<i>Килограмм</i> —единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.	
Время	T	секунда	с	s	<i>Секунда</i> —единица времени, равная $9\,192\,631\,770$ периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.	
Сила электрического тока	I	ампер	A	A	<i>Ампер</i> —сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.	
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K	K	<i>Кельвин</i> —единица термодинамической температуры, равная $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды.	
Количество вещества	N	моль	моль	mol	<i>Моль</i> —единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и др. частиц или специфицированных групп частиц), сколько содержится атомов в углероде-12 массой $0,012$ кг.	

Таблица IX.2а (продолжение)

Величина		Единица СИ			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Определение
			русское	международное	
Сила света	J	кандела	кд	cd	<i>Кандела</i> — единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{12}$ Гц (540 ТГц), сила излучения которого (в этом направлении) составляет 1/683 Вт/ср.

величиной, если в выражение ее размерности все основные величины входят в нулевой степени. Численное значение безразмерной величины не зависит от выбора системы единиц.

3°. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования приведены в табл. IX.1.

4°. В СССР применяется в качестве предпочтительной Международная система единиц (СИ), в которой использовано 7 основных единиц — метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела и 2 дополнительные единицы — радиан и стерadian. Определения и обозначения этих единиц приведены в табл. IX.2а и IX.2б.

Таблица IX.2б. Дополнительные единицы СИ

Величина		Единица СИ			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Определение
			русское	международное	
Плоский угол	—	радиан	рад	rad	<i>Радиан</i> — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.
Телесный угол	—	стерадиан	ср	sr	<i>Стерадиан</i> — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу этой сферы.

Таблица IX.3. Производные единицы

Величина		Производная единица СИ			Примечание
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		
			русское	международное	
<i>1. Производные единицы пространства и времени</i>					
Площадь	L^2	квадратный метр	m^2	m^2	
Объем, вместимость	L^3	кубический метр	m^3	m^3	
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	m/c	m/s	
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	m/c^2	m/s^2	
Частота	T^{-1}	герц	Гц	Hz	
Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	c^{-1}	s^{-1}	
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	rad/s	
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	rad/s ²	
<i>2. Производные единицы механических величин</i>					
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	kg/m^3	
Момент инерции	L^2M	килограмм-метр в квадрате	$кг \cdot м^2$	$kg \cdot m^2$	
Импульс	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	$кг \cdot м/с$	$kg \cdot m/s$	
Момент импульса	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате в секунду	$кг \cdot м^2/с$	$kg \cdot m^2/s$	
Сила	LMT^{-2}	ньютон	Н	N	1 Н = 1 кг·м/с ²
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н·м	N·m	
Импульс силы	LMT^{-1}	ньютон-секунда	Н·с	N·s	
Давление, напряжение (механическое), модуль упругости	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	Pa	1 Па = 1 Н/м ²

Таблица IX.3 (продолжение)

Величина		Производная единица СИ			Примечание
		Наименование	Обозначение		
Размерность	русское		международное		
Поверхностное натяжение	$M T^{-2}$	ньютон на метр	Н/м	N/m	
Работа, энергия	$L^2 M T^{-2}$	джоуль	Дж	J	1 Дж = 1 Н·м
Мощность	$L^2 M T^{-3}$	ватт	Вт	W	1 Вт = 1 Дж/с
Динамическая вязкость	$L^{-1} M T^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с	Pa·s	
Кинематическая вязкость	$L^2 T^{-1}$	квадратный метр на секунду	м ² /с	m ² /s	
3. Производные единицы тепловых величин					
Количество теплоты, внутренняя энергия	$L^2 M T^{-2}$	джоуль	Дж	J	1 Дж = 1 Н·м
Удельное количество теплоты	$L^2 T^{-2}$	джоуль на килограмм	Дж/кг	J/kg	
Теплоемкость и энтропия системы	$L^2 M T^{-2} \theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	J/K	
Теплоемкость удельная	$L^2 T^{-2} \theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)	
Теплоемкость молярная	$L^2 M T^{-2} N^{-1} \theta^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль·К)	J/(mol·K)	
Теплопроводность	$L M T^{-3} \theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м·К)	W/(m·K)	
4. Производные единицы электрических и магнитных величин					
Плотность электрического тока	$L^{-2} I$	ампер на квадратный метр	А/м ²	A/m ²	

Таблица IX. 3 (продолжение)

Наименование	Размерность	Наименование	Производная единица СИ		Примечание
			русское	международное	
Электрический заряд	T I	кулон	Кл	C	1 Кл = 1 А·с
Плотность электрического заряда		кулон на метр	Кл/м	C/m	
а) линейная	L ⁻¹ T I	кулон на квадратный метр	Кл/м ²	C/m ²	
б) поверхностная	L ⁻² T I	кулон на кубический метр	Кл/м ³	C/m ³	
в) объемная	L ⁻³ T I	кулон на квадратный метр	Кл/м ²	C/m ²	
Поляризованность, электрическое смещение		кулон-метр	Кл·м	C·m	
Электрический момент диполя	L T I	кулон-метр	Кл·м	C·m	
Поток смещения	T I	кулон	Кл	C	
Электрический потенциал, напряжение, Э. Д. С.	L ² M T ⁻² I ⁻¹	вольт	В	V	1 В = Дж/Кл
Напряженность электрического поля	L M T ⁻² I ⁻¹	вольт на метр	В/м	V/m	
Электрическая емкость	L ⁻² M ⁻¹ T ⁴ I ²	фарад	Ф	F	1 Ф = 1 Кл/В
Электрическая постоянная	L ⁻² M ⁻¹ T ⁴ I ²	фарад на метр	Ф/м	F/m	
Электрическое сопротивление	L ² M T ⁻² I ⁻²	ом	Ом	Ω	1 Ом = 1 В/А
Удельное электрическое сопротивление	L ³ M T ⁻² I ⁻²	ом-метр	Ом·м	Ω·m	
Электрическая проводимость	L ⁻² M ⁻¹ T ² I ²	сименс	См	S	1 См = 1 А/В

Таблица IX.3 (продолжение)

Величина		Прозвожденная единица СИ			Примечание
		Наименование	Обозначение		
Наименование	Размерность		Наименование	русское	международное
Удельная электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	сименс на метр	См/м	S/m	$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	Wb	
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	T	$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А} \cdot \text{м})$
Магнитодвижущая сила	I	ампер	А	A	
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	A/m	
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	H	$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб}/\text{А}$
Магнитная постоянная	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	H/m	
Магнитный момент электрического тока	L^2I	ампер-квадратный метр	А·м ²	A·m ²	
Намагниченность	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	A/m	
Магнитное сопротивление	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	ампер на вебер	А/Вб	A/Wb	

Таблица IX.3 (продолжение)

Величина		Производная единица СИ			Примечание
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		
			русское	международное	
5. Производные единицы световых величин и величин энергетической фотометрии					
Световой поток	J	люмен	лм	lm	
Освещенность	L ⁻² J	люкс	лк	lx	1 лк = 1 лм/м ²
Светимость	L ⁻² J	люмен на квадратный метр	лм/м ²	lm/m ²	
Яркость	L ⁻² J	кандела на квадратный метр	кд/м ²	cd/m ²	
Поток излучения	L ² MT ⁻³	ватт	Вт	W	
Энергетическая освещенность и светимость	MT ⁻³	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	W/m ²	
Энергетическая яркость	MT ⁻³	ватт на стерадиан-квадратный метр	Вт/(ср.м ²)	W/(sr. m ²)	
Спектральная плотность энергетической светимости					
а) по длине волны	L ⁻¹ MT ⁻³	ватт на метр в кубе	Вт/м ³	W/m ³	
б) по частоте	MT ⁻³	джоуль на квадратный метр	Дж/м ²	J/m ²	

Таблица IX.5. Производные единицы СГС электрических величин

Величина		Производная единица СГС	
Наименование	Размерность	Наименование	Значение в единицах СИ
Сила электрического тока	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	—	$10/c$ А
Плотность электрического тока	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}$	—	$10^5/c$ А/м ²
Электрический заряд	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10/c$ Кл
Плотность электрического заряда			
а) линейная	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^3/c$ Кл/м
б) поверхностная	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^5/c$ Кл/м ²
в) объемная	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^7/c$ Кл/м ³
Поляризованность	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^5/c$ Кл/м ²
Электрический момент диполя	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$1/(10c)$ Кл·м
Поток электрического смещения	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10/(4\pi c)$ Кл
Электрическое смещение	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^5/(4\pi c)$ Кл/м ²
Электрический потенциал, э. д. с., напряжение	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^{-6}c$ В
Напряженность электрического поля	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^{-6}c$ В/м
Электрическая емкость	Л	сантиметр	$10^9/c^2$ Ф
Электрическое сопротивление	$L^{-1}T$	—	$10^{-9}c^2$ Ом
Электрическое сопротивление удельное	Т	—	$10^{-11}c^2$ Ом·м
Электрическая проводимость	LT^{-1}	—	$10^9/c^2$ См

Т а б л и ц а IX.6. Производные единицы СГС магнитных величин

Величина		Производная единица СГС			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Значение в единицах СИ
			русское	международное	
Магнитный поток	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	максвелл	Мкс	Mx	10^{-8} Вб
Магнитная индукция	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	гаусс	Гс	Gs	10^{-4} Тл
Магнитодвижущая сила	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	гильберт	Гб	Gb	$10/(4\pi)$ А
Напряженность магнитного поля	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	эрстед	Э	Oe	$10^3/(4\pi)$ А/м
Индуктивность, взаимная индуктивность	L	сантиметр	см	сп	10^{-9} Гн
Магнитный момент электрического тока	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	—	10^{-3} А·м ²
Намагниченность	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	—	10^3 А/м
Магнитное сопротивление	L^{-1}	—	—	—	$10^9/(4\pi)$ А/Вб

Т а б л и ц а IX.7. Внесистемные единицы, допускаемые к применению в физике и астрономии

Наименование величины	Внесистемная единица			
	Наименование	Обозначение		Значение в единицах СИ
		русское	международное	
Длина	астрономическая единица	а. е.	—	$1,49600 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св. год	л. у.	$9,4605 \cdot 10^{16}$ м
	парсек	пк	рс	$3,0857 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	дптр	—	1 м^{-1}
Масса	атомная единица массы	а. е. м.	а	$1,66057 \cdot 10^{-27}$ кг
Площадь	барн	б	б	10^{-28} м ²
Энергия	электронвольт	эВ	eV	$1,60219 \cdot 10^{-19}$ Дж

Таблица IX.8. Внесистемные единицы, допускаемые наравне с единицами СИ

Наименование величины	Внесистемная единица			
	Наименование	Обозначение		Значение в единицах СИ
		русское	международное	
Площадь (земельных участков)	гектар	га	ha	10^4 м^2
Объем, вместимость	литр	л	l	10^{-3} м^3
Плоский угол	градус	...°	...°	$\pi/180 \text{ рад}$
	минута	...'	...'	$\pi/10800 \text{ рад}$
	секунда	..."	..."	$\pi/648000 \text{ рад}$
Время	минута	мин	min	60 с
	час	ч	h	3600 с
	сутки	сут	d	86400 с
	неделя	—	—	—
	месяц	мес	—	—
	год	год	—	—
Масса	тонна	т	t	10^3 кг
Температура Цельсия, разность температур	градус Цельсия	°C	°C	Температура Цельсия $t = T - 273,15$, где T — термодинамическая температура. По размеру градус Цельсия равен кельвину.

§ IX.2. Фундаментальные физические константы

В таблице IX.9 использованы значения физических констант, приведенные в статье «Рекомендуемые согласованные значения фундаментальных физических постоянных — 1973 г.» (См. «Фундаментальные физические константы». ГСССД 1—76.— М.: Издательство стандартов, 1976, а также УФН, 1975, т. 115, с. 623—633). Числа в круглых скобках указывают стандартную погрешность в последних цифрах значения величины, приведенного в табл. IX.9.

Таблица IX.9

Величина	Обозначение	Значение	Относительная погрешность, 10^{-4}
1. Атомная единица массы	$1 \text{ а. е. м.} = \frac{1}{N_A} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$	$1,6605655 (86) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$	5,1
2. Заряд элементарный	e	$1,6021892 (46) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$	2,9
3. Заряд удельный электрона	$-e/m_e$	$-1,7588047 (49) \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$	2,8
4. Комptonовская длина волны нейтрона	$\lambda_{K, n} = h/(m_n c)$	$1,3195909 (22) \cdot 10^{-15} \text{ м}$	1,7
	$\lambda_{K, n} = \lambda_{K, n} / 2\pi$	$2,1001941 (35) \cdot 10^{-16} \text{ м}$	1,7
5. Комptonовская длина волны протона	$\lambda_{K, p} = h/(m_p c)$	$1,3214099 (22) \cdot 10^{-15} \text{ м}$	1,7
	$\lambda_{K, p} = \lambda_{K, p} / 2\pi$	$2,1030892 (36) \cdot 10^{-16} \text{ м}$	1,7
6. Комptonовская длина волны электрона	$\lambda_{K, e} = h/(m_e c)$	$2,4263089 (40) \cdot 10^{-12} \text{ м}$	1,6
	$\lambda_{K, e} = \lambda_{K, e} / 2\pi$	$3,8615905 (64) \cdot 10^{-13} \text{ м}$	1,6
7. Магнетон Бора	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9,274078 (36) \cdot 10^{-24} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$	3,9
8. Ядерный магнетон	$\mu_{яд} = e\hbar/2m_p$	$5,050824 (20) \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$	3,9
9. Магнитный момент протона	μ_p	$1,4106171 (55) \cdot 10^{-26} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$	3,9
	μ_p/μ_B	$1,521032209 (16) \cdot 10^{-2}$	0,011
	$\mu_p/\mu_{яд}$	$2,7928456 (11)$	0,38
10. Магнитный момент электрона	μ_e	$9,284832 (36) \cdot 10^{-24} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$	3,9
	μ_e/μ_p	$658,2106880 (66)$	0,010
11. Масса покоя нейтрона	m_n	$1,6749543 (86) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$	5,1
		$1,008665012 (37) \text{ а. е. м.}$	0,037
12. Масса покоя протона	m_p	$1,6726485 (86) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$	5,1
		$1,007276470 (11) \text{ а. е. м.}$	0,011
13. Масса покоя электрона	m_e	$0,9109534 (47) \cdot 10^{-30} \text{ кг}$	5,1
		$5,4858026 (21) \cdot 10^{-4} \text{ а. е. м.}$	0,38
14. Объем моля идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = RT_0/p_0$	$0,02241383 (70) \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$	31
($T_0 = 273,15 \text{ К}$, $p_0 = 101325 \text{ Па}$)			
15. Постоянная Авогадро	N_A	$6,022045 (31) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$	5,1

Таблица IX.9 (продолжение)

Величина	Обозначение	Значение	Относительная погрешность, 10 ⁻⁶
16. Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1,380662 (44) \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	32
17. Постоянная газовая универсальная	R	$8,31441 (26) \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	31
18. Постоянная гравитационная	γ	$6,6720 (41) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$	615
19. Постоянная магнитная	μ_0	$12,5663706144 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	
20. Постоянная Планка	h	$6,626176 (36) \cdot 10^{-34} \frac{\text{Дж}}{\text{Гц}}$	5,4
	$\hbar = h/2\pi$	$1,0545887 (57) \cdot 10^{-34} \frac{\text{Дж}}{\text{Гц}}$	5,4
Квант магнитного потока	$\Phi_0 = h/2e$	$2,0678506 (54) \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$	2,6
	h/e	$4,135701 (11) \cdot 10^{-15} \frac{\text{Дж}}{\text{Гц} \cdot \text{Кл}}$	2,6
Квант циркуляции	$h/2m_e$	$3,6369455 (60) \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{Гц} \cdot \text{кг}}$	1,6
	h/m_e	$7,273891 (12) \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{Гц} \cdot \text{кг}}$	1,6
21. Постоянная излучения первая	$c_1 = 2\pi\hbar c^2$	$3,741832 (20) \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$	5,4
22. Постоянная излучения вторая	$c_2 = \hbar c/k$	$0,01438786 (45) \text{ м} \cdot \text{К}$	31
23. Постоянная Ридберга	$R_\infty = \frac{\mu_0^2 m_e c^3 e^4}{8h^3}$	$1,097373177 (83) \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$	0,08
24. Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}$	$5,67032 (71) \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$	125
25. Постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{2\hbar}$	$0,0072973506 (60)$	0,82
	α^{-1}	$137,03604 (11)$	0,82
26. Постоянная (число) Фарадея	$F = N_A e$	$9,648456 (27) \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$	2,8
27. Постоянная электрическая	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,85418782 (7) \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$	0,008
28. Радиус борovsky	$a_0 = \alpha/(4\pi R_\infty)$	$0,52917706 (44) \cdot 10^{-10} \text{ м}$	0,82
29. Радиус электрона классический	$r_e = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e}$	$2,8179380 (70) \cdot 10^{-15} \text{ м}$	2,5
30. Скорость света в вакууме	c	$299792458 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	—

Таблица IX.9 (продолжение)

Величина	Обозначение	Значение	Относительная погрешность, $10^{-\%}$
31. Ускорение свободного падения стандартное	g	$9,80665 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	
32. Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	939,5731 (27) МэВ	2,8
33. Энергия покоя протона	$m_p c^2$	938,2796 (27) МэВ	2,8
34. Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	0,5110034 (14) МэВ	2,8
35. Энергия, соответствующая 1 а. е. м.		931,5016 (26) МэВ	2,8

§ IX.3. Погрешности при измерениях физических величин

1°. Измерение физической величины заключается в сравнении ее с однородной ей физической величиной, принятой за единицу. Результат измерения физической величины A представляют в виде

$$A = \{A\} [A],$$

где $\{A\}$ — отвлеченное число, называемое *числовым значением величины* A , а $[A]$ — единица величины A .

Если единицу данной физической величины изменить в k раз ($[A]' = k[A]$), то числовое значение $\{A\}'$ этой величины изменится в $1/k$ раз:

$$\{A\}' = \frac{A}{[A]'} = \frac{A}{k[A]} = \frac{\{A\}}{k}.$$

Размерность физической величины A обозначают $\dim A$. Так как числовое значение $\{A\}$ — величина безразмерная, то размерность физической величины A совпадает с размерностью ее единицы:

$$\dim A = \dim [A].$$

2°. Различают два типа измерений физических величин — прямые и косвенные. При *прямом измерении* значение искомой величины непосредственно определяется с помощью прибора, измеряющего саму эту величину. Например, размеры тела можно непосредственно измерить линейкой, штангенциркулем, микрометром; массу тела можно найти путем прямого измерения — взвешивания на весах; продолжительность какого-либо процесса можно непосредственно измерить секундомером, а силу электрического тока в цепи — амперметром.

При *косвенном измерении* значение искомой физической величины находят, основываясь на результатах прямых измерений других физических величин, с ко-

торыми эта величина связана известной функциональной зависимостью. Например, среднюю плотность тела можно вычислить, пользуясь результатами прямых измерений массы и объема этого тела; электрическое сопротивление проводника можно найти из закона Ома, если известны результаты прямых измерений силы тока в проводнике и напряжения на его концах.

В зависимости от выбора метода измерений значения некоторых физических величин можно определить путем как прямых, так и косвенных измерений. Например, силу постоянного тока в электрической цепи можно непосредственно измерить амперметром, а можно косвенно — по измеренной величине напряжения на образцовом сопротивлении, включенном в цепь последовательно. Объем шарика можно найти путем прямого измерения, погружая этот шарик в жидкость, налитую в мерный цилиндр, а можно вычислить, измерив диаметр шарика.

3°. Технические средства, используемые для выполнения экспериментальной части измерений, называются *средствами измерений*. К ним относятся измерительные приборы, меры и состоящие из них измерительные системы и установки. *Измерительными приборами* называются средства измерения, с помощью которых можно непосредственно отсчитывать значения измеряемых величин. *Мерами* называются средства измерения, служащие для воспроизведения физических величин заданных (одного или нескольких) размеров. Примерами мер являются наборы гирь, нормальные элементы, образцовые сопротивления и катушки индуктивности, магазины емкостей, индуктивностей и сопротивлений, различные меры длины, вместимости и т. д.

4°. Из-за действия множества искажающих факторов результат каждого отдельного измерения физической величины не совпадает с ее истинным значением. Разность между результатом измерения и истинным значением измеряемой величины называется *погрешностью измерений (ошибкой измерений)*.

Погрешности измерений могут быть связаны с техническими трудностями (несовершенство измерительных приборов, ограниченные возможности органов зрения человека, с помощью которых во многих случаях производится регистрация показаний приборов, и т. д.), а также с целым рядом факторов, влияние которых трудно учесть (колебания температуры воздуха, его движение вблизи измерительного прибора, малые вибрации элементов измерительной установки и т. п.).

Различают три типа погрешностей измерений: грубые ошибки (промахи), систематические и случайные погрешности. *Грубые ошибки*, или *промахи*, обычно бывают связаны с неисправностью измерительной аппаратуры, либо с ошибкой экспериментатора в отсчете или записи показаний приборов, либо с резким изменением условий измерений. Результаты измерений, соответствующих грубым ошибкам, нужно отбрасывать и взамен проводить новые измерения.

5°. *Систематическими погрешностями измерений* называются погрешности, которые при многократном измерении одной и той же величины остаются постоянными, либо изменяются по определенному закону. Систематические погрешности включают в себя методические и инструментальные (приборные) погрешности измерений.

Методические погрешности вызываются недостатками применяемого метода измерений, несовершенством теории физического явления и неточностью расчетной формулы, используемой для нахождения измеряемой величины. Например

при взвешивании тела на аналитических весах будет допущена систематическая методическая погрешность, если не будет вноситься поправка на различие вытесняющих сил, действующих со стороны воздуха на взвешиваемое тело и разновесы. Методические погрешности можно уменьшать путем совершенствования метода измерений, а также введения уточнений в расчетную формулу.

Инструментальные (приборные) погрешности вызываются несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов (например, небольшое различие в длинах плеч рычажных весов, несовпадение в стрелочном приборе центра шкалы с осью вращения стрелки, изменение хода ручного секундомера при изменении температуры и т. п.). Уменьшение инструментальной погрешности достигается применением более совершенных и точных приборов. Однако полностью устранить приборную погрешность невозможно.

6°. *Случайными погрешностями измерений* называются погрешности, абсолютная величина и знак которых изменяются при многократных измерениях одной и той же физической величины. Случайные погрешности вызываются многими факторами, не поддающимися учету. Например, на показания чувствительных аналитических рычажных весов могут повлиять пылинки, оседающие во время взвешивания на чашки весов, удлинение одного из плеч коромысла весов, нагревающегося от находящейся вблизи него руки экспериментатора, конвективные токи воздуха вблизи чашек весов и другие причины.

Полностью избавиться от случайных погрешностей невозможно, но их можно уменьшить путем многократного повторения измерений. При этом происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений в сторону завышения и в сторону занижения. Расчет случайных погрешностей производится методами теории вероятностей и математической статистики.

7°. За наиболее достоверное значение непосредственно измеряемой физической величины A принимаем *среднее арифметическое* $\langle A \rangle$ из всех n результатов ее измерений $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i.$$

Окончательный результат измерения величины A представляют в форме

$$A = \langle A \rangle \pm \Delta A,$$

где ΔA — положительная величина, называемая *абсолютной погрешностью* найденного значения A .

Относительной погрешностью значения A называется отношение $\Delta A/A$.

Надежностью полученного результата измерения физической величины A называется вероятность P того, что истинное значение A действительно лежит в интервале от $\langle A \rangle - \Delta A$ до $\langle A \rangle + \Delta A$.

8°. Если систематическими погрешностями можно пренебречь (см. 9°), а случайные погрешности подчиняются нормальному распределению (распределению Гаусса *) , то при числе измерений $n \geq 5$ с надежностью $P \approx 2/3$ можно при-

*) Это верно, например, когда результирующая погрешность измерения является суммой большого числа независимых случайных погрешностей, малых по сравнению с результирующей.

нять, что абсолютная погрешность ΔA равна *стандартной (среднеквадратичной) погрешности*

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \langle A \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

Если необходимо повысить надежность P результата, то значение ΔA следует соответственно увеличить, положив

$$\Delta A = t S_A,$$

где t — положительный коэффициент, зависящий от n и P .

С увеличением n стандартная погрешность S_A уменьшается (при больших значениях n погрешность $S_A \sim 1/\sqrt{n}$). Поэтому точность результата измерений, лимитируемая случайными погрешностями, растет с увеличением числа измерений.

9°. В общем случае необходимо принимать во внимание как случайные, так и систематические погрешности прямых измерений. При этом *стандартная погрешность измеряемой величины A* рассчитывается по формуле *)

$$S_A = \sqrt{(S'_A)^2 + (S''_A)^2},$$

где S'_A — *стандартная случайная погрешность*, которая находится по формуле для S_A в п. 8°, S''_A — *стандартная систематическая погрешность*.

При вычислении S_A не требуется высокая точность: вполне достаточно найти S_A с точностью до 15—20%. Поэтому если S'_A и S''_A отличаются в 2 или более раз, то практически можно считать, что S_A равна большей из них:

$$S_A = \max(S'_A, S''_A).$$

Например, пусть $S'_A = 0,5 S''_A$, тогда

$$S_A = \sqrt{1,25} S''_A \approx S''_A.$$

В этом случае для повышения точности результата измерений нет смысла увеличивать число измерений, а нужно принять меры к уменьшению систематической погрешности (например, использовать более точные приборы).

10°. Стандартная систематическая погрешность оценивается на основе анализа метода измерения и используемых средств измерения. Все систематические погрешности, поддающиеся исключению (например, некоторые методические погрешности), должны быть устранены еще до начала обработки экспериментальных данных путем введения к ним соответствующих поправок. Именно эти исправленные значения A_i и рассматриваются как исходные экспериментальные данные при отыскании $\langle A \rangle$ и S'_A . Инструментальная (приборная) погрешность определяется на основе паспортных данных прибора, его класса точности, точности нониуса и т. д.

*) Здесь приведен упрощенный способ учета систематических погрешностей. Более сложный точный метод обработки см. ГОСТ 8.267-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.

Классом точности средства измерения называется характеристика последнего, служащая показателем установленных для него государственным стандартом пределов погрешностей и др. параметров, влияющих на точность.

Многие показывающие приборы (манометры, амперметры, вольтметры, ваттметры и др.) нормируются по *приведенной погрешности* — погрешности, выраженной в процентах от верхнего предела измерений (у многопредельных приборов — от верхнего предела на соответствующем диапазоне), или от длины шкалы. Применяются следующие классы точности таких приборов: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Обозначение класса точности прибора записывается на его шкале в виде соответствующих цифр (не заключенных в кружок!). Общая формула для расчета максимальной абсолютной погрешности $\Delta A_{\text{приб}}$ имеет вид:

$$\Delta A_{\text{приб}} = \frac{K}{100} A_{\text{макс}},$$

где K — класс точности прибора, $A_{\text{макс}}$ — верхний предел измерений прибора (либо данного его диапазона). Например, для амперметра класса 0,5 на диапазоне $I_{\text{макс}} = 2 \text{ А}$

$$\Delta I_{\text{приб}} = \frac{0,5}{100} 2 \text{ А} = 0,01 \text{ А}.$$

В качестве стандартной систематической погрешности этого амперметра можно принять половину $\Delta I_{\text{приб}}$, т. е. $S_I^* = 0,5 \Delta I_{\text{приб}} = 0,005 \text{ А}$.

Измерительные приборы могут также нормироваться по *относительной погрешности* — погрешности, выраженной в процентах от действительного значения измеряемой величины. Обозначение класса точности изображается на шкале такого прибора соответствующими цифрами, заключенными в кружок. В этом случае

$$\Delta A_{\text{приб}} = \frac{K}{100} A.$$

Если класс точности прибора не указан и в паспорте прибора нет данных относительно его инструментальной погрешности, то обычно считают, что эта погрешность равна половине цены наименьшего деления шкалы прибора. В случае прибора, стрелка которого перемещается не равномерно, а «скачками» (например, у ручного секундомера), приборную погрешность считают равной цене деления шкалы.

11°. При записи результата измерений в стандартной форме, показанной в п. 7°, необходимо соблюдать следующие правила:

1) величину погрешности ΔA необходимо округлить до 2 значащих цифр, если первая из них — единица, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях;

2) при записи значения $\langle A \rangle$ необходимо указывать все цифры вплоть до последнего десятичного разряда, использованного для записи погрешности.

Пример 1. Обработка результатов прямых измерений диаметра d шарика с помощью микрометра.

Значения d_i для 5 измерений приведены во 2-м столбце табл. IX.10.

Таблица IX,10

№ изме- рения	d_i , мм	$ d_i - \langle d \rangle $, мм	$(d_i - \langle d \rangle)^2$, мм ²
1	5,27	0,02	0,0004
2	5,30	0,01	0,0001
3	5,28	0,01	0,0001
4	5,32	0,03	0,0009
5	5,28	0,01	0,0001

Проводим расчеты:

$$\langle d \rangle = \frac{5,27 + 5,30 + 5,28 + 5,32 + 5,28}{5} \text{ мм} = 5,29 \text{ мм},$$

$$S_d^* = \sqrt{\frac{4 + 1 + 1 + 9 + 1}{5 \cdot 4}} 10^{-4} \text{ мм} = 0,009 \text{ мм}.$$

Полагая стандартную инструментальную погрешность микрометра равной его точности ($S_d^* = 0,01$ мм), найдем стандартную погрешность диаметра шарика:

$$S_d = \sqrt{0,009^2 + 0,01^2} \text{ мм} = 0,0134 \text{ мм} \approx 0,013 \text{ мм}.$$

Правильная запись результата измерений:

$$d = (5,29 \pm 0,013) \text{ мм}.$$

Примеры неправильной записи результата измерений:

1) $d = (5,29 \pm 0,01)$ мм — погрешность занижена больше, чем на 15—20% из-за нарушения правила 1.

2) $d = (5,29 \pm 0,013)$ мм — нарушено правило 2.

3) $d = (5,2900 \pm 0,0134)$ мм — не выполнено правило 1.

12°. Правила расчета погрешностей при косвенных измерениях.

Пусть для косвенных измерений физической величины A используется известная функциональная зависимость A от ряда других независимых величин B, C, D, E, F, \dots, Q , заданная в форме $A = f(B, C, D, E, F, \dots, Q)$.

Среди переменных B, C, \dots, Q могут быть величины 3-х типов:

1) величины, определяемые путем прямых измерений (например величины E, F, \dots, Q), которые после проведения этих измерений представляются в стандартной форме:

$$E = \langle E \rangle \pm S_E, F = \langle F \rangle \pm S_F, \dots, Q = \langle Q \rangle \pm S_Q;$$

2) данные установки (например, величины B и C), т. е. характеристики экспериментальной установки, известные из предыдущих (тарировочных) измерений; эти величины также должны быть заданы в аналогичной форме*): $B = \langle B \rangle \pm S_B$ и $C = \langle C \rangle \pm S_C$;

*) В противном случае обычно считают, что заданное без указания погрешности значение измерено с точностью до половины единицы последнего десятичного разряда в этом значении (например, если $B = 11,3$ мм, то $S_B = 0,05$ мм, а если $B = 11$ мм, то $S_B = 0,5$ мм).

3) табличные величины (например величина D) — величины, которые в данном опыте не измеряются, а берутся из таблиц.

Табличная величина может быть константой (например $D=l$). В этом случае ее нужно брать из таблиц с такой точностью, чтобы относительная погрешность D была значительно меньше относительных погрешностей всех остальных величин, входящих в функциональное выражение для искомой величины A . Если же D — заданная в табличной форме функция непосредственно измеряемой величины T , то ее также нужно представить в стандартной форме:

$$D = \langle D \rangle \pm S_D,$$

где $\langle D \rangle$ — табличное значение, соответствующее $\langle T \rangle$, $S_D = \left| \frac{\partial D}{\partial T} \right| S_T$ и $\frac{\partial D}{\partial T}$ определяется с помощью таблицы.

Наилучшим значением величины A при косвенном ее измерении будет

$$\langle A \rangle = f(\langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle D \rangle, \langle E \rangle, \langle F \rangle, \dots, \langle Q \rangle),$$

а стандартная погрешность A принимается равной

$$S_A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 S_B^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2 S_C^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial D}\right)^2 S_D^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\right)^2 S_Q^2}.$$

Окончательный результат также представляется в стандартной форме:

$$A = \langle A \rangle \pm S_A.$$

13°. Формулы расчета погрешностей при косвенных измерениях в нескольких простейших случаях приведены в табл. IX.11.

Таблица IX.11

Вид функциональной зависимости	Стандартная погрешность S_A	Относительная стандартная погрешность S_A/A
$A = B \pm C$	$\sqrt{S_B^2 + S_C^2}$	$\sqrt{S_B^2 + S_C^2} / B \pm C $
$A = BC$	$\sqrt{C^2 S_B^2 + B^2 S_C^2}$	$\sqrt{\left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{S_C}{C}\right)^2}$
$A = \frac{B}{C}$	$\sqrt{\frac{S_B^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^4} S_C^2}$	$\sqrt{\left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{S_C}{C}\right)^2}$
$A = B^\alpha C^\beta \dots Q^\tau$	—	$\sqrt{\alpha^2 \left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{S_C}{C}\right)^2 + \dots + \tau^2 \left(\frac{S_Q}{Q}\right)^2}$

14°. Примеры обработки результатов косвенных измерений.

Пример 2. Определить плотность ρ однородного тела на основании результатов прямых измерений его массы $m = (25,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$ кг и объема $V = (2,94 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}$ м³.

Наилучшее значение плотности тела

$$\langle \rho \rangle = \frac{25,4 \cdot 10^{-3}}{2,94 \cdot 10^{-6}} \text{ кг/м}^3 = 8,639 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Относительная стандартная погрешность плотности

$$\frac{S_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{25,4}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{2,94}\right)^2} = 10^{-2} \sqrt{3,87 + 2,89} = 2,6 \cdot 10^{-2}.$$

Стандартная погрешность плотности

$$S_\rho = 8,639 \cdot 10^3 \cdot 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3 = 225 \text{ кг/м}^3.$$

Округляя значения S_ρ и $\langle \rho \rangle$, запишем окончательный результат в виде

$$\rho = (8,6 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Пример 3. Определить объем цилиндра V по результатам прямых измерений его диаметра $d = (3,46 \pm 0,04)$ см и высоты $h = (4,87 \pm 0,05)$ см.

Наилучшее значение объема цилиндра находится по формуле

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle.$$

Прежде чем проводить вычисления, необходимо выяснить, с какой точностью следует взять из таблицы значение π (располагаемое табличное значение $\pi = 3,141593$), чтобы погрешность этой постонойной не повлияла на точность определения объема цилиндра. Относительная стандартная погрешность объема

$$\begin{aligned} \frac{S_V}{V} &= \sqrt{4 \left(\frac{S_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{S_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2} = \sqrt{4 \left(\frac{0,04}{3,46}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{4,87}\right)^2 + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(5,34 + 1,05) \cdot 10^{-4} + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2} = \sqrt{6,40 \cdot 10^{-4} + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2}. \end{aligned}$$

Для того чтобы погрешность в значении π практически не влияла на величину S_V/V , достаточно (см. п. 9^о) выполнения неравенства: $(S_\pi/\pi) < 0,012$, т. е. $S_\pi < 0,038$. Это условие выполняется, если ограничиться значением $\pi = 3,14$, так как допускаемая нами относительная погрешность для π окажется равной

$$\frac{S_\pi}{\pi} = \frac{0,001593}{3,14} = 5 \cdot 10^{-4} < 0,012.$$

Соответственно,

$$\frac{S_V}{V} = \sqrt{6,40 \cdot 10^{-4}} = 2,53 \cdot 10^{-2},$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} 3,14 \cdot (3,46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 4,87 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 = 45,77 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Стандартная погрешность объема

$$S_V = 2,53 \cdot 10^{-2} \cdot 45,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 1,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Окончательный результат:

$$V = (45,8 \pm 1,2) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

§ IX.4. Приближенные вычисления без точного учета погрешностей *)

1°. Производя обработку многочисленных измерений, часто не подсчитывают погрешности отдельных результатов и судят о погрешности приближенного значения величины (числа), указывая *количество верных значащих цифр* в этом числе.

Нули, стоящие в числе слева, значащими цифрами не считаются. Нули в середине или в конце числа (справа), обозначающие отсутствие в числе единиц соответствующих разрядов, — значащие цифры. Например, в числе 0,08040 первые два нуля — не значащие, а третий и четвертый — значащие.

Нули, поставленные в конце целого числа взамен неизвестных цифр и служащие лишь для определения разрядов остальных цифр, значащими не считаются. В подобных случаях нули в конце числа лучше не писать и заменять их соответствующей степенью числа 10. Например, если число 4200 измерено с абсолютной погрешностью ± 100 , то это число должно быть записано в виде $42 \cdot 10^2$ или $4,2 \cdot 10^3$. Такая запись подчеркивает, что в данном числе содержатся лишь две значащие цифры.

2°. Если приближенное значение величины содержит лишние или недостоверные цифры, то его *округляют*, сохраняя только верные значащие цифры и отбрасывая лишние. При этом руководствуются следующими *правилами округления*:

а) если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Например, округляя число 27,3763 до сотых, следует записать 27,38;

б) если первая отбрасываемая цифра меньше 4 или равна 4, то последняя сохраняемая цифра не изменяется. Например, округляя число 13847 до сотен, записывают $138 \cdot 10^2$;

в) если отбрасываемая часть числа состоит из одной цифры 5, то число округляют так, чтобы последняя сохраняемая цифра была четной. Например, при округлении до десятых $23,65 \approx 23,6$, но $17,75 \approx 17,8$.

3°. Производя различные математические действия с приближенными числами, руководствуются следующими *правилами подсчета цифр*:

а) при сложении и вычитании в результате сохраняют столько *десятичных знаков*, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков;

б) при умножении и делении в результате сохраняют столько *значащих цифр*, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр.

Исключение из этого правила допускается в тех случаях, когда один из сомножителей произведения начинается с единицы, а сомножитель, содержащий наименьшее количество значащих цифр, — с какой-нибудь другой цифры. В этих случаях в результате сохраняют на одну цифру больше, чем в числе с наименьшим количеством значащих цифр;

в) результат расчета значений функций x^n , $\sqrt[n]{x}$ и $\lg x$ некоторого приближенного числа x должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе x .

*) Этот параграф написан Ю. А. Селезевым.

При вычислении промежуточных результатов сохраняют на одну цифру больше, чем рекомендуют правила а) — в) (так называемая запасная цифра). В окончательном результате запасная цифра отбрасывается.

Если некоторые приближенные числа содержат больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня и т. д.), чем другие, то их предварительно округляют, сохраняя только одну лишнюю цифру.

Пример 1. Перед сложением приближенных чисел 0,374; 13,1 и 2,065 первое и третье из них нужно округлить до сотых, а в окончательном результате сотые отбросить:

$$13,1 + 2,06 + 0,37 \approx 15,5.$$

Пример 2. Результат расчета выражения $\frac{68,04 \cdot 7,2}{20,1}$ должен содержать только две значащие цифры (по количеству значащих цифр в числе 7,2):

$$\frac{68,04 \cdot 7,2}{20,1} \approx \frac{68,0 \cdot 7,2}{20,1} \approx 24,4 \approx 24.$$

Пример 3. Результат перемножения чисел 13,27 и 0,84 можно записать с тремя значащими цифрами (см. исключение из правила б)):

$$13,27 \cdot 0,84 \approx 13,3 \cdot 0,84 \approx 11,2 \text{ (а не 11)}.$$

Пример 4. При возведении в куб приближенного числа 216 результат должен быть записан только с тремя значащими цифрами:

$$216^3 \approx 101 \cdot 10^5.$$

- Волна синусоидальная 282
 — сферическая 284
 — — расходящаяся 284
 — — синусоидальная 284
 — —, центр волны 284
 — упругая поперечная 281
 — — продольная 281
 — — синусоидальная (гармоническая) 282
 — — стоячая 292
 — — — плоская 292
 — — —, амплитуда 292
 — — —, длина волны 292
 — — —, относительная деформация сре-
 ды 293
 — — —, пучности 292
 — — —, скорость колебаний частиц сре-
 ды 293
 — — —, узлы 292
 — — —, энергия 293
 — электромагнитная, интенсивность 300
 — —, p -волна 305
 — —, s -волна 305
 Волны акустические 280
 — де Бройля 371
 — — —, длина волны 371
 — — —, скорость групповая 372
 — — —, фазовая 372
 — — —, статистический (вероятностный)
 смысл 373
 — — —, частота 373
 — звуковые 280
 — когерентные 290
 — — частично 314
 — механические 280
 — поверхностные 281
 — упругие 280
 — электромагнитные 295
 — —, вектор Умова — Пойнтинга 299
 — —, поляризация 298
 — —, поперечность 296
 — —, скорость фазовая 296
 — —, энергия 299
 — —, эффект Доплера 308
 Вольт 477
 Восприимчивость диэлектрическая 166
 — — комплексная 341
 — — полярного диэлектрика 166
 — магнитная 227
 Вращение плоскости поляризации света 354
 — — — магнитное 355
 — — тела вокруг неподвижной оси 18
 — — — точки 20
 — — инерционное (свободное) 55
 — — равномерное 19
 — — удельное 354
 — — раствора 355
 Время высвечивания атома среднее 302
 — жизни радиоактивного изотопа среднее
 440
 — когерентности 265, 311
 — релаксации 272
 — собственного объекта 61
 — характерное фундаментальных взаимо-
 действий 462
 Вязкость 114

 Газ вырожденный 411
 — идеальный 88
 — разреженный 116
 — реальный 130
 — — Ван дер Ваальса 133
 — — электронный в металле 173
 — — —, вырожденный 412
 — — —, внутренняя энергия 415
 — — —, теплоемкость 415
 — — —, химический потенциал 414
 — — —, энергия Ферми 414
 — — —, электрона средняя 414

 Гамма-излучение (гамма-лучи) 304, 444
 Гармоники периодического колебания 267
 Гаусс 483
 Гектар 484
 Гелий жидкий, сверхтекучесть 137
 Генератор когерентного света (ГКС) 400
 — магнитогиродинамический (МГД) 200
 — оптический квантовый (ОКГ) 400
 — электростатический Ван де Граафа 220
 Генри 478
 Герц 475
 Гильберт 483
 Гиперзвук 280
 Гипероны 456, 465
 Гипотеза квантовая Планка 360
 Гироскоп 51
 — астатический (уравновешенный) 51
 — —, тяжелый 51
 — —, регулярная прецессия 52
 — —, центр подвеса 51
 Гистерезис диэлектрический 172
 — магнитный 232
 ГКС 400
 Глаз, угловой предел разрешения 332
 Глюоны 470
 Год световой 483
 Голограмма объекта 334
 — объемная 335
 Голография 333
 Гравитон 470
 Градус угловой 484
 — Цельсия 484
 Граница красная внешнего фотоэффекта
 365, 366
 Грей 445
 Группа волн 289

 Давление 86
 — внутреннее 134
 — света 367
 — электромагнитных волн 300
 Двигатель вечный второго рода 122
 — — первого рода 94
 Движение абсолютное 77
 — аperiodическое 273
 — броуновское 128
 — заряженной частицы в магнитном поле
 216
 — механическое 11
 — относительное 77
 — —, основное уравнение динамики точки
 78
 — по инерции 21
 — твердого тела вращательное 18, 20
 — — — инерционное (свободное) 55
 — — — переменной массы 28
 — — — плоское (плоскопараллельное) 21
 — — — поступательное 18
 — — — свободного 53
 — тепловое 84
 — точки замедленное 15
 — — криволинейное 13
 — — плоское 13
 — — прямолнейное 13
 — — равнозамедленное 17
 — — равномерное 15
 — — равнопеременное 17
 — — равноускоренное 17
 — — ускоренное 15
 Движения независимые 14
 Двойственность корпускулярно-волновая
 свойства света 369
 — — частиц вещества 371
 Дебаеграмма 332
 Деионизация газа 201
 Декремент затухания логарифмический 272
 Деление тяжелых ядер 452
 — — —, параметр деления 452

- Деление тяжелых ядер, параметр деления критический 452
 — — спонтанное (самопроизвольное) 452
 Дефект массы системы 69
 — ядра атома 436
 Деформация упругие 279
 Деформация продольного растяжения (сжатия) 405
 — тела 404
 — — остаточная 406
 — — относительная 405
 — — пластическая 405
 — — упругая 404
 Джоуль 476
 Диаграмма направленности излучения осциллятора (диполя) 302
 — растяжения 406
 — термодинамическая 95
 Диамагнетика 226
 Диаметр молекулы эффективный 88, 133
 Диафрагма апертурная 332
 Дина 481
 Динамика 11
 — релятивистская, основной закон 66
 Диод полупроводниковый 433
 Диполь электрический 151
 — — жесткий 164
 — — в неоднородном электрическом поле 165
 — — в однородном электрическом поле 164
 — —, потенциальная энергия во внешнем электрическом поле 165
 — — квазиупругий 164
 Дисперсия волн 288
 — света 339
 — — аномальная 339
 — — вращательная 354
 — — нормальная 339
 — —, теория классическая электронная 340
 Диссипация энергии 42
 Диссоциация электролитическая 194
 Дифракционная решетка одномерная 327
 — — —, постоянная 327
 — — —, пространственная (трекмерная) 330
 Дифракция на пространственной решетке 330
 — — —, условие Вульфа — Брэгга 331
 — — —, условия Лауэ 330
 — света 324
 — Фраунгофера (в параллельных лучах) 324
 — — на большом числе одинаковых препятствий 329
 — — на дифракционной решетке одномерной 327
 — — —, максимумы главные 328
 — — —, порядок 328
 — — —, угловая ширина 328
 — — —, минимумы главные 328
 — — —, дополнительные 328
 — — —, наклонное падение света 329
 — — —, спектры дифракционные 329
 — — на круглом отверстии 327
 — — на щели 325
 — Френеля (в сходящихся лучах) 324
 — — на круглом диске 325.
 — — —, отверстия 324.
 Диффузия 113
 Дихроизм 350
 Диэлектрик поляризованный 165
 Диэлектрики 163, 427
 — неполярные 163
 — полярные 164
 Длина волны 283
 — де Бройля 371
 — комптоновская нейтрона 485
 Длина волны комптоновская протона 485
 — — электрона 368, 485
 — гармонического пуга 311
 — когерентности 311
 — пространственной 315
 — приведенная физического маятника 261
 — пути оптической 316
 — — точки 13
 — свободного пробега молекул газа средней 107
 — связи атомов в молекуле 393
 — стоячей волны 292
 Добротность колебательной системы 272
 Доза излучения 445
 — —, мощность 445
 — — экспозиционная 445
 — —, мощность 446
 Домены 172, 233
 Доноры 429
 Дуанты 220
 Дублет мюонный 464
 — таонный 464
 — электронный 464
 Единица астрономическая 483
 — икс 483
 — массы атомная 483, 485
 — —, энергия 487
 — физической величины 472
 — — основная 472
 — — производная 472
 Емкость электрическая батарей конденсаторов 178
 — — взаимная двух проводников 176
 — — конденсатора плоского 176
 — — сферического 177
 — — цилиндрического 177
 — — удельного проводника 175
 — — — шара 175
 Жидкости 138
 —, ближний порядок 139
 —, внутреннее давление 141
 — — трение (вязкость) 141
 —, время релаксации 140
 —, диффузия 140
 —, дырочная теория 139
 —, краевой угол 143
 —, поверхностное натяжение 142
 —, подвижность молекул 141
 —, сиботаксические области 139
 —, текучесть 139
 —, энергия активации 140
 Жидкость, давление искривленной поверхности 144
 — киплящая 135
 — несмачивающая 143
 — перегретая 137
 — смачивающая 143
 Закон Авогадро 89
 — Ампера 204
 — Бера 336
 — Био 354
 — Био — Савара — Лапласа 205
 — Больцмана 106
 — Брюстера 345
 — Бугера — Ламберта 336
 — Бугера — Ламберта — Фабриканта 399
 — взаимосвязи массы и энергии 68
 — Видемана — Франца 187
 — всемирного тяготения 69
 — Гейгера — Неттола 442
 — Гука 279, 405
 — — для объемной деформации 259

- Импульс силы 26
 — системы 25
 — — закон изменения 28
 — — сохранения 29
 — фотона 367
 Индуктивность взаимная 242
 — собственная контура 240
 — — соленоида 240
 Индукция магнитная 201
 — магнитного поля 201
 — электрическая 169
 — электромагнитная 237
 — электростатическая 173
 Инертность тел 21
 Интеграл Фурье 267
 Интенсивность волны упругой 287
 — — электромагнитной 300
 — — плоской монохроматической линейно поляризованной 300
 — — — эллиптически поляризованной 300
 — — — сферической 300
 — ионизации 199
 — намагничивания 226
 — света 300
 Интервал пространственно-временной 63
 — — времениподобный 63
 — — пространственноподобный 63
 Интерференция волн 290
 — — многих волн 319
 — — —, максимумы 320, 321
 — — — —, главные 320
 — — — —, порядок 320
 — — — —, ширина 326
 — — — —, побочные 320
 — — — —, порядок 321
 — — — —, минимумы 320, 321
 — — — —, света в тонких пленках 316
 — — — —, максимумы отражения 317
 — — — —, минимумы отражения 317
 — — — —, полосы равного наклона 317
 — — — —, равной толщины 318
 Инфразвук 280
 Ион 383
 Ионизация 196
 — — объемная 197
 — — ударная 196
 Ионосфера 199
 Ионы водородоподобные 383
 — —, квантовая теория 386
 Испарение 145
 Источник излучения косинусный 363
 — — напряжения 276
 — — э. д. с. 276
 — — — идеальный 277
 — — — электрической энергии 184, 188
 Источники волн 280
 — — — когерентные 290
- Кандела 474
 Каоны (К-мезоны) 456, 465
 Катастрофа ультрафиолетовая 360
 Катоды 193
 Катод 193
 Квант энергии 361
 Квантование пространственное 387
 Кварки 468
 — —, «ароматы» 468
 — —, три дублета (поколения) 468
 — —, цвет 468
 Кельвин 473
 Килограмм 473
 Кинематика 11
 — — релятивистская 64
 Кипение 145
 Когерентность волн частичная 318
 — — колебаний временная 314
 — — — пространственная 315
- Колебания 256
 — —, время когерентности 265
 — — вынужденные 256
 — — — пружинного маятника 273
 — — — —, дифференциальное уравнение 273
 — — — —, переходный режим 273
 — — — —, установившегося гармонические 273
 — — — —, амплитуда 274
 — — — —, работа 275
 — — — —, резонанс 274
 — — — —, резонансные кривые 274
 — — — —, сдвиг фаз 274
 — — — —, скорость 275
 — — — —, ускорения 275
 — — — —, частота резонансная 274
 — — — —, электрические 276
 — — — —, дифференциальное уравнение 277
 — — — —, установившиеся гармонические 277
 — — — —, амплитуда 277
 — — — —, начальная фаза 277
 — — — —, резонансные кривые 278
 — — гармонические 256
 — — —, амплитуда 256
 — — —, дифференциальное уравнение 258
 — — —, метод векторных диаграмм 258
 — — —, механические 258
 — — —, сила 259
 — — —, скорость 258
 — — —, ускорение 258
 — — —, энергия 259
 — — —, сложение 264 и след.
 — — —, фаза 257
 — — —, частота 256
 — — —, затухающие 270
 — — —, время релаксации 272
 — — —, декремент затухания 272
 — — —, дифференциальное уравнение 270
 — — —, период (условный) 271
 — — —, циклическая частота (условная) 271
 — — —, изохронные 261
 — — —, когерентные 265
 — — —, частично, сложение 314
 — — —, механические 256, 258
 — — —, модулированные 267
 — — —, находящиеся в одной фазе (синфазные) 265
 — — — — в противофазе 265
 — — — некогерентные 265
 — — — периодические 256
 — — —, гармоники 267
 — — —, основная циклическая частота 266
 — — —, спектр 267
 — — —, плазмы ленгмюровские 261
 — — —, поляризованные линейно 269
 — — — — по кругу 268
 — — — — циркулярно 268
 — — — — эллиптически 268
 — — — почти периодические (квазипериодические) 267
 — — — свободные 256
 — — — — гармонические в электрическом колебательном контуре 262
 — — — — стержней, струн, столбов газа 293
 — — — — электронов в плазме 261
 — — — — собственные 256
 — — — — частично когерентные 314
 — — — — электромагнитные 256
 — — — — электромеханические 256
 Количество движения материальной точки 25
 — — теплоты (теплота) 92
 — — приведенное 123
 Коллайдер 461
 Кольца Ньютона 318
 Конверсия внутренняя гамма-лучей 445
 Конденсатор 176

- Конденсатор плоский 176
 — —, пробивное напряжение 177
 — сферический 177
 — цилиндрический 177
 Контрастность интерференционных полос 313
 Контур колебательный 262
 — —, вынужденные колебания 276
 — —, свободные колебания 262, 271
 — с током в магнитном поле 211
 Конфигурация системы 38
 — нулевая 39
 Концентрация раствора эквивалентная 196
 Коэффициент ангармоничности колебаний частиц в кристалле 404
 — внутреннего трения 114
 — вязкости динамический 114
 — — кинематический 114
 — диссоциации 194
 — диффузии 118
 — затухания 270
 — квазиупругой силы 405
 — мощности 279
 — отражения света металлами 337
 — — электромагнитной волны 306
 — поверхностного натяжения 142
 — поглощения тела монохроматический 357
 — — упругих волн линейный 288
 — поляризуемости молекулы 164
 — прозрачности потенциального барьера 382
 — — пропускания электромагнитных волн 307
 — Пуассона (показатель адиабаты) 99
 — размножения нейтронов 453
 — теплового расширения линейного 403
 — — объемного 403
 — теплопроводности 115
 — упругости 405
 Кривая потенциальная 43
 Кривые резонансные 274, 277
 Кристаллы валентный (атомный) 402
 — ионный 402
 — металлический 402
 — молекулярный 402
 — оптически активный 354
 — — анизотропный 346
 — — отрицательный 348
 — — положительный 348
 Кристаллизация 408
 Кристаллиты 402
 Кристаллы двуосные 346
 — одноосные 346
 Критерий Лоусона 355
 — Рэлея 314, 332
 — устойчивости атомных ядер 437
 Кулон 477
- Лазер 400
 —, трехуровневая схема 400
 Лауэграмма 332
 Лептоны 463, 467
 —, семейства 464
 Линии магнитной индукции 202
 — напряженности электрического поля 150
 — силовые электрического поля 150, 202
 — спектральные атомарного водорода 384
 — —, доплеровское уширение 309
 Линия действия силы 23
 — удара 43
 Литр 484
 Луч 282
 — необыкновенный 347
 — обыкновенный 347
 — отраженный 304
 — падающий 304
 — преломленный 304
 Лучепреломление двойное 346
 Лучи космические 460
- Лучи рентгеновские 304, 397
 Люкс 479
 Люмен 479
 Люминесценция 396
 Люминофор 396
- Магнетика 223
 Магнетон Бора 224, 485
 — ядерный 435, 485
 Мазер 400
 Макротоки 229
 Максвелл 483
 Масса магнитная 214
 — материальной точки 24
 — молярная 89
 — покоя 66
 — — нейтрона 485
 — — протона 485
 — — электрона 485
 — релятивистская 66
 — —, зависимость от скорости 66
 — —, закон сохранения 66
 Масс-спектрограф 219
 Масс-спектрометрия 218
 Материалы магнитомягкие 232
 — магнитотвердые 232
 Маятник математический 261
 — пружинный 260
 — —, вынужденные колебания 273
 — —, свободные колебания 260, 270
 — физический 261
 — —, приведенная длина 261
 МГД-генератор 200
 Мезоны 465, 466
 —, состав кварков 468
 Мениск 143
 Мера 488
 Метод встречных пучков 223
 — исследования статистический 85
 — — термодинамический 86
 — Юнга осуществления интерференции 315
 Метр 473
 Механика 11
 — волновая 371
 — квантовая 11, 371
 — классическая 11
 — ньютоновская 11
 — релятивистская 11, 56
 Микрополя усредненные 247
 Микроскоп иммерсионный 333
 —, разрешающая способность 332
 Микротоки (молекулярные токи) 229
 Минута 484
 — угловая 484
 Модуль сдвига 406
 — упругости 405
 — — объемной 280
 — Юнга 405
 Модуляция колебаний 267
 — — амплитудная 267
 — — фазовая 268
 — — частотная 268
 Молекула 392
 — атомная (гомополярная) 393
 — ионная (гетерополярная) 393
 Молизация 194
 Моль 473
 Момент времени начальный 13
 — импульса атома орбитальный 224
 — — системы, закон сохранения 53
 — — — относительно неподвижной оси 47
 — — — — точки 47
 — — — центра инерции (масс) 48
 — — тела относительно неподвижной точки 48
 — — электрона, орбитальный в атоме 223, 386, 387
 — — — собственный (спин) 224, 387, 388

Момент инерции механической системы 49
 — — тела 49
 — — — главный 50
 — — — центральный 50
 — — —, таблица 50
 — — —, теорема Штейнера 49
 — — — центробежный 50
 — магнитный атома орбитальный 224
 — — контура с током 208
 — — нейтрона 435
 — — протона 435, 485
 — — соленоида 210
 — — электрона орбитальный 223
 — — — спиновый 224, 485
 — — ядра атома 435
 — силы относительно неподвижной оси 47
 — — — — точки 46
 — системы сил относительно неподвижной оси 47
 — — — — — точки 46
 — — — — центра инерции (масс) 48
 — электрический диполя 151
 — — молекулы индуцированный (наведенный) 164
 — — ядра квадрупольный 435
 Монокристалл 402
 Мощность 36
 — излучения заряда 302
 — — осциллятора (диполя) 302
 — мгновенная 36
 — средняя 36
 — тока переменного активного 279
 — — — — — мгновенная 279
 Мюоны 61, 456, 463

Нагреватель (теплоотдатчик) 119
 Надежность результата измерения 489
 Накатка усиливающей среды 400
 Намагниченность 226
 — насыщения 232
 — остаточная 232
 Напряжение механическое 405, 406
 — трения 114
 — электрическое 190
 — — задерживающее 365
 — — зажигания 198
 — — периодическое, действующее значение 279
 — — пробоя 198
 Напряженность поля гравитационного 71
 — — магнитного 230
 — — —, задерживающая 232
 — — электрического 149
 — — электростатического равномерно заряженного цилиндра 160, 161
 — — — — — шара 160, 171
 — — — — — заряженной плоскости 162
 — — — — — сферы 159
 — — —, связь с потенциалом поля 158
 — — — системы точечных зарядов 151
 — — — точечного заряда 150, 171
 — — — электрического диполя 151, 152
 Насыщение магнитное ферромагнетика 231
 — — намагниченности парамагнетика 228
 Начало термодинамики второе 122
 — — первое 94
 — — — для идеального газа 97
 — — — третье 129
 Невесомость 82
 Нейтринно мюонное 464
 — таонное 464
 — электронное 464
 Нейтрон 456, 465
 —, магнитный момент 435
 —, масса покоя 485
 —, спин 465
 —, энергия покоя 487
 Нейтроны быстрые 451

Нейтроны деления 453
 — — запаздывающие 453
 — — мгновенные 453
 — — медленные 451
 — — тепловые 451
 — — холодные и ультрахолодные 451
 Нормаль главная 13
 Носители тока 184
 Ньюклон 434, 456, 465
 Ньютон 475
 Обкладки конденсатора 176
 Области сиботаксические 139
 Оболочки электронные атома 389
 Обратимость механических движений 120
 Объем когерентности 316
 — молярный 89
 — удельный 86
 — фазовый 409
 — —, размер ячейки в квантовой статистике 409
 — —, число квантовых состояний 409
 Однородность времени 41
 — пространства 30
 ОКГ 400
 — трехуровневая схема 400
 Окружность соприкасающаяся 13
 Ом 477
 Оператор Лапласа 285
 Оптика 310
 — волновая 310
 — квантовая 364
 — нелинейная 310
 Освещенность энергетическая 362
 Оси вращения тела свободные 55
 Осколки деления ядра 452
 Осциллятор 301
 — линейный гармонический квантовый 381
 — — — —, квантование энергии 382
 — — — —, нулевые колебания 383
 — — — —, классический 260, 301
 — — — —, излучение, вектор Умова — Пойнтинга 301
 — — — —, интенсивность волны 302
 — — — —, мощность 302
 — — — —, поле в волновой зоне 301
 — — — —, полярная диаграмма направления 302
 Осцилляции нейтринные 464
 Ось вращения тела 18
 — — — — мгновенная 20
 — — инерции главная 50
 — — — — центральная 50
 — качания физического маятника 260
 — кристалла оптическая 346
 Отдача атомного ядра 447
 Относительность механического движения 13, 21
 Отношение гиромагнитное моментов орбитальных 223
 — — — — спиновых 224
 — — — — ядерное 435
 Отражение электромагнитных волн 305
 — — — — коэффициент отражения 306
 — — — — полное внутреннее 307
 — — — — —, предельный (критический) угол 307
 Очарование 466
 Ошибка измерений 488
 — — грубая (промах) 488
 Падение свободное 81
 Пакет волновой 289
 Пар 130
 — влажный 135
 — насыщенный, давление над искривленной поверхностью жидкости 145

- Пар пересыщенный 137
 — сухой насыщенный 135
 Пара сил 48
 Парадокс часов (времени) 62
 Парамагнетика 227
 Параметр вырождения 411
 — деления ядра 452
 — — критический 452
 Параметры системы термодинамические 86
 — состояния критические 135
 — — газа Ван дер Ваальса 137
 — — системы 86
 — — — внешние 87
 — — — внутренние 87
 Парсек 483
 Паскаль 475
 Переход фазовый 1-го рода 136, 146
 — — —, уравнение Клапейрона —
 Клаузиуса 146
 — — 2-го рода 137
 — — электронно-дырочный ($p-n$ -переход) 432
 Периметр смачивания 143
 Период вращения 19
 — дифракционной решетки 327
 — колебаний 256
 — — затухающих (условный) 271
 — полураспада 440
 Петля гистерезиса 173, 232
 Пиконы (пи-мезоны) 465
 Пирометр 362
 — оптический 362
 — радиационный 362
 Пирометрия оптическая 362
 Плавление 407
 Плазма 198
 — высокотемпературная 199
 — газовая 199
 — газоразрядная 200
 — азотемическая 200
 — ионизованная полностью 199
 — — слабо 199
 — — умеренно 199
 — свойства 199
 —, степень ионизации 198
 Пластинка зонная 324
 — кристаллическая в полволны 352
 — — в целую волну 352
 — — в четверть волны 352
 Плеохроизм 350
 Плечо диполя 151
 — пары сил 48
 — силы 46
 Плоскости кристалла атомные 331
 — — сетчатые 331
 Плоскость главная одноосного кристалла 347
 — — поляризатора (анализатора) 345
 — колебаний 298
 — падения 305
 — поляризации 298
 — сдвига 406
 — соприкасающаяся 13
 Плотность вероятности 373
 — зарядов линейная 152
 — — объемная 152
 — — поверхностная 152
 — спектральной энергии равновесного излучения 356
 — — —, формула Планка 362
 — — тела 24
 — — средняя 25
 — тепловой мощности тока объемная 187
 — тока 185
 — — поляризации 250
 — — проводимости в газах 197
 — — в жидкостях 195
 — — в металлах 186
 — — смещения 249
 — — в вакууме 250
 — энергии упругих волн объемная 286
 Плотность энергии электромагнитного поля
 объемная 299
 — — электромагнитных волн объемная 299
 Поверхность волновая 282
 — гауссова 153
 — лучевая волны в кристалле 348
 — эквипотенциальная 158
 Поглощение волн 288
 — гамма-лучей резонансное 447
 — нейтронов резонансное 451
 — света 336
 — — отрицательное 399
 — — резонансное 337
 Погрешности измерения инструментальные
 (приборные) 489, 490
 — — методические 488
 — — систематические 488
 — — случайные 489
 Погрешность абсолютная 489
 — грубая (промах) 488
 — относительная 489
 — приведенная 491
 — стандартная (среднеквадратичная) 490
 — систематическая 490
 — случайная 490
 Подвижность иона 197
 — молекул в жидкостях 141
 Подгруппа (подоболочка) электронов в атоме 389
 Позитрон 147, 458
 Показатель адиабаты 99
 — поглощения среды главных 337
 — — — натуральный 336
 — — — отрицательный 337, 399
 — преломления кристалла для необыкновенного луча 348
 — — для обыкновенного луча 348
 — — относительный двух сред 304
 — — среды абсолютный 304
 — — — комплексный 336
 Поле (физическое) 22
 — безвихревое 213
 — вихревое 213
 — гравитационное 71
 — —, напряженность 71
 — —, потенциал 72
 — —, принцип суперпозиции 72, 73
 — —, работа 73
 — —, связь напряженности и потенциала 73
 — излучения 301
 — интерференция 312
 — магнитное 201
 — —, вихревой характер 213
 — — внутреннее 229
 — — движущегося заряда 206
 — — критическое (в сверхпроводимости) 418
 — — кругового тока 208
 — — неоднородное 202
 — — однородное 202
 — — прямого тока 207
 — — собственное 229
 — — соленоида 209
 — — тороида 213
 — —, энергия 243
 — — потенциальное 35
 — — соленоидальное 214
 — — стационарное 23
 — — тяготения 71
 — — центральных сил 39
 — — электрическое 149
 — — индуцированное 239
 — — однородное 149
 — — стационарное 149
 — — электромагнитное 149
 — —, граничные условия 253
 — —, теория Лоренца 253
 — — — Максвелла 246

- Поле электромагнитное, энергия 299
- электростатическое 149
- —, потенциальность 156
- —, энергия 179
- Поликристалл 402
- Положение начальное 13
- Полосы интерференционные 313
- — равного наклона 317
- — равной толщины 318
- поглощения света 337
- Полупроводники 427
- примесные дырочные (*p*-типа) 430
- — электронные (*n*-типа) 429
- Поляризатор 344
- Поляризация диэлектрика 165
- — деформационная 165
- — ионная 166
- — ориентационная 165
- — остаточная 172
- — самопроизвольная доменов 172
- — электронная 165
- колебаний 268, 269
- монокристаллической волны линейная (плоская) 298
- — — циркулярная (по кругу) 297
- — — эллиптическая 297
- поперечных синусоидальных волн 282
- света 344
- Поляризованность (вектор поляризации) 166
- Поляризуемость молекулы 164
- Поляроды 350
- Порядок ближний (в жидкостях) 139
- дальний (в кристаллах) 402
- интерференционного максимума 291, 328
- — минимума 291
- Постоянная Авогадро 89, 485
- Больцмана 89, 486
- Верде 355
- Вина 359
- вращения 354
- — раствора 355
- газовая 89
- — удельная 89
- — универсальная 89, 486
- гравитационная 70, 486
- дифракционной решетки 327
- Керра 354
- Коттона — Мутона 354
- магнитная 205, 486
- Планка 361, 486
- радиационная 486
- распада радиоактивного 439
- Ридберга 384, 486
- Стефана — Больцмана 359, 486
- тонкой структуры 462, 486
- Фарадея 194, 486
- Холла 217
- электрическая 148, 486
- электродинамическая 480
- Постулаты Бора 385
- специальной теории относительности 56
- Потенциал задерживающий 365
- ионизации 196
- — атома водорода и водородоподобного иона 384
- химический 410
- электростатического поля 157
- — — равномерно заряженного цилиндра 160, 161
- — — — шара 160, 171
- — — — заряженной плоскости 162
- — — — сферы 159
- — —, связь с напряженностью 158
- — системы точечных зарядов 157
- Поток излучения 362
- магнитный 213
- массы удельный 113
- смещения 169
- тепловой удельный 115
- Поток энергии 287
- Потокоцепление 214
- — взаимной индукции 214
- — самондукции 214
- Правила Кирхгофа для электрических цепей 191
- — для магнитных цепей 236
- округления приближенных чисел 495
- подсчета цифр в приближенных числах 495
- — расчета погрешностей при косвенных измерениях 492
- — смещения при радиоактивном распаде (Фаянса и Содди) 440
- Правило винта (буравчика) 18, 205
- Дюлонга и Пти 420
- контуров 192
- левой руки 204
- Ленца 237
- Максвелла 205
- Стокса 397
- узлов 191
- Предел пропорциональности 405
- прочности 406
- текучести 406
- Преобразования Галилея 31
- Лоренца 59
- — для электромагнитного поля 254
- Прибор измерительный 488
- —, класс точности 491
- Призма поляризационная 350
- Примеси в полупроводнике 428
- — — акцепторные 429
- — — донорные 429
- Принцип автофазировки 221
- (теорема) Бабинэ 329
- Гюйгенса 321
- Гюйгенса — Френеля 322
- дтального равновесия 357
- инвариантности скорости света 56
- исключения (Паули) 388
- недоступности абсолютного нуля температуры 129
- независимости действия сил 27
- — электрических полей 150
- — неразличимости тождественных частиц 409
- Нернста 129
- освобождаемости 23
- относительности Галилея 32
- — механический 32
- — Эйнштейна 56
- Паули 388
- соответствия Бора 377
- суперпозиции волн 288
- — полей гравитационных 72, 73
- — — электрических 150
- эквивалентности локальных 82
- Пробой электрический газа 198
- Проводимость полупроводника дырочная (*p*-типа) 428, 430
- — примесная 428
- — собственная 427
- — —, энергия активации 427
- — — электронная (*n*-типа) 427, 429
- — — электрическая удельная 187, 415
- Проводник уединенный 174
- Проводники в электростатическом поле 173
- второго рода 193
- Продолжительность жизни радиоактивного изотопа 440
- Прозрачность потенциального барьера 382
- Проницаемость среды диэлектрическая комплексная 341
- — — относительная 168
- — — магнитная относительная 231
- Протон 147, 456
- , заряд 147
- , магнитный момент 485

- Сила инерции переносная 78
 — центробежная 78
 — коэрцитивная 172, 232
 — Лоренца 203
 — обобщенная 203
 — магнитного взаимодействия движущихся зарядов 207
 — — проводников с током 211
 — магнитодвижущая 235
 — осциллятора 342
 — равнодействующая (результатирующая) 23
 — реактивная 28
 — сопротивления 34
 — тока 184
 — тормозящая 34
 — тяжести 80
 — центробежная 78
 — центостремительная 26
 — фото-э. д. с. 364
 — электродвижущая 189
 — — взаимной индукции 242
 — — периодическая, действующее значение 279
 — — самоиндукции 239
Силы активные 24
 — Ван дер Ваальса 132
 — — дисперсионные 132
 — — индукционные 132
 — — ориентационные 132
 — внешние 24
 — внутренние 24
 — гироскопические 36
 — гравитационные 69
 — диссипативные 35
 — квазиупругие 259, 405
 — кулоновские 148
 — межмолекулярного взаимодействия 130
 — — отталкивания 130
 — — притяжения 130
 — пондеромоторные 182, 245
 — потенциальные 34
 — сторонние 188
 — тяготения 69
 — ударные 44
 — упругие 41, 404
 — центральные 39, 40
 — ядерные 438
 — , зарядовая независимость 438
 — , насыщенность 438
 — , радиус действия 438
Сименс 477
Симметрия кварк-лептонная 468
Синхронизация часов 58
Синхротрон 221
Синхрофазотрон 222
Система диссипативная 42
 — единиц 472
 — — абсолютная 472
 — — гауссова 480
 — — СГС 480
 — — электромагнитная 480
 — — электростатическая 480
 — — Международная (СИ) 473—480
 — , приставки 472
 — замкнутая (в механике) 24
 — (в термодинамике) 93
 — излучающая 301
 — изолированная (в механике) 24
 — (в термодинамике) 93
 — — адиабатически 93
 — — электрически 147
 — консервативная 36
 — линейная 270
 — материальных точек II
 — механическая 11
 — отсчета 12
 — — гелиоцентрическая 22
 — — инерциальная 22
 — — лабораторная 22
- Система термодинамическая 86
 — — изолированная (замкнутая) 93
 — — — адиабатически (в тепловом отношении) 93
 — — — простая 87
 — элементов Менделеева 389—391
Скачок потенциала поверхностный 430
Скорости релятивистские 56
Скорость абсолютная 77
 — волн групповая 290
 — — лучевая 348
 — — фазовая 285
 — дрейфа ионов 195
 — звука в газе или жидкости 285
 — — — идеальном 285
 — испарения 145
 — космическая вторая 76
 — — первая 76
 — — третья 76
 — круговая 76
 — линейная 19
 — лучевая 295
 — молекул газа наиболее вероятная 104
 — — — средняя арифметическая 105
 — — — — квадратичная 102
 — — — — относительная 105
 — необыкновенного луча 348
 — обыкновенного луча 348
 — относительная 77
 — — двух частиц в релятивистской кинематике 65
 — — параболическая 76
 — переноса энергии волной 287
 — переносная 77
 — поперечных упругих волн 286
 — — — — в струне 286
 — продольных волн в тонком стержне 286
 — света в вакууме 486
 — — — предельный характер 56, 65
 — групповая 340
 — точки 14
 — — мгновенная 14
 — — радиальная 15
 — — секторная 16
 — — средняя 14
 — — — путевая 15
 — — трансверсальная 15
 — угловая ларморовой прецессии 225
 — характеристической ракеты 29
 — — — составной (многосопускатой) 29
 — центра инерции (масс) 25
 — электромагнитных волн в вакууме 296
 — — — фазов в среде 296
Сложение гармонических колебаний взаимно перпендикулярных 268
 — — — одного направления 264
 — — частично когерентных волн 314
Слой двойной электрический (контактный) 430
 — — контактный запирающий 432
 — — — , направление запирающее 432
 — — — — пропускное 432
 — — — равновесный 433
 — — электронный в атоме 389
Смерть Вселенной тепловая 126
Смещение красное гравитационное 448
 — маятника статическое 274
 — электрическое 169
Сокращение лоренцево 60
Соленоид 209
 — , индуктивность 240
Соотношение Гейл-Манна — Нишиджимы 466
Сопротивление волновое колебательного контура 263
 — — временное 406
 — — добавочное 193
 — — магнитное 235
 — — , параллельное соединение 236

- Сопротивление магнитное, последовательное
 — — — — — соединение 236
 — — — — — участка электрической цепи 190
 — — — — — цепи переменного тока активное 278
 — — — — — — — — — емкостное 278
 — — — — — — — — — индуктивное 278
 — — — — — — — — — полное 278
 — — — — — — — — — реактивное 278
 — — — — — электрическое удельное 187
 — — — — — — — — — остаточное 417
 — — — — — — — — — электролита 195
 Состояние вещества критическое 135, 137
 — — — — — равновесное 86
 — — — — — системы инверсного (обращенное) 400
 — — — — — стационарное 86
 — — — — — термодинамического равновесия 86
 — — — — — частицы стационарное 375
 Спектр атома водорода 384
 — — — — — — — — — серия Бальмера 384
 — — — — — — — — — Брэгга 384
 — — — — — — — — — Лаймана 384
 — — — — — — — — — Пашена 384
 — — — — — — — — — Пфунда 384
 — — — — — — — — — Хемфри 384
 — — — — — волны 289
 — — — — — дисперсионный (призматический) 339
 — — — — — дифракционный 329
 — — — — — колебания 267
 — — — — — масс частиц 218
 — — — — — молекулы комбинационный 395
 — — — — — — — — — линия антистоксова 395
 — — — — — — — — — стоксова 395
 — — — — — — — — — спутники красные 395
 — — — — — — — — — фиолетовые 395
 — — — — — поглощения света 337
 — — — — — — — — — линейчатый 337
 — — — — — — — — — полосатый 337
 — — — — — — — — — сплошной 337
 — — — — — частот колебаний 267
 — — — — — — — — — дискретный (линейчатый) 267
 — — — — — — — — — непрерывный (сплошной) 267
 — — — — — энергетический частицы 374
 — — — — — — — — — дискретный 374
 Спектроскопия ядерная 448
 Спектры дифракционные 329
 — — — — — молекулярные (полосатые) 394
 — — — — — — — — — вращательные 394
 — — — — — — — — — колебательные 395
 — — — — — — — — — колебательно-вращательные 395
 — — — — — — — — — электронно-колебательные 395
 Спин электрона 224, 463
 — — — — — ядра атома 434
 Спиральность нейтрино 458
 Способность испускательная тела 356
 — — — — — интегральная 356
 — — — — — поглощательная тела 357
 — — — — — разрешающая оптического прибора 332
 — — — — — — — — — критерий Рэлея 332
 Среда активная (усиливающая) 399
 — — — — — диспергирующая 288
 — — — — — изотропная 281
 — — — — — линейная 281
 — — — — — однородная 281
 — — — — — сплошная 281
 — — — — — — — — — частица среды 281
 Средства измерений 488
 Средство электронное 393
 Ставка 11
 Статистика квантовая 409
 — — — — — Бозе — Эйнштейна 409
 — — — — — Ферми — Дирака 410
 — — — — — классическая Максвелла — Больцмана 106, 412
 — — — — — физическая 85
 Степень диссоциации 194
 — — — — — ионизации 198
 — — — — — когерентности света 314
 — — — — — черноты тела интегральная 358
 Стерadian 474
 Стокс 481
 Странность 466
 Сублимация 407
 Сутки 484
 Сфера молекулярного действия 134
 Тауохронность 316
 Телескоп, разрешающая сила 332
 — — — — — угловой предел разрешения 332
 Тело абсолютно неупругое 12
 — — — — — твердое 11
 — — — — — упругое 12
 — — — — — черное 357
 — — — — — внешнее 24
 — — — — — однородное 25
 — — — — — отсчета 12
 — — — — — рабочее 117
 — — — — — свободное 23
 — — — — — серое 357
 — — — — — твердое 402
 — — — — — — — — — аморфное 402
 — — — — — — — — — кристаллическое 402
 — — — — — — — — — термометрическое 87
 — — — — — упругое 279
 Температура 86
 — — — — — абсолютная (термодинамическая) 87
 — — — — — абсолютный нуль 87
 — — — — — — — — — недостижимость 129
 — — — — — — — — — вырождения 412
 — — — — — кипения 146
 — — — — — кристаллизации 408
 — — — — — критическая 135
 — — — — — — — — — перехода в сверхпроводящее состояние 417
 — — — — — — — — — плавления 407
 — — — — — радиационная 363
 — — — — — термодинамическая (абсолютная) 87
 — — — — — — — — — характеристическая Дебая 421
 — — — — — — — — — цветовая 364
 — — — — — — — — — шкалы 87
 — — — — — электронная 200
 — — — — — яркостная 363
 Теорема (принцип) Бабинэ 329
 — — — — — Гауса 252
 — — — — — Ирншоу 154
 — — — — — Карно 122
 — — — — — Кёнига 38
 — — — — — Лармора 225
 — — — — — Остроградского — Гауса для магнитного поля 214
 — — — — — — — — — электростатического поля в вакууме 153
 — — — — — — — — — в диэлектрике 169
 — — — — — Стокса 248
 — — — — — Штейнера (о переносе осей инерции) 49
 Теория близкодействия 247
 — — — — — газов кинетическая 101
 — — — — — квантовая электропроводности металлов 415—417
 — — — — — классическая электронная металлов 186
 — — — — — — — — — недостатки 188
 — — — — — Максвелла электромагнитного поля 246 и след.
 — — — — — относительности общая 74
 — — — — — — — — — специальная (частная) 55
 — — — — — — — — — постулаты 56
 — — — — — — — — — преобразования Лоренца 59
 — — — — — — — — — — — — — — для электромагнитного поля 254
 — — — — — — — — — — — — — — скоростей 64
 — — — — — — — — — — — — — — ускорений 65
 — — — — — — — — — — — — — — релятивистская 55
 — — — — — — — — — — — — — — строения вещества молекулярно-кинетическая 84
 — — — — — — — — — — — — — — тяготения релятивистская 74
 Теплоемкость 96
 — — — — — идеальных газов 109
 — — — — — — — — — квантовая теория 110

- Теплоемкость металлов 188, 415
 — молярная (молярная) 96
 — твердых тел 420
 — удельная 96
 — электронного газа 415
 Теплообмен 92
 — излучением 93, 355
 — конвективный 92
 — радиационный 355
 — теплопроводностью 92
 Теплоотдатчик (нагреватель) 119
 Теплоприемник (холодильник) 119
 Теплопроводность 92, 115
 Теплота 92, 93
 — парообразования удельная 146
 — — — внутренняя 146
 — плавления удельная 407
 — фазового перехода 146
 Терм 384
 Термодинамика 86
 Тесла 478
 Ток индукционный 237
 — — при замыкании и размыкании цепи 241
 — орбитальный в атоме 223
 — переменный квазистационарный 262
 — периодический, действующее значение 279
 — смещения 249
 — электрический 183
 — — конвекционный 184
 — —, направление 184
 — —, плотность 185
 — —, постоянный 184
 — —, проводимости 183
 — —, сила 184
 Тонна 484
 Торойд 213
 Точка кипения 146
 — критическая 135, 136
 — Кюри 173, 232
 — материальная 11
 — подвеса маятника 260
 Траектория точки 13
 Транзистор 433
 Трение внутреннее 114
 Триод кристаллический 433
 Труба зрительная, угловой предел разрешения 332

 Угол Брюстера 306, 345
 — дифракции 326
 — краевой 143
 — отражения 305
 — падения 305
 — предельный (критический) полного внутреннего отражения 307
 — преломления 305
 — сдвига 406
 — скольжения 331
 Удар 43
 — абсолютно неупругий 44
 — — — прямой центральный 44
 — — — упругий 45
 — — — косой центральный 45
 — — — прямой центральный 45
 — косой 44
 — прямой 44
 — центральный 44
 Узел стоячей волны 292
 — цепи магнитной 236
 — — электрической 191
 Узлы кристаллической решетки 85
 Ультразвук 280
 Упругость —объемная 280
 — формы 280
 Уравнение Ван дер Ваальса 134
 — волновое 284
 Уравнение волны плоской 283
 — — — синусоидальной 283, 284
 — — — сферической 284
 — — — синусоидальной 284
 — — — уругой 282
 — движения материальной точки дифференциальное 27
 — динамики относительного движения 78
 — — — в системе отсчета, связанной с Землей 80
 — — поступательного движения 28
 — кинетической теории газов основное 102
 — Клапейрона 89
 — Клапейрона — Клаузиуса 146, 407
 — Майера 103
 — Максвелла в дифференциальной форме
 второе 251
 — — — — — первое 248
 — — — — — третье 252
 — — — — — четвертое 252
 — — — в интегральной форме второе 250
 — — — — — первое 247
 — — — — — третье 251
 — — — — — четвертое 252
 — Менделеева — Клапейрона 89
 — Мещерского 28
 — Пуассона 99
 — состояния идеального газа 89
 — — — простой системы калорическое 91
 — — — — — термическое 87
 — Шредингера временное 374
 — — стационарное 374
 — Эйштейна для внешнего фотоэффекта 366
 Уравнения движения точки кинематические 13
 — магнитостатики 253
 — Максвелла, граничные условия 253
 — материальные в теории Максвелла 253
 — электростатики 252
 Уровень Ферми 414, 431, 433
 — энергетический, естественная ширина 447
 Уровни энергетические акцепторные (прилипания) 429
 — — — донорные 429
 — — — локальные 429
 — — — примесные 429
 Ускорение 16
 — абсолютное 77
 — в релятивистской механике 65
 — вращательное 20
 — касательное 17
 — кориолисово 78
 — линейное 20
 — мгновенное 16
 — нормальное 17
 — осеостремительное 20
 — относительное 77
 — переносное 77
 — поворотное 78
 — свободного падения 80
 — — —, стандартное значение 81, 487
 — силы тяжести 80
 — среднее 16
 — тангенциальное 17
 — угловое 20
 — центра инерции (масс) 28
 — центростремительное 17
 Ускорители заряженных частиц 219
 — — — индукционные 220
 — — — линейные 220
 — — — резонансные 220
 — — — циклические 220
 — — — электростатические 220
 Условие Вульфа — Брэгга 331
 — нормировки вероятностей 373
 — оптической однородности среды 331
 — радиоактивного равновесия 441

- Условия интерференционных максимумов и минимумов 291
 — Лауэ 330
 — нормальные 485
 — —, объем моля идеального газа 485
 Участок электрической цепи активный 190
 — — — пассивный 190
 Уширение доплеровское спектральных линий 309
- Фаза (в термодинамике) 135
 — волны плоской 283
 — — сферической 284
 — колебаний 257
- Фазотрон 221
 Фарад 477
 Фермионы 410
 Ферромагнетики 231
 Фигуры Лиссажу 269
 Физика высоких энергий 456
 — молекулярная 84
 — статистическая 85
 — — квантовая 409 и след.
 — — классическая 101 и след.
 — твердого тела 408 и след.
 — элементарных частиц 455 и след.
 — ядерная 434 и след.
 Флуктуации 126
 Флуктуация абсолютная 127
 — относительная 127
 Флуоресценция 396
 Фокусировка частиц в ускорителях жесткая 222
 — — — мягкая 222
 Фонон 422
 —, квазиимпульс 422
 —, энергия 422
 Формула барометрическая 106
 — Бальмера — Ридберга 384
 — Больцмана 125
 — Вина 360
 — Вульфа — Брэгга 331
 — Гопкинсона 235
 — де Бройля 370
 — Дебая — Ланжевена 166
 — Планка 362, 411
 — Рэлея — Джинса 360
 — Томсона 263
 — Циолковского 29
 — Эйнштейна для броуновского движения 128
 Формулы Френеля 306
 Фосфоресценция 396
 Фотоаппарат, угловой предел разрешения 332
 Фотоионизация 364
 Фотокадод 365
 Фотолюминесценция 397
 —, антистоксово излучение 397
 —, выход квантовый 397
 — — энергетический 397
 — —, закон Вавилова 397
 —, правило Стокса 397
 Фотон 366, 456
 —, импульс 367
 —, масса 367
 —, энергия 366
 Фотопроводимость 364
 Фототок 364
 — насыщения 365
 Фотоупругость 363
 Фотоэлектроны 364
 Фотозффект в газах 364
 — вентиляный (в запаривающем слое) 364
 — внешний 364
 — внешний, законы 365
 — —, красная граница 365
 — —, уравнение Эйнштейна 366
- Фотозффект внутренний 364
 — многофотонный (нелинейный) 366
 Фронт волны 282
 Функция волновая частицы 373
 — — —, накладываемые условия 374
 — — — собственная 374
 — Кирхгофа 358
 — Ланжевена классическая 228
 — распределения Бозе — Эйнштейна 409
 — — Максвелла — Больцмана 106, 412
 — — Ферми — Дирака 410
 — силовая 36
 Функции состояния 88
- Холодильник (теплоприемник) 119
 Хромодинамика квантовая 470
 Хронометризация системы отсчета 56, 58
- Цвет глюона 470
 — кварка 468
 Центр волны 284
 — инерции системы 25
 — — —, закон движения 28
 — качания физического маятника 261
 — кривизны траектории 13
 — масс системы 25
 — сил 39
 — тяжести тела 80
 Центры люминесценции 396
 — парообразования 146
 — примесные 428
 Цепь магнитная 235
 Цикл в термодинамике 117
 — — — обратный 118
 — — — прямой 118
 — — —, термический к. п. д. 119, 123
 — Карно обратный 119
 — — прямой 118
 — — — необратимый, термический к. п. д. 122
 — — — равновесный, термический к. п. д. 119, 122
 — — термодерный 454
 — — протон-протонный 454
 — — углеродно-азотный 454
 Циклотрон 220
 —, условие синхронизма 221
 Циркуляция магнитной индукции 212
 — напряженности электростатического поля 156
 Цуг волн 311
- Чарм 466
 Час 485
 Частица в потенциальной яме 375
 — — —, квантование энергии 376
 — — —, принцип соответствия 377
 — — свободная (в квантовой механике) 375
 — — сплошной среды — 281
 Частицы резонансные 464
 — фундаментальные 467
 — —, кварки 468
 — —, лептоны 467
 — —, переносчики взаимодействий 468—471
 — — элементарные 455
 — —, взаимопревращаемость 460
 — —, время жизни 457
 — —, заряд электрический 457
 — —, истинно нейтральные 458
 — —, классификация 467
 — —, масса, 457
 — —, момент магнитный 458
 — — очарованные 457, 466
 — — «предельные» 457, 466
 — — составные 467

- Эффект дробовой 127
 — изотопический в сверхпроводимости 417
 — Керра 353
 — Кнудсена 117
 — Комптона 368
 — Коттона — Мутона 354
 — Мессбауэра 448
 — Ми 339
 — туннельный 382
 — Фарадея 355
 — Холла 217
- Эффекты релятивистские 55
 — —, замедление хода времени 61
 — —, лоренцево сокращение 60
- Явление взаимной индукции 241
 — Керра 353
 — самондукция 239
 — Тиндалля 338
- Явление Холла 217
 — электромагнитной индукции 237
 — электростатической индукции 173
- Явления переноса 113
 — —, сводная таблица 116
- Ядра атомов зеркальные 438
 Ядро атома 434
 — —, дефект массы 436
 — —, дочернее 439
 — —, заряд электрический 434
 — —, магнитный момент 435
 — —, материнское 439
 — —, радиус 434
 — —, состав 434
 — —, составное (компаунд) 450
 — —, спин 434
 — —, энергетические уровни 442, 446
 — —, энергия связи 436
- Яма потенциальная 45, 363
 Яркость энергетическая 363
 — —, спектральная плотность 363